现代数学译丛

曲面拓扑学

A. 格拉曼

科学出版社

现代数学译丛

曲 面 拓 扑 学

A. 格拉曼 著

张耀成 译

江嘉禾 校

科 学 出 版 社

1 9 8 1

内 容 简 介

本书分七章，主要讨论基本群和 Morse 函数，并且利用 Morse 函数来处理曲面的分类问题，此外，还介绍扭结论和曲面在欧氏空间的浸入问题．本书以较短的篇幅介绍了较丰富的内容，可作为学习代数拓扑学和微分拓扑学的入门书．

A. Gramain

TOPOLOGIE DES SURFACES

Presses Universitaires de France, 1971

现代数学译丛

曲 面 拓 扑 学

A. 格拉曼 著

张耀成 译

江嘉禾 校

责任编辑 张鸿林、杜小杨

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1981年 8 月第 一 版　开本：850×1168 1/32

1981年 8 月第一次印刷　印张：3

印数：0001—7,300　字数：74,000

统一书号：13031・1656

本社书号：2274・13—1

定价：0.58 元

序　　言

本书由 1969 年—1970 年间作者在 Orsay*) 理学院讲课的讲义基础上整理而成. 该课程是为大学三年级的学生开设的，它有两个目的：一方面是指出代数拓扑与微分拓扑所用的一些方法；另一方面则是证明拓扑学的一些基本结果. 相应于第一个目的，我们将讨论空间的基本群与流形上的 Morse 函数等概念；相应于第二个目的，则是利用这些概念来证明紧致曲面的分类定理.

阅读本书所需要的知识是大学头两年所学过的课程. 因此，我们避而不谈拓扑空间而只讨论度量空间，(除第七章外) 都用路径连通的概念来代替连通的概念，而流形都是欧氏空间的子流形. 选定这种程度是经过慎重考虑的，可是却引起一些缺陷：我们必须承认流形上存在 Morse 函数；我们不能证明紧致可微曲面精确至微分同胚的分类定理，更不用说证明"拓扑"曲面的分类定理了. 我们只满足于证明可微曲面精确至同胚的分类定理，以避免微分同胚的粘合问题.

第一章和第二章介绍基本群的概念，给出利用 Van Kampen 定理计算基本群的例子，尤其是紧致曲面的例子.

第三章和第四章用来定义与讨论流形与流形上的 Morse 函数. Morse 函数的存在性是唯一要承认的"整体"定理.

第五章处理曲面的分类，这是应用 Morse 函数的一个范例. 粘合同胚映射的技巧虽嫌繁冗，但比古典的组合方法更易推广.

最后，第七章中有下述定理的一个"初等"证明，即紧致连通曲面把欧氏空间分成两个连通区. 这个证明并没有用到同调理论. 而 Alexander 对偶定理则隐含在曲面的基本群与扭结群的理论中，

---

*) 巴黎大学第十一分校，亦称巴黎南大学.——译者注

这就是在第六章讲述一些扭结理论的原因.

读者如果仍旧想要从颇为初等的程度（大学四年级）出发，深入本书所论的课题，可以学习：

代数拓扑学方面：Greenberg (M.), Lectures on algebraic topology, Benjamin Inc. (1967);

微分拓扑学方面：Milnor (J.), Topology from the differentiable view point, The University Press of Virginia (1965).

目　　录

第一章 基本群

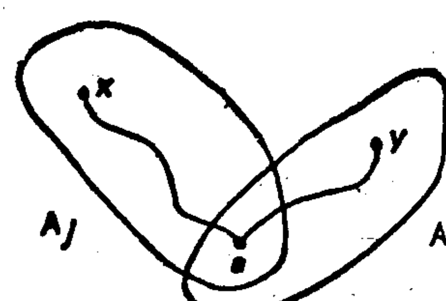
我们打算对每一路径连通的度量空间 X，联结一个群 $\pi(X)$，而对每一连续映射 $f:X\to Y$，联结一个同态变换 $\pi(f):\pi(X)\to\pi(Y)$，使得两个同胚[1]的空间 X 与 X' 有同构的基本群 $\pi(X)$ 与 $\pi(X')$. 因此群 $\pi(X)$ 表现了空间 X 的某些拓扑性质. 我们将尽可能对熟知的空间 X 建立相应的群 $\pi(X)$.

1. 路径连通

设 X 为一度量空间. X 中的一条路径是一个连续映射 $\gamma:[a,b]\to X$，其中 $a, b\in \boldsymbol{R}, a<b$. 通常假设 $a=0$ 而 $b=1$；因为总可以用唯一的一个线性仿射映射把 $[a,b]$ 映成 $[0,1]=I$. 这时点 $\gamma(0)$ 称为路径 γ 的起点，而点 $\gamma(1)$ 称为终点. 空间 X 称为路径连通的，如果 X 中任何两点 x, y 都可以由一条以 x 为起点 y 为终点的路径 γ 连接起来.

例 1. $\boldsymbol{R}^n$ 的任何凸子集（特别是任何球体）都是路径连通的.

命题 1. 若 X 的一族路径连通子集 $(A_j)_{j\in J}$ 有一公共点 a，



1) 我们说 X 与 X' 同胚，如果存在一个一一满映射 $f:X\longrightarrow X'$ 且为双边连续的. 这样的 f 就称为同胚映射.

则其并集是路径连通的.

若 $x\in A_j$ 而 $y\in A_{j'}$，把从 x 到 a 的路径接上从 a 到 y 的路径，就得到一条把 x 连接到 y 的路径.

命题 2. 关系 $R(x, y)$ = "存在一条路径把 x 连接到 y"为一等价关系. 点 x 的等价类(路径连通区)是包含 x 的最大路径连通子集.

证明是容易的.

命题 3. 路径连通空间的连续映象是路径连通的.

事实上，若 γ 是 X 中把 x 连接到 y 的路径，则路径 $f\circ\gamma$ 在 $f(X)$ 中把 $f(x)$ 连接到 $f(y)$.

空间 X 称为局部路径连通的，如果对 X 的每一点 x 都存在路径连通的基本邻域系. 例如 $\boldsymbol{R}^n$ 的开集以及更一般的拓扑流形[1)]，都是局部路径连通的.

命题 4. 在局部路径连通的空间中，所有路径连通区都是既开且闭的.

由命题 2 知道，每个路径连通区都是开的；它也是闭的，因为它的补集，即其他连通区的并集是开的.

注 1 (连通空间) 所谓连通空间是指其中除了空集与它自身外，没有其他的子集是既开且闭的空间. 由上述定理知道，连通且局部路径连通的空间也是路径连通的，因为它只有一个路径连通区. 我们承认，任何路径连通空间都是连通的，这是因为线段 [0, 1] 是连通的，从而任何路径的连续象亦然.

2. 路径，等价，连接

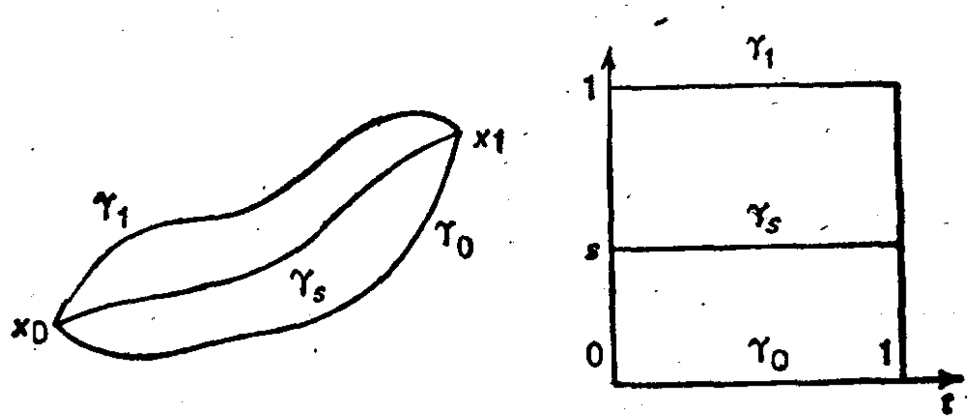
等价关系. 我们说，X 中两条路径 γ_0 与 γ_1 等价(或者说在端点固定下同伦)，记为 $\gamma_0\sim\gamma_1$，如果存在一个连续映射 $\delta: I\times I\to X$，使得:

1) 度量空间 X 称为 n 维拓扑流形，如果 X 的每一点都有一个同胚于 $\boldsymbol{R}^n$ 的邻域.

当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，$\delta(t,0)=\gamma_0(t)$，$\delta(t,1)=\gamma_1(t)$；
当 $0\leqslant s\leqslant 1$ 时，$\delta(0,s)=\gamma_0(0)=\gamma_1(0)$，

$$\delta(1,s)=\gamma_0(1)=\gamma_1(1).$$

两条等价的路径有同一个起点 x_0 和同一个终点 x_1. 直观上，若设 $\gamma_s(t)=\delta(t,s)$，则当 s 从 0 变到 1 时，起点为 x_0 终点为 x_1 的路径族 γ_s 是一个把 γ_0 变成 γ_1 的连续变形. 更精确地说，映射 $s\longmapsto\gamma_s$ 是起点为 x_0 终点为 x_1 的路径所组成的空间（具有一致收敛度量）中的一条连续路径[1].



路径的连接. 直观上，这就是把两条路径头尾相接起来的运算（§ 1 节中已经用过了）. 设 γ' 与 γ'' 是 X 中的两条路径，使得起点 $\gamma''(0)$ 刚好是终点 $\gamma'(1)$. 连接路径 $\gamma=\gamma'\cdot\gamma''$ 由下述公式定义：

$$\gamma(t)=\begin{cases}\gamma'(2t), & \text{如果 } 0\leqslant t\leqslant \dfrac{1}{2},\\[2mm] \gamma''(2t-1), & \text{如果} \dfrac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

命题 5. *连接路径的等价类只依赖于各分段路径的等价类.*

设 γ_0', γ_0'' 是可连接的路径（即 $\gamma_0'(1)=\gamma_0''(0)$），而 δ' 与 δ'' 分别把 γ_0' 变成 γ_1' 以及把 γ_0'' 变成 γ_1'' 的同伦，则 γ_1' 与 γ_1'' 为

---

1) 对任何 $\varepsilon>0$，要证明存在一个 α，使得若 $|s-s_0|\leqslant\alpha$，则有 $\sup_{t\in I}d(\gamma_s(t),\gamma_{s_0}(t))\leqslant\varepsilon$. 用归谬法，假若不然，存在 ε，对任何 $n\geqslant 0$，都有一点 $(t_n,s_n)\in I\times I$，使得 $|s_n-s_0|\leqslant 1/n$ 且 $d(\gamma_{s_n}(t_n),\gamma_{s_0}(t_n))>\varepsilon$. 序列 (t_n,s_n) 有一聚点 (t_0,s_0)，但这与 δ 在 (t_0,s_0) 处连续一事矛盾.

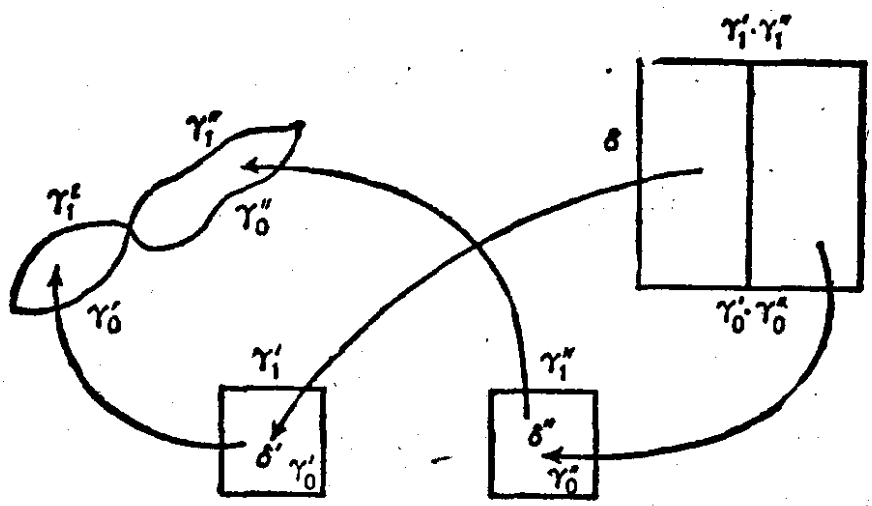
可连接的，且有：

$$\gamma_0' \cdot \gamma_0'' \sim \gamma_1' \cdot \gamma_1''.$$

事实上，令：

$$\delta(t, s) = \begin{cases} \delta'(2t, s), & \text{如果 } 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ \delta''(2t-1, s), & \text{如果 } \dfrac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

映射 δ 是把 $\gamma_0' \cdot \gamma_0''$ 变成 $\gamma_1' \cdot \gamma_1''$ 的同伦。要验证 δ 是连续的（正如要验证前面的 $\gamma' \cdot \gamma''$ 是连续的一样），需要利用下述结果：

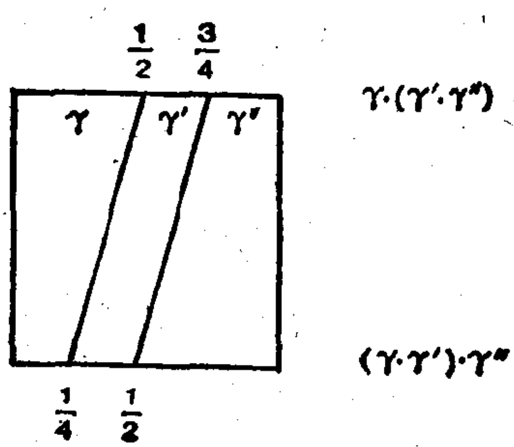


命题 6. 设 $f: X \to Y$ 为一映射，A 与 B 是 X 的两个闭集，使得 $X = A \cup B$. 若 $f|_A$ 与 $f|_B$ 都是连续的，则 f 也是连续的.

结合性. 等价类的连接运算满足结合律，这就是说，若路径是可连接的，则有：

$$\gamma \cdot (\gamma' \cdot \gamma'') \sim (\gamma \cdot \gamma') \cdot \gamma''.$$

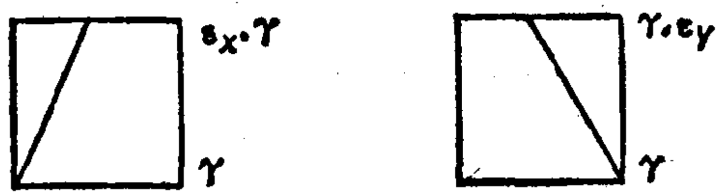
利用下图，可以给出这个同伦的明确公式：



么元与逆元. 符号 ε_x 表示常值路径,其象点为 $x\in X$. 对起点为 x 终点为 y 的任何路径 γ,有

$$\varepsilon_x\cdot\gamma\sim\gamma,\quad \gamma\cdot\varepsilon_y\sim\gamma.$$

这可以利用下图来证明:



符号 γ^{-1} 表示由 $\gamma^{-1}(t)=\gamma(1-t)$ 所定义的路径,我们有:

$$\gamma\cdot\gamma^{-1}\sim\varepsilon_x \text{ 与 } \gamma^{-1}\cdot\gamma\sim\varepsilon_y,$$

γ^{-1} 称为 γ 的逆.

3. 闭径,基本群

空间 X 中的路径 γ 称为在点 $x\in X$ 处(或基点为 x)的闭径,如果其起点 $\gamma(0)$ 与终点 $\gamma(1)$ 都重合于 x. 在基点为 x 的所有闭径组成的集 $\mathscr{L}(X, x)$ 中,可以施行连接运算. 用 $\pi(X, x)$ 表示 $\mathscr{L}(X, x)$ 对等价关系 $\sim$ 的商,称为 X 在基点 x 处的基本群(或称为 Poincaré 群). (由 § 2 得知) 它在闭径类的连接运算下的确成群: 么元即常值路径类而逆元即闭径 γ^{-1} 的类. 通常把这个群记为 $\pi_1(X, x)$,称为 X 的一阶同伦群.

注2. 设 $\mathring{X}$ 为点 x 在 X 中的路径连通区. 显然有 $\mathscr{L}(X, x)=\mathscr{L}(\mathring{X}, x)$; 等价关系是相同的,从而 $\pi(X, x)=\pi(\mathring{X}, x)$. 可见,只有当 X 为路径连通时,基本群才有意思.

定理 1. 若 X 为路径连通,则 $\pi(X, x)\simeq\pi(X, y)$.

设 γ 是一条连接 x 到 y 的路径. 对基点为 y 的任一闭径 l,我们结合上基点为 x 的一条闭径 l', 定义为 $l'=\gamma\cdot l\cdot\gamma^{-1}$, 这样就定义了一个变换 $\Gamma:\pi(X, y)\to\pi(X, x)$. Γ 是群的同态变换, 因为 $\gamma\cdot l\cdot l_1\cdot\gamma^{-1}\sim\gamma\cdot l\cdot\gamma^{-1}\cdot\gamma\cdot l_1\cdot\gamma^{-1}$. 以 γ^{-1} 定义 Γ 的逆变换 $\Gamma':\pi(X, x)\to\pi(X, y)$, 由此得出等价关系 $l\sim$

$\gamma^{-1}\cdot\gamma\cdot l\cdot\gamma^{-1}\cdot\gamma$ 与 $l'\sim\gamma\cdot\gamma^{-1}\cdot l'\cdot\gamma\cdot\gamma^{-1}$. 这就证明了 Γ 为同构变换.

注 3. 因此,群 $\pi(X, x)$"不依赖于"基点 x 的选择,一般的习惯记为 $\pi_1(X)$ 而不另加标记. 可是,上述同构变换 Γ 依赖于所选定的路径 γ,因此不存在 $\pi(X, x)$ 与 $\pi(X, y)$ 的自然同构,所以我们还是标出所选定的基点.

空间 X 称为单连通的,若 $\pi(X, x)$ 只有么元(简写为 $\pi(X, x)=0$). 这不依赖于 x 的选择. 例如能收缩为一点的空间是单连通的(它只有一条闭径).

连续映射的作用. 设 $f: X\to Y$ 为一连续映射而 $y=f(x)$. 对于任一条闭径 $\gamma\in\mathscr{L}(X, x)$, 关联上闭径 $f\circ\gamma\in\mathscr{L}(Y, y)$,过渡到等价类后就定义了一个变换:

$$\pi(f):\pi(X, x)\to\pi(Y, y),$$

它是一个群同态变换. (通常, 若 $y=f(x)$, 则记 $f:(X, x)\to(Y, y)$.)

命题 7. 设 $f:(X, x)\to(Y, y)$ 与 $g:(Y, y)\to(Z, z)$;则有

$$\pi(f\circ g)=\pi(f)\circ\pi(g).$$

此外:

$$\pi(\mathrm{id}(X))=\mathrm{id}(\pi(X, x)).$$

证明是容易的.

推论 两个同胚的空间有同构的基本群.

设 $f:(X, x)\to(Y, y)$ 为一同胚映射, $g=f^{-1}$. 从命题 7 推出:

$$\pi(f)\circ\pi(g)=\pi(\mathrm{id}(Y))=\mathrm{id},$$

而且

$$\pi(g)\circ\pi(f)=\mathrm{id}.$$

这就证明了 $\pi(f)$ 为同构变换.

(附有基点的)同伦映射. 设 (X, x) 与 (Y, y) 为两个附有基点的空间. 两个连续映射:

$$f_0, f_1:(X, x) \to (Y, y)$$

称为(附有基点)同伦的,记为 $f_0 \sim f_1$, 如果存在一个连续映射 $F: X \times I \to Y$ 使得:

$$F(\{x\} \times I) = y,$$

$$F|(X \times \{0\}) = f_0, \quad F|(X \times \{1\}) = f_1.$$

定理 2. 两个同伦的映射 $f_0, f_1:(X, x) \to (Y, y)$ 导出相同的同态变换:

$$\pi(f_0) = \pi(f_1): \pi(X, x) \to \pi(Y, y).$$

事实上,若 l 为在 $x \in X$ 处的闭径, 则闭径 $f_0 \circ l$ 与 $f_1 \circ l$ 同伦: 这两条闭径之间的同伦可以由 $(t, s) \to F(l(t), s)$ 来定义,其中 F 为 f_0 与 f_1 之间的同伦.

连续映射 $f:(X, x) \to (Y, y)$ 称为一个同伦等价,若它有一个"精确至同伦的逆映射",即有一映射 $g:(Y, y) \to (X, x)$ 使得

$$f \circ g \sim \mathrm{id}(Y), \quad g \circ f \sim \mathrm{id}(X).$$

这时,附有基点的空间 (X, x) 与 (Y, y) 称为同伦的*).

推论 两个同伦的空间具有同构的基本群.

事实上,我们有:

$$\pi(f \circ g) = \pi(\mathrm{id}(Y)) = \mathrm{id} \text{ 与 } \pi(g \circ f) = \pi(\mathrm{id}(X)) = \mathrm{id}.$$

例 2. 与一点同伦的空间(亦称可收缩空间)是单连通的. $\boldsymbol{R}^n$ 的任何凸形子集都是可收缩的.

例 3. 所有平环

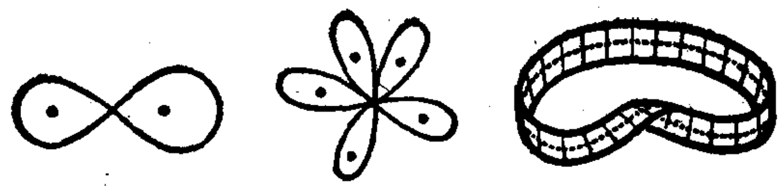
$$C = \{r_1 < |z| < r_2\}$$

都同伦于圆圈,若取半径为 $\frac{r_1 + r_2}{2}$ 的圆圈 S, 则一一映射 $S \to C$ 精确至同伦的逆是沿半径的投影.

例 4. 平面去掉两个点与 8 字形同伦. 平面去掉 n 个点与 n 瓣菊花的边线同伦.

---

*) 这里的"同伦"一词,原文是 "homéotope", 与惯用的术语 "homotope" 不同, 想系作者自拟, 可能是为了区别映射的同伦与空间的同伦. 译文仍本惯例. ——校者注



例 5. Mœbius 带与其纬圆同伦.

4. 基本例子：圆圈，轮胎

A）圆圈的基本群

设圆圈 S^1 由方程 $x^2+y^2=1$ 给出，而 a 为 S^1 的点(1, 0).

定理 3. 圆圈的基本群与 $\boldsymbol{Z}$ 同构.

我们将建立一个同态变换 $d:\pi(S^1,a)\to\boldsymbol{Z}$，然后证明它是一个同构. 可用微分的办法来定义 d：要证明 $\pi(S^1,a)$ 中每个类都有一条可微闭径，然后对这些可微闭径定义 d.

符号 $r:\boldsymbol{R}^2\backslash\{0\}\to\boldsymbol{R}^2$ 表示从圆心沿半径到 S^1 上的投影. 公式：

$$r(x,y)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

表明它是一个可微映射.

引理 1. S^1 的两条闭径 f_0 与 f_1 同伦，如果 $d(f_0,f_1)=\sup|f_0(t)-f_1(t)|\leqslant k<1$.

对任何 $s\in[0,1]$，有 $sf_1(t)+(1-s)f_0(t)\neq 0$，因此变形 $f_s(t)=r((1-s)f_0(t)+sf_1(t))$ 实现了所要的同伦.

引理 2. S^1 的任何闭径 f 都同伦于邻近 f 的一条可微闭径 φ.

可微闭径 φ 是指闭径 $\varphi:I\to S^1$，看成为映入平面的映射时，是可微的. 依据 Stone-Weierstrass 定理[1]，用多项式来逼近 $f:I\to\boldsymbol{R}^2$ 的两个坐标，就得到一个可微映射 $\varphi_0:I\to\boldsymbol{R}^2$，使得 $|f(t)$

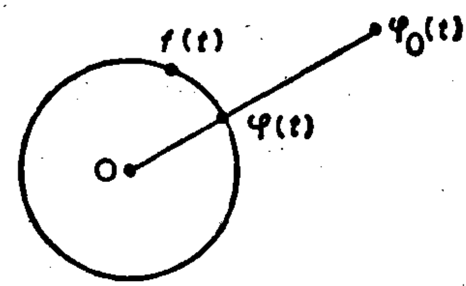
1）另外的一些分析定理也合用. 例如，可用一种可微的钟形函数来把 f 光滑化.

$-\varphi_0(t)|\leqslant\frac{\varepsilon}{4}$. 至多加入一个线性函数$\left(处处小于\frac{\varepsilon}{4}\right)$后，不妨假设 $\varphi_0(0)=\varphi_0(1)=a$，而 $|f(t)-\varphi_0(t)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. 闭径$\varphi(t)=r(\varphi_0(t))$ 是可微的，由变形 $r(s\varphi_0(t)+(1-s)f(t))$ 可见 φ 与 f 同伦. 事实上，只要假设 $\varepsilon<2$，就足以保证 $s\varphi_0(t)+(1-s)f(t)$ 决不为零. 此外:

$$|\varphi(t)-f(t)|\leqslant|\varphi(t)-\varphi_0(t)|+|\varphi_0(t)-f(t)|$$
$$\leqslant 2|\varphi_0(t)-f(t)|\leqslant\varepsilon,$$

这表明φ也是可以任意接近f的.

可微闭径的度数. 可微闭径φ的度数定义为



$$d(\varphi)=\frac{1}{2i\pi}\int_0^1\frac{d\varphi}{\varphi}.$$

令 $$\theta(\varphi(t))=\frac{1}{i}\int_0^t\frac{d\varphi}{\varphi};$$

积分后得到*) $\varphi(t)=e^{i\theta(\varphi(t))}$. 函数 $\theta(\varphi(t))$ 对 t 连续，它确定$\varphi(t)$的辐角，当 $t=0$时辐角为零.因此，度数 $d(\varphi)=\theta(\varphi(1))/2\pi$ 为一整数. 直观上，它就是 $\varphi(t)$ 实际转动的圈数.

引理 3. 两条相邻的可微闭径有相同的度数.

设 φ_0 与 φ_1 为两条可微闭径，使得 $|\varphi_0(t)-\varphi_1(t)|\leqslant\varepsilon<1$，令:

$$\varphi_s(t)=r((1-s)\varphi_0(t)+s\varphi_1(t));$$

微分 $d\varphi_s$ 连续地依赖于 s，故

$$d(\varphi_s)=\frac{1}{2i\pi}\int_0^1\frac{d\varphi_s}{\varphi_s}.$$

亦然，函数 $d(\varphi_s)$ 对 s 连续且取整数值，故为一常数(中值定理).

若 f 为一连续闭径，它的度数 $d(f)$ 定义为与 f 相邻的所有

---

*) 原文是"比较导数可见".——校者注

可微闭径的公共度数. 此度数连续地依赖于 f, 因为两条相邻的闭径与同一条可微闭径相邻. 因此,度数只依赖于 f 的同伦类(与引理 3 的论证相同).

a) 变换 $d:\pi(S^1, a)\to \boldsymbol{Z}$ 是同态变换. 事实上,对可微闭径而言,我们有:

$$d(\varphi\cdot\varphi')=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{d\varphi(2\theta)}{\varphi(2\theta)}+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{d\varphi'(2\theta-1)}{\varphi'(2\theta-1)}$$

$$=\int_0^1\frac{d\varphi(t)}{\varphi(t)}+\int_0^1\frac{d\varphi'(t)}{\varphi'(t)}=d(\varphi)+d(\varphi').$$

b) 同态变换 d 为满的. 若 $n\in\boldsymbol{Z}$, 则闭径 $t\longmapsto e^{2i\pi nt}$ 的度数是 n.

c) 它为一一的. 设 φ 可微,使得 $d(\varphi)=\dfrac{\theta(\varphi(1))}{2\pi}=0$. 变形 $\varphi_s(t)=e^{is\theta(\varphi(t))}$ 为 φ 与常值闭径之间的同伦;由于 $\theta(\varphi(1))=0$,所以对任何 s 而言, φ_s 是一条闭径.

这就完成了证明.

注4. 群 $\pi_1(S^1)$ 是可换的, 一般的拓扑群的基本群总是可换的.

B) 应用: Brouwer 不动点定理

设 D^2 为平面上的单位圆板:

定理 4. 任何连续映射 $f:D^2\to D^2$ 都有一个不动点.

假若不然,对任何 $x\in D^2$, 都有 $x\neq f(x)$, 则直线 $(x, f(x))$ 有定义,它与 D^2 的边界 S^1 相交. 设 $\varphi(x)$ 为接近 x 而较远离 $f(x)$ 的那个交点, 映射 $\varphi:D^2\to S^1$ 连续且 $\varphi|_{S^1}=\mathrm{id}(S^1)$. 但这是不可能的.