

数学是什么

[美] RICHARD COURANT 著
HERBERT ROBBINS

汪 浩 朱煜民 译 湖南教育出版社

WHAT IS MATHEMATICS
RICHARD COORANT
AND
HERBERT ROBBINS
Oxford Univ. Press, New York, 1978

数 学 是 什 么
〔美〕 RICHARD COURANT 著
HERBERT ROBBINS 著
汪 浩 朱煜民 译
责任编辑：孟实华

*

湖南教育出版社出版（长沙市展览馆路14号）
湖南省新华书店发行 湖南省新华印刷二厂印刷

*

1985年1月第1版 1986年4月第2次印刷
字数：400,000 印张：17.75 印数：18,001—20,400
统一书号：7284·467 定价：3.10元

译者序

R. 柯朗和 H. 罗宾斯所著《数学是什么》(“What is Mathematics”)一书初版刊行于1941年。本译本是根据牛津大学出版社1978年版本翻译的。

R. 柯朗(1888—1972)是美国著名的数学家, 1910年获得哲学博士学位, 1920—1933年在格廷根大学创办了一所数学研究所, 与著名数学家D. 希尔伯特过往甚密。1933年他离开纳粹德国, 1934年到美国纽约大学任数学系主任和数学科学研究所所长, 1958年退休时, 这个研究所被命名为“柯朗数学科学研究所”。柯朗一生中撰写了三本名著: 一本是与D. 希尔伯特合写的二卷本《数学物理方法》(“Methods of Mathematical Physics”), 另一本是二卷本《微积分》(“Differential and Integral Calculus”), 再一本就是本书。本书的另一名作者H. 罗宾斯也是美国数学家, 执教于哥伦比亚大学, 1947年与中国著名数学家许宝騄先生合作写过一篇论文“Complete coverage and the law of large number”, 至今仍被许多专著所引用。

本书内容丰富充实, 几乎涉及近代数学的各个分支, 包括: 自然数、数系、几何作图法和数域代数、射影几何、公理系统和非欧几何、拓扑学、函数与极限、极大和极小、微积分等。本书以其思想的深刻性和启发性著称。它从最基本的事实出发, 在不知不觉之中, 把人们的注意力引向各数学分支最核心的内容。它的叙述是遵循历史发展的, 并且是科学严谨的; 但又不拘泥于非本质的细节。本书强调对内容的本质的理解, 作者运用了许多生

动贴切的比喻，引人入胜，饶有趣味。作者善于把困难的问题用比较通俗的方法来阐述，也善于把初等的问题放到更高的观点下去理解。读过此书，不仅使您了解到数学的历史和数学家的轶事，也会使您了解到十分广泛的数学知识；不仅使您学到怎样去分析问题，也会使您学到如何从直观出发去探索数学结论或解题思路，然后再进行理论严格证明的思考方法。无怪乎有的数学家年轻时就因为读了这本书便与数学结下了不解之缘。

本书被誉为具有专著性质的高级科普读物，四次再版，多次印行，盛销不衰，足资证明。柯朗在序言中说：“本书奉献给初学者和专家，学生和教师，哲学家和工程师，……”因此，数学专业工作者或非数学专业工作者，大专院校的师生或中学高年級的师生，读之都有裨益。

译者水平有限，译文中难免有讹误不妥之处，敬请读者批评指正。李运樵副教授提供本书文言文译本，在此谨致谢忱。

译 者

1984年8月

第一版序

二千年来，掌握一定的数学知识已被视为每个受教育者必需具备的智力。数学在教育中的这种传统地位，今天已出现严重危机。不幸的是，数学的专业教育工作者对此应该分负其责。数学的教学，逐渐流于无意义的单纯演算习题的训练，固然，这可以发展形式演算的能力，但却无助于对数学的真正理解，无助于提高独立思考的能力。数学的研究，有过度专门化和过度抽象化的倾向，忽视了应用以及数学与其他领域之间的联系。这种状况丝毫不能说明形式化方针是正确的。相反，在重视智力训练的人们中，必然激起强烈的反感。教师、学生、知识界普遍要求进行建设性的改革，并且决不会稍遇阻力便动摇决心。改革的目标是求得对数学有一个全貌的认识，且真正领悟数学是科学思考和科学行动的基础。

若干出色的传记和历史著作以及许多有趣味的通俗读物，已经普遍地引起许多读者对数学的潜在兴趣。但是，学问是不可能单纯依靠间接的方法来获得的。如果一个人从未集中心思倾听过音乐乐章，而单靠最出色的报刊杂志想获得音乐教育，那就无异于缘木求鱼；对数学的理解亦是如此，若仅持娱乐消遣的态度而不下功夫吃苦研究，亦将一无所得。深入实际地接触一下近代数学的内容是完全必要的。当然，纯属技术性的细节必须避免，数学内容的展示应不受传统惯例和可憎的教条主义形式的束缚，但是叙述必须正确。教条主义拒绝揭示起因或目的，它是对真诚力量的一种不公正的干扰。我们从最基础的原理出发，选择捷径直

奔数学的制高点，由此窥察近代数学的实质和动力。

本书试图沿此方向作一番探索。由于预先约定阅读本书仅需良好的高中文化水平，因此本书可视作普及性读物。但是并不意味着准许逃避一切努力的那种危险倾向。读者需要具备适当成熟的智力以及爱好独立思考的意愿。本书奉献给初学者和专家，学生和教师，哲学家和工程师，它既可用于课堂又可陈列于图书馆。可能本书的企图希望过奢。由于其他工作繁忙，本书准备了多年，在刊印出版时，甚至在真正完稿之前，已经作了不少妥协。欢迎对本书提出批评和建议。

无论如何，希望本书可作为献给美国高等教育的一份有益的礼物，以答谢这个国家聘请著者的雅意。有关本书的设计和基本观点概由著者负责，而对本书的任何褒奖必须与H. 罗宾斯共享之。因为自他参与工作以后，他无私地完成了他负责的课题，同时他的合作确是完成本书出版的决定性因素。

对于许多朋友的赞助表示衷心的感谢。承N.波尔，K. 弗里特里，和O. 纽极鲍安的指教，使本书在哲学方面和历史方面生色不少；E. 克拉美从教师的角度，提出不少建设性的批评；D. 吉尔巴格提供著者首次讲演的记录稿，这便是本书的雏形；E. 柯朗，N. 台维斯，C. 泼利马，A. 霍纳，H. 敏士，W. 华沙等协助累次传抄手稿，且建议改善若干细节；D. 弗朗特提供许多宝贵的意见，且对原稿作细心的校对；J. 克纳特生，H.V. 格姆朋宝，I. 兰脱，和O. 纽极鲍安完成全部制图；H. 华脱奈负责收集附录中的习题。本书以多次教程和讲义为基础扩充而成，曾得到洛克菲勒教育基金委员会的大力资助。对于华佛莱出版社，特别是G.C. 奥尔先生的极其完善的工作，以及对于牛津大学出版社，特别是P. 沃特林先生和W. 奥曼先生的赞助和协作，一并致以谢忱。

R! 柯朗

1941年8月22日

第二、第三及第四版序

在过去数年中，大量事实表明，对数学的知识和训练，需要日益迫切。今天，学生和教师如果不试图从数学的形式主义和单纯演算中跳越出来，以掌握数学的实质，那末挫折和迷惑的危机将显得更为严重。本书就是为这些学生和教师写的，而第一版的读者反应鼓励着著者，本书在这方面是有益的。

由于许多读者的指教，本书的新版中已作了不少的修正与改进。第四版的完成得到N. 阿丁女士的大力支持，谨致谢意。

R. 柯朗

1943年3月18日

1945年10月10日

1947年10月28日

本书用法

本书是按照系统顺序编写的，但这并不意味着读者必须逐页逐章地顺序阅读下去。例如，历史性和哲理性的引言，可推迟到本书其余部分都读完之后，再转回来阅读。各章之间在很大程度上是互相独立的。每章开头一节往往比较容易理解。然后按照循序渐进的原则，内容逐步加深，一直到各章之末尾和补充为止。所以，对于只求一般概念的了解而不追求精深知识的读者来说，他可以满足于选读某些材料，而略去详细探讨的内容。

数学基础稍弱的学生，在使用本书时必须有所抉择。凡冠有星号或小字刊印的部分，表示初读时可以略去，不致影响对后续部分的理解。又如读者只专注于研究本书中他最感兴趣的那些章节，也无不可。书中大部分习题都不是常规性的，其中较难的还冠以星号。读者如果一下子解不出这许多习题的话，可不必足怪。

高中教师在指导高材生或指导课外活动小组时，从几何作图和极大极小等章中，可获得许多有益的材料。

本书可供大学一年级学生和高年级学生阅读，同时对科学有浓厚兴趣的专业工作者也有所裨益。本书也可充作大学选修课中有关数学基本观念的一种教程。第三、四、五章可以用作几何学的教材，而第六、八两章合在一起，便自成微积分的系统，它强调对本质的理解，与常规的教程迥异。如果教师因特殊原因，需要丰富讲课的内容和充实有趣的例子的话，那末本书可视为一本

较好的入门书。书中遍布大量习题，书末附有总习题，可供课堂中练习之用。

著者希望学者对于书中某些分析以及某些基本讨论发生兴趣，深入加以探讨，因为它们可能是数学开拓发展的胚芽。

著 者

目 录

数学是什么	(1)
第一章 自然数	(6)
引言	(6)
§ 1. 整数计算	(7)
1. 算术定律	(7)
2. 整数的表示法	(10)
3. 非十进制系中的计算	(13)
* § 2. 数系的无限性. 数学归纳法	(15)
1. 数学归纳法的原理	(15)
2. 算术级数	(18)
3. 几何级数	(19)
4. 前 n 个数的平方之和	(20)
* 5. 重要的不等式	(21)
* 6. 二项式定理	(22)
* 7. 数学归纳法的补充备注	(25)
补充 数论	(27)
引言	(27)
§ 1. 素数	(28)
1. 基本事实	(28)
2. 素数的分布	(32)
a. 产生素数的公式	(32)
b. 在算术级数中的素数	(33)
c. 素数定理	(34)

d. 有关素数的两个未解决的问题	(37)
§ 2. 同余	(39)
1. 一般概念	(39)
2. 费马定理	(44)
3. 二次剩余	(46)
§ 3. 毕达哥拉斯数和费马大定理	(48)
§ 4. 欧几里得辗转相除法	(51)
1. 一般理论	(51)
2. 算术基本定理的应用	(55)
3. 欧拉的 φ 函数, 再论费马定理	(56)
4. 连分式, 丢番图方程	(58)
第二章 数学的数系	(61)
引言	(61)
§ 1. 有理数	(61)
1. 用作测量手段的有理数	(61)
2. 有理数的内在需要, 扩充原理	(64)
3. 有理数的几何解释	(66)
§ 2. 不可通约线段, 无理数, 极限概念	(67)
1. 引言	(67)
2. 十进制小数, 无尽小数	(70)
3. 极限, 无穷几何级数	(73)
4. 有理数和循环小数	(77)
5. 以区间套作无理数的一般定义	(78)
6. 定义无理数的另一种方法, 戴德金分割	(81)
§ 3. 解析几何摘要	(83)
1. 基本原理	(83)
2. 直线和曲线的方程	(85)
§ 4. 无限的数学分析	(87)
1. 基本概念	(87)
2. 有理数的可数性和连续统的不可数性	(89)
3. 康托尔的“基数”	(94)

4. 反证法	(96)
5. 无限的悖论	(97)
6. 数学的基础	(98)
§ 5. 复数	(99)
1. 复数的由来	(99)
2. 复数的几何解释	(102)
3. 德·莫弗公式和一的根	(108)
*4. 代数的基本定理	(111)
* § 6. 代数数和超越数	(114)
1. 定义和存在性	(114)
**2. 刘维尔定理及超越数的构造	(115)
补充 集的代数	(119)
1. 一般理论	(119)
2. 应用于数理逻辑	(123)
3. 应用于概率论	(125)
第三章 几何作图法。数域的代数	(129)
引言	(129)
第一部分 不可能性的证明和代数	(132)
§ 1. 基本的几何作图题	(132)
1. 有理代数运算和开平方根的作图法	(132)
2. 正多边形	(134)
*3. 阿波罗尼斯问题	(137)
* § 2. 可构成的数和数域	(139)
1. 一般理论	(139)
2. 所有可构成的数是代数数	(146)
* § 3. 希腊三大问题的不可解性	(147)
1. 倍立方	(147)
2. 关于三次方程的定理	(149)
3. 三等分角	(150)
4. 正七边形	(152)

5. 化圆为方问题备考	(153)
第二部分 各种不同的作图法	(154)
§ 4. 几何变换. 反演	(154)
1. 一般性论述	(154)
2. 反演的性质	(156)
3. 反演点的几何作图	(158)
4. 仅用圆规如何平分线段和求圆的中心	(159)
§ 5. 用其他工具作图法. 马斯歇洛尼单用圆规作图法	(160)
*1. 倍立方的经典作图法	(160)
2. 单用圆规的限制	(161)
3. 用机械工具作图. 机械的曲线. 旋轮线	(166)
*4. 连杆器. 卜塞莱与哈脱的反演器	(169)
§ 6. 再论反演及其应用	(172)
1. 角的不变性. 圆族	(172)
2. 对阿波罗尼斯问题的应用	(174)
*3. 重复反射	(176)
第四章 射影几何. 公理系统. 非欧几何学	(179)
§ 1. 引言	(179)
1. 几何性质的分类. 变换下的不变性	(179)
2. 射影变换	(181)
§ 2. 基本概念	(182)
1. 射影变换的群	(182)
2. 笛萨格定理	(184)
§ 3. 交比	(186)
1. 定义和不变性的证明	(186)
2. 应用于完全四边形	(194)
§ 4. 平行性与无穷远	(195)
1. 作为“理想点”的无穷远点	(195)
2. 理想元素和射影	(198)
3. 包含无穷远元素的交比	(200)

§ 5. 应用	(201)
1. 前言	(201)
2. 平面上的笛萨格定理的证明	(203)
3. 帕斯卡定理	(204)
4. 布列昂匈定理	(205)
5. 关于对偶性的附注	(207)
§ 6. 解析表达式	(208)
1. 绪言	(208)
*2. 齐次坐标. 对偶性的代数基础	(209)
§ 7. 有关单用直尺作图的问题	(213)
§ 8. 二次曲线和二次曲面	(215)
1. 二次曲线的初等度量几何	(215)
2. 圆锥曲线的射影性质	(218)
3. 作为线素曲线的二次曲线	(222)
4. 帕斯卡和布列昂匈关于二次曲线的一般定理	(225)
5. 双曲面	(228)
§ 9. 公理系统和非欧几何学	(230)
1. 公理法	(230)
2. 双曲型非欧几何学	(234)
3. 几何与现实	(239)
4. 庞加莱模型	(240)
5. 椭圆几何或黎曼几何	(241)
补充 *高于三维的几何	(243)
1. 引言	(243)
2. 分析的方法	(244)
*3. 几何的或组合的方法	(246)
第五章 拓扑学	(251)
引言	(251)
§ 1. 多面体的欧拉公式	(252)
§ 2. 图形的拓扑性质	(257)
1. 拓扑性质	(257)

2. 连通性	(259)
§ 3. 拓扑定理的其他例子	(261)
1. 约当曲线定理	(261)
2. 四色问题	(262)
*3. 维数概念	(264)
*4. 不动点定理	(269)
5. 纽结	(273)
§ 4. 曲面的拓扑分类	(274)
1. 曲面的亏格	(274)
*2. 曲面的欧拉特征数	(276)
3. 单侧曲面	(277)
补充	(281)
*1. 五色定理	(281)
2. 关于多边形的约当曲线定理	(284)
**3. 代数基本定理	(286)
第六章 函数与极限	(289)
引言	(289)
§ 1. 变量与函数	(290)
1. 定义和例	(290)
2. 角的弧度度量法	(294)
3. 函数的图形. 反函数	(295)
4. 复合函数	(299)
5. 连续性	(301)
*6. 多变量函数	(303)
*7. 函数与变换	(306)
§ 2. 极限	(307)
1. 序列 a_n 的极限	(307)
2. 单调序列	(312)
3. 欧拉数 e	(315)
4. 数 π	(318)

*5. 连分式	(319)
§ 3. 连续趋近的极限	(322)
1. 引言, 一般性定义	(322)
2. 极限概念的注记	(324)
3. $\frac{\sin x}{x}$ 的极限	(327)
4. 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限	(329)
§ 4. 连续性的精确定义	(330)
§ 5. 连续函数的两个基本定理	(333)
1. 波尔察诺定理	(333)
*2. 波尔察诺定理的证明	(333)
3. 关于极值的维尔斯特拉斯定理	(335)
*4. 关于序列的定理, 紧集	(336)
§ 6. 波尔察诺定理的若干应用	(338)
1. 几何应用	(338)
*2. 对一个力学问题的应用	(341)
补充 关于极限与连续性的若干例	(343)
§ 1. 极限的例	(343)
1. 总论	(343)
2. q^n 的极限	(344)
3. $\sqrt[n]{p}$ 的极限	(345)
4. 作为连续函数的极限的不连续函数	(347)
*5. 极限的迭代求法	(348)
§ 2. 连续性的例	(350)
第七章 极大和极小	(351)
引言	(351)
§ 1. 初等几何的问题	(352)
1. 给定两边长度的三角形的最大面积	(352)
2. 海仑定理, 光线的极值性质	(352)
3. 关于三角形的应用问题	(354)

4. 椭圆和双曲线的切线性质, 相应的极值性质	(356)
*5. 到已知曲线的极值距离	(359)
* § 2. 极值问题的一般原理	(361)
1. 原理	(361)
2. 例	(363)
§ 3. 平稳点与微分学	(364)
1. 极值和平稳点	(364)
2. 多变量函数的极大和极小, 鞍点	(366)
3. 极小化极大点和拓扑	(368)
4. 点到曲面的距离	(368)
§ 4. 许瓦尔兹三角形问题	(369)
1. 许瓦尔兹的证明	(369)
2. 另一种证明	(372)
3. 钝角三角形	(374)
4. 光线形成的三角形	(375)
*5. 关于反射和遍历性问题的注记	(377)
§ 5. 史坦纳问题	(378)
1. 问题和解	(378)
2. 两种可能性的分析	(380)
3. 补充问题	(382)
4. 注记与练习	(383)
5. 推广到道路网问题	(383)
§ 6. 极值和不等式	(385)
1. 两正量的算术平均与几何平均	(386)
2. 推广到 n 个变量	(388)
3. 最小二乘方的方法	(389)
§ 7. 极值的存在性. 狄利克雷原理	(391)
1. 一般的注记	(391)
2. 例	(393)
3. 初等极值问题	(395)
4. 复杂问题的艰难	(396)
§ 8. 等周问题	(397)