

经济管理类专业教学参考书

管 理 数 学

下 册

顾士俊 编

经济管理类专业教学参考书

管 理 数 学

下 册

顾士俊 编

目 录

第十章 计划协调技术和关键路径法

§ 10—1 概况 ———— (1)

§ 10—2 计划协调技术工作流程图的组成及其
画法 ———— (3)

§ 10—3 P E R T网络图的参数估计及其求法 (10)

习题

第十一章 动态规划

§ 11—1 多阶段决策问题 ———— (37)

§ 11—2 动态规划及其最优化原理 ———— (43)

§ 11—3 阶段离散、状态离散确定型多阶段决
策问题 ———— (46)

§ 11—4 阶段离散、状态连续确定型多阶段决
策问题 ———— (55)

§ 11—5 随机型多阶段决策问题 ———— (61)

习题

第十二章 马尔柯夫链

§ 12—1 随机过程与马尔柯夫链 ———— (74)

§ 12—2 转移概率矩阵、平衡状态与极限概率 (77)

§ 12—3 吸收的马尔柯夫链 ———— (92)

§ 12—4 有利润的马尔柯夫链 ———— (103)

§ 12—5 马尔柯夫链的应用 ———— (108)

习题

第十三章 预测方法

- § 13—1 时间序列预测方法 ———— (127)
- § 13—2 一元线性回归与最小二乘法 ———— (134)
- § 13—3 多元线性回归 ———— (152)
- § 13—4 非线性回归 ———— (162)

习题

第十四章 决策技术

- § 14—1 概述 ———— (175)
- § 14—2 非确定性决策 ———— (178)
- § 14—3 风险性决策 ———— (185)
- § 14—4 有限决策问题的描述 ———— (198)
- § 14—5 多目标决策问题 ———— (202)

习题

第十五章 排队论

- § 15—1 概述 ———— (220)
- § 15—2 排队系统中的概率分布 ———— (223)
- § 15—3 单服务台排队情况 ———— (228)
- § 15—4 多服务台排队情况 ———— (234)

习题

第十六章 对策论

- § 16—1 基本概念 ———— (247)
- § 16—2 两人有限零和对策 ———— (249)
- § 16—3 最小最大原则 ———— (251)
- § 16—4 对策在混合策略下的解 ———— (255)
- § 16—5 混合策略的求解方法 ———— (260)

习题

第十七章 工件排序问题

- § 17—1 概述 ———— (281)
 - § 17—2 单一机床加工M个工件的顺序问题 — (285)
 - § 17—3 两台机床加工M个工件的顺序问题 — (293)
 - § 17—4 N台机床加工M个工件的顺序问题 — (296)
 - § 17—5 petrov方法 ———— (315)
- 习题

第十章 计划协调技术和关键路径法

§ 10—1 概 况

计划协调技术简称 $P \cdot E \cdot R \cdot T$ 。它是 *programme Evaluation and Review Technique* 的缩写。计划协调技术是由美国海军计划评定部门在一九五八年应用于北极星导弹规划的控制而发展起来的。关键路径法简称 $C \cdot P \cdot M$ 。它是 *Critical path method* 的缩写。关键路径法出现于五十年代初期，最初是作为控制建筑计划、工程计划和工厂的维修计划中应用的方法而发展起来的。因此，从发展过程来说 $P \cdot E \cdot R \cdot T$ 与 $C \cdot P \cdot M$ 是彼此独立发展起来的统筹方法。

这两种方法的共同点都是用网络（或叫统筹图）及找出关键路径来表示一个系统或某项计划的方法，因此，网络是某项整个计划的模型。

$P \cdot E \cdot R \cdot T$ 与 $C \cdot P \cdot M$ 二者的主要区别在于： $P \cdot E \cdot R \cdot T$ 多半用于研究计划、发展规划、新产品计划等。在这些计划中遇到许多非肯定性问题，例如工序（活动）所需的时间，不能精确确定，只能基于概率估计。 $C \cdot P \cdot M$ 多半应用于各项（工序）任务能相当精确地估计时间及费用的计划中。例如房屋的建筑、工厂设备的大修理，有健全定额资料的生产计划等。

近年来， $P \cdot E \cdot R \cdot T$ 有抛弃估计工序（活动）时间的趋势，也考虑到时间与费用的均衡问题。所以，在国外有些文献中将 $P \cdot E \cdot R \cdot T$ 与 $C \cdot P \cdot M$ 统称为 $P \cdot E \cdot R \cdot T$ 系统。

一九六五年我国著名数学家华罗庚教授推广和应用了这类生产计划管理的科学方法——统筹法。后来在国民经济的各个部门（在工业、农业、建筑、交通运输、商业、服务行业、军事、机关工作等等）都得到广泛应用并取得了很好的效果。统筹法是一门用于生产组织安排和计划管理的数学方法。任务中的工序（活动）所需时间以及工序（活动）之间相互关系用网络图来反映出整个全貌，并指出对全局性有影响的关键工序（活动）和关键路径。因此能对工程或任务的所有各个工序作出比较切实合理的统筹安排。并能协调整个计划的各道工序，合理安排人力、物力，加速计划的完成。这两种方法只要坚持应用下去，一定能使整个生产管理更科学化和合理化，取得显著的效果。

例如，一台机床要大修，大修任务由许多工序组成，如拆卸、清洗、检查、另件修理、另件加工、电器检修和安装、床身与工作台的研合、部件组装、变速箱组装、最后总装和试车等等。很清楚，这是一个机床大修的技术工作，但是，它同时也是一个大修工作的计划组织工作。在同样的技术条件下，工序的计划组织合理与否，不断直接影响大修的质量，而且还要影响它的速度与费用等指标。

又如高能加速器这样一项复杂的大工程，从设计，试制，国内外加工订货、制造设备、建筑施工、安装、调试等等各种各样的任务有成百上千，而每一项任务又有几百几千的工序，参加这项工程的单位和人员可牵涉到各个生产部门

和各行业的人员。这么庞大数目的工序，这么众多的单位和人员参加，为保证工程按质、按量完成，除了有一个十分重要的科学技术性工作外，还必须有一个十分重要的计划组织管理工作，统筹安排好各项任务、项目、工序、设备、人员等等工作。

§ 10—2 计划协调技术工序流程图

的组成及其画法

一、什么叫 $P \cdot E \cdot R \cdot T$ 网络图？

计划协调技术的基础是应用网络图。一项工程，一个生产任务，一项工作等等总是由许多工序（活动）组成的。如果用—个箭头表示一个工序，多道工序就有多条箭头，再把各条箭头按照工序间的工艺性和组织性的相互制约关系联系起来，依流程方向，从左向右排列并画成图，这就是 $P \cdot E \cdot R \cdot T$ 网络图（或称工序流程图）。

例如，有一项工程由11道工序组成：它们的名称为 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 、 G 、 H 、 I 、 J 、 K 。

它们之间的生产先后关系和顺序关系是：

A 完工后， B 、 C 、 G 均可以同时开工，

B 完工后， E 、 D 均可以同时开工，

C 、 D 完工后， H 可以开工，

F 、 E 完工后， I 才可以开工，

G 、 H 完工后， F 、 J 才可以开工，

I 、 J 完工后， K 才可以开工。

把这些先后顺序、相互关系，按流程方向，从左向右排

列起来，并作成图10—1所示。并在图中相邻工序的交接处

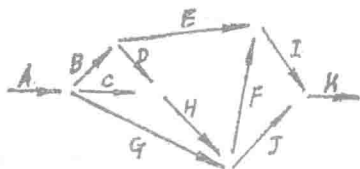


图10—1

画个圆圈，每个圆圈编上顺序号表示工序的事件(事项)，箭条连同它事件表示每道工序，箭尾表示工序的开始，箭头表示工序的完成，再将每道工序上所需时间标在箭条上，这样就构成了一个完整的 $P \cdot E \cdot R \cdot T$ 网络图，如图10—2所示。

二、 $P \cdot E \cdot R \cdot T$ 网络图的组成

$P \cdot E \cdot R \cdot T$ 网络图是由工序、事件和路三部分组成。

1、工序：工序是指一项有具体活动内容，需要人力，物力参加，经过一定时间才能完成的生产过程或活动过程。例如机床的拆卸、清洗、检查……等等。有些活动或过程，虽不消耗原料、设备，但需要一定时间才能完成，例如水泥浇灌后需要养生，技术性的工休等等也应看作工序。此外，还有一种虚工序，是虚设的工序，它不消耗各种资源，也不需要时间。仅表明一个工序与另一个工序之间的相互依存和相互制约关系，是逻辑性的联系，一般用虚箭条表示。

2、事件：事件(事项)是指工序的开工和完工事件。一项工程或一个任务，一般说来，只有一个总的开工事件和总的完工事件。每一个工序只能有两个事件来连接，并表明

工序的开工和完工。除总开工和总完工事件外，其他事件既表示开工，又表示完工，即一个事件对它的前工序来说是完工事件，对它的后接工序来说，又是开工事件。

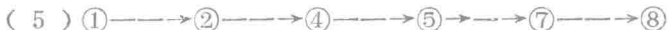


上图中的事件①对于工序 A 来说, 是完工事件, 对于工序 B 来说是开工事件, 通常用 $\textcircled{1} \xrightarrow{A} \textcircled{2}$ 表示一个确定的工序。

如①——→②表示工序 A, ②——→③表示工序 B

3、路：路在 $P \cdot E \cdot R \cdot T$ 网络图中，一般是指从起点开始顺着箭头所指的方向，连续不断地到达终点为止的一条路。

例如图10—2中，从起点①连续不断到达终点⑧的所有各条路是：



路有路长，路长是从始点到终点路的长度。上面七条路的长度是每条路上各工序长度之和。分别为：

(1) $4 + 3 + 5 + 5 + 5 = 22$

$$(2) \quad -4 + 3 + 6 + 3 + 5 + 5 + 5 = 31$$

$$(3) \quad 4 + 3 + 6 + 3 + 9 + 5 = 30$$

$$(4) \quad 4 + 2 + 3 + 5 + 5 + 5 = 24$$

$$(5) \quad 4 + 2 + 3 + 9 + 5 = 23$$

$$(6) \quad 4 + 5 + 5 + 5 + 5 = 24$$

$$(7) \quad 4 + 5 + 9 + 5 = 23$$

在七条路中，有一条关键路线，即路长最长的一条，也就是需要工时最长的一条路线。关键路径（线）或主要矛盾路线，在图中一般用粗线表示，以示区别。关键路径上的各道工序均称为关键工序。路最长的一条，之所以称为关键路线，是因为它的完成时刻决定着整个工程或任务的总完工时期，这个路线上的各道工序完工时间提前或推迟，都直接影响着整个工程或任务的总完工日期的提前或推迟，所以它是整个工程的关键所在。

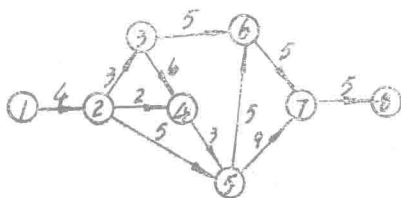


图10—2

在图10—2中，关键路线是①——→②——→③——→④——→⑤——→⑥——→⑦——→⑧，这条路线表明整个工程的总完工日期是31周。这条路线上的关键工序分别是：①——→②、②——→③，③——→④，④——→⑤⑤——→⑥，⑥——→⑦，⑦——→⑧。在这些工序中，只要其中有一道工序能提前一周完工。整个工期就可以提前一周完工。反之，若其中有一道工序延误了一周，那么整个工

期也要推迟一周才能完工。而非关键路线上的工序没有这种直接影响的关系。如工序②→⑤可以在工序①→②开工后4周接着开工，也可推迟到11周后再开工，也不影响整个工程的总完工期。一般来说，非关键工序时间总是有机动性的。

如果整个工程或任务组织计划安排得好，可能出现多个关键路线。关键路线有时是可以变化的。当关键工序完成得很好时，处于非关键路线上的次关键工序也可能突出出来，变为关键性的工序，这时应对网络图作出相应的调整。

三、P·E·R·T网络图的画法

网络图是计划协调技术的基础，要正确地画好它，才能正确地应用它。一个好的工序网络图是能正确地反映出整个工程或任务的各道工序，以及工序与工序之间的相互联系和制约关系。

一般地，建立一个网络图可归纳为如下几步：

- 1、工程或任务的分解和分析；
- 2、制定工序明细表；
- 3、确定或估计各个工序所需时间；
- 4、画图；
- 5、编号。

(1) 工程或任务的分解和分析。主要是把整个工程或任务分解为若干道工序，分析并确定各个工序间的工艺和组织性的相互联系和制约关系，进而确定工序间的先后顺序，即先行工序和后连工序，列出各道工序的名称。

一个工程项目，一个系统或一个任务，依需要可分解成若干道工序。对于领导机关，可分解得粗些。对于具体的生产工段来说，要分解得详细些。有时，对于一个整体工程，常绘制成三套网络图，即总图、分图和生产工序流程图。总

图供领导机关掌握，它主要反映工程主要组织部门间的组织性联系，是组织协调性的。

分图是各个独立组成单位的工序流程图，如厂图、车间图等等。生产工序流程图，它是具体生产性的工序流程图，所以最具体，最详细，如某一车间的生产线，某一设备的维修网络图等等。如果一个网络图比较庞大，可分解成若干个分图，分图之间的先后顺序时间要衔接好。

（2）制定工序明细表。

在工程项目或任务经过充分地研究、分析、修改和分解后，确定了全部工序，可以将工序的名称，工序的代号和工序间的前后关系绘制成一张明细表。

例如一台镗床大修任务，经分解和分析，它有如下一些工序、工序的名称及工序间的相互联系。根据这些资料制成表10—1形式的工序明细表。

表10—1 一台镗床大修的工序明细表

工序代号	工序名称或内容	紧前工序代号	估计工序时间
A	拆 卸		2
B	清 洗	A	2
C	电器检修和安装	A	2
D	检 查	C	3
E	另件修理	D	3
F	另件加工	D	8
G	床身与工作台研合	E	5
H	部件组装	G	4
I	变速箱组装	F	2
J	装配和试车	B、H、I	4

(3) 确定或估计各工序所需时间。工序时间是完成该道工序的工时定额。将确定的时间填入工序明细表中。

(4) 画图。可以直接根据明细表绘制网络图。画法是：从第一道工序开项，以一支箭条表示一道工序，依工序的先后顺序，一支箭条，一支箭条地由左向右接着画下去，直画到最后一道工序为止。箭条与箭条的连接处是带编号的圆圈。再在第一道工序的箭尾处和最后一道工序的箭头处画大圆圈，再将每道工序所需的工时定额填在相应的箭条上，这样就得到一张工序流程图。(假设工序已编好号)

镗床大修任务的工序流程图如图10—3所示。

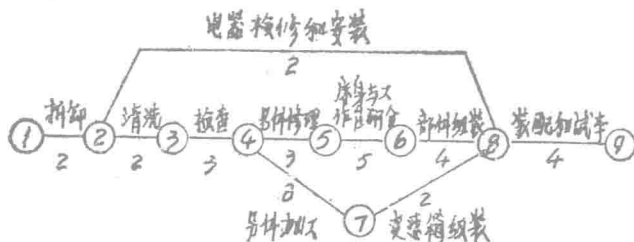


图10—3

(5) 编号。一个事件有一个顺序号，不应重复。一道工序的两个相关事件用 $(i) \rightarrow (j)$ 表示， $i < j$ 。

编号从第一道工序的始点开始，由小到大，最后一道工序的终点顺序号最大。为了避免遗漏和重复，编号可按下列规则进行。

(a) 始点编为1号，表示整个计划的开始。若同时有几个始点，可顺序编号

(b) 始点编好后，不妨假设从始点发出的所有箭条都

去掉，这样又得一个或几个没有箭条进入的事件，再依次逐一编上号（号码不能与前一次重复）。号编好后，再假定从这几个已编上号的事件中，去掉所有的箭条，这样又得一批新的没有箭条进入的事件。

（c）重复（b）步骤，直至最后一个事件（表示整个计划结束的点）即终点为止。

§ 10—3、P·E·R·T网络图

的参数估计及其求法

一、工序时间的三点估计法。

所谓工序时间就是完成某一道工序所需的工时定额。在计划协调技术（P·E·R·T）中，每道工序所需时间是不确定的，因此在确定每道工序时间时，要深入实际进行研讨讨论，使工时定额既反映生产技术上的实际可能性，又要反映出先进的水平，能起到调动积极性的作用。

在计划协调技术中，由于工序时间不能确切地肯定下来，只能给出一些估计时间。一般给出每道工序三个时间数值进行概率加权估计。这三个时间数值可来源于三个人的不同判断，也可以由一个人对三种情况进行不同的判断。

a ：表示最乐观时间，即最少的时间估计。是指完成某道工序在极为顺利的情况下，所需花费的最少时间。

c ：表示最保守时间，即最长的时间估计。是指完成某道工序在极不顺利的情况下，可能花费的最长时间。

m ：表示最可能时间，即经常发生的时间。是指在完成某道工序时，最有可能经常发生的所需时间。

在给出三个时间估计后，再进行加权平均。假定需要 m 时间的可能性两倍于所需 a 时间的可能性，应用加权平均方法：即在 (a, m) 时间加权后取其平均值 $\frac{a+2m}{3}$ 。同样假定时间 m 的可能性两倍于时间 b 的可能性，在 (b, m) 时间中加权后取其平均值 $\frac{b+2m}{3}$ 。

因此，该工序的时间分布可用 $\frac{a+2m}{3}$ 和 $\frac{b+2m}{3}$ 各以 $\frac{1}{2}$ 的可能性出现的分布来代表该工序的期望时间 t_e 。 t_e 可用下式求得。

$$t_e = \frac{1}{2} \left(\frac{a+2m}{3} + \frac{b+2m}{3} \right) = \frac{a+4m+b}{6}。$$

在什么情况下 $t_e = m$ ？

$$\text{若} \quad \frac{1}{6} (a+4m+b) = m$$

$$\text{则} \quad m = (a+b)/2$$

即 m 应在 a 及 b 的中间点，也就是在 a 和 b 时间间隔中取一个与二者相等的点为估计时间点时， t_e 与 m 才相等。这种根据三个时间数值估计工序时间平均值的方法称为工序时间的三点估计法。

对应的方差 δ^2 为

$$\delta^2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a+4m+b}{6} - \frac{a+2m}{3} \right)^2 + \left(\frac{a+4m+b}{6} - \frac{b+2m}{3} \right)^2 \right]$$

经化简得：

$$\delta^2 = \left(\frac{b-a}{6} \right)^2, \text{ 即标准差 } \delta = (a-b)/6$$

因此, 每道工序所需时间可看成以 $t_e = \frac{a+4m+b}{6}$ 为均值,

以 δ 为标准偏差的分布。

二、F · E · R · T 网络图参数

(一)、最早可能开工日期

所谓最早开工日期, 就是指某一工序必须等它紧前的工序完工以后, 才能开工, 否则就不具备开工的条件。这个开工时刻就叫做工序的最早可能开工日期, 或简称最早开工期, 用 $T_E(i, j)$ 表示。

最早开工期的计算是从始点的事件开始, 自左向右逐项向前计算, 直至最后一个事件(终点事件)为止。从始点①(开工日期算起)到该工序出发的事件 i , 可能有各种不同的路径, 将每个路径上的所有工序的时间相加, 从中取最大值, 即

$$T_E(i, j) = \max [P_E(\theta, i) + t_e(\theta, i)]$$

式中: $j > i > \theta$, $\theta = 1, 2, \dots, m-1$, (m 表示完工各点的最大序号)

(二)、最迟必须开工日期

所谓最迟必须开工日期, 是指一个工序, 紧接其后, 可能有一个或几个工序, 为不影响紧后工序如期开工, 每一个工序应有一个最迟必须开工的时刻。这个时刻就叫工序最迟必须开工时期, 或简称最迟开工期, 用 $T_L(i, j)$ 表示。

最迟必须开工日期的计算是从终点事件开始, 自右向左逐项工序后退计算, 直至第一个事件①(始点事件)为止。工序的最迟开工期等于它的紧后工序的最迟开工期减去工序