



国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

中 外 物 理 学 精 品 书 系

前 沿 系 列 · 11

物理学中的非线性方程

(第二版)

刘式适 刘式达 著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS



国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

0415
L676.02



郑州大学 *040107779383*

中 外 物 理 学 精 品 书 系

前 沿 系 列 · 11

物理学中的非线性方程

(第二版)

刘式适 刘式达 著



0415
L676.02



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

物理学中的非线性方程/刘式适,刘式达著.—2版.—北京:北京大学出版社, 2012.3

(中外物理学精品书系)

ISBN 978-7-301-20168-8

I. ①物… II. ①刘… ②刘… III. ①物理学-非线性方程 IV. ①O415

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 018128 号

书 名: 物理学中的非线性方程(第二版)

著作责任者: 刘式适 刘式达 著

责任编辑: 王剑飞

标准书号: ISBN 978-7-301-20168-8/O·0864

出版发行: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址: <http://www.pup.cn>

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62765014

出版部 62754962

电子邮箱: zpup@pup.pku.edu.cn

印 刷 者: 北京中科印刷有限公司

经 销 者: 新华书店

730 毫米×980 毫米 16 开本 26 印张 495 千字

2000 年 7 月第 1 版

2012 年 3 月第 2 版 2012 年 3 月第 1 次印刷

定 价: 68.00 元

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究

举报电话:010-62752024 电子邮箱:fd@pup.pku.edu.cn

Nonlinear Equations in Physics

(Second Edition)

Liu Shikuo, Liu Shida

Peking University Press

《中外物理学精品书系》 编 委 会

主 任：王恩哥

副主任：夏建白

编 委：（按姓氏笔画排序，标*号者为执行编委）

王力军	王孝群	王 牧	王鼎盛	石 兢
田光善	冯世平	邢定钰	朱邦芬	朱 星
向 涛	刘 川*	许宁生	许京军	张 酣*
张富春	陈志坚*	林海青	欧阳钟灿	周月梅*
郑春开*	赵光达	聂玉昕	徐仁新*	郭 卫*
资 剑	龚旗煌	崔 田	阎守胜	谢心澄
解士杰	解思深	潘建伟		

秘 书：陈小红

序 言

物理学是研究物质、能量以及它们之间相互作用的科学。她不仅是化学、生命、材料、信息、能源和环境等相关学科的基础,同时还是许多新兴学科和交叉学科的前沿。在科技发展日新月异和国际竞争日趋激烈的今天,物理学不仅囿于基础科学和技术应用研究的范畴,而且在社会发展与人类进步的历史进程中发挥着越来越关键的作用。

我们欣喜地看到,改革开放三十多年来,随着中国政治、经济、教育、文化等领域各项事业的持续稳定发展,我国物理学取得了跨越式的进步,做出了很多为世界瞩目的研究成果。今日的中国物理正在经历一个历史上少有的黄金时代。

在我国物理学科快速发展的背景下,近年来物理学相关书籍也呈现百花齐放的良好态势,在知识传承、学术交流、人才培养等方面发挥着无可替代的作用。从另一方面看,尽管国内各出版社相继推出了一些质量很高的物理教材和图书,但系统总结物理学各门类知识和发展,深入浅出地介绍其与现代科学技术之间的渊源,并针对不同层次的读者提供有价值的教材和研究参考,仍是我国科学传播与出版界面临的一个极富挑战性的课题。

为有力推动我国物理学研究、加快相关学科的建设与发展,特别是展现近年来中国物理学者的研究水平和成果,北京大学出版社在国家出版基金的支持下推出了《中外物理学精品书系》,试图对以上难题进行大胆的尝试和探索。该书系编委会集结了数十位来自内地和香港顶尖高校及科研院所的知名专家学者。他们都是目前该领域十分活跃的专家,确保了整套丛书的权威性和前瞻性。

这套书系内容丰富,涵盖面广,可读性强,其中既有对我国传统物理学发展的梳理和总结,也有对正在蓬勃发展的物理学前沿的全面展示;既引进和介绍了世界物理学研究的发展动态,也面向国际主流领域传播中国物理的优秀专著。可以说,《中外物理学精品书系》力图完整呈现近现代世界和中国物理科

学发展的全貌,是一部目前国内为数不多的兼具学术价值和阅读乐趣的经典物理丛书。

《中外物理学精品书系》另一个突出特点是,在把西方物理的精华要义“请进来”的同时,也将我国近现代物理的优秀成果“送出去”。物理学科在世界范围内的重要性不言而喻,引进和翻译世界物理的经典著作和前沿动态,可以满足当前国内物理教学和科研工作的迫切需求。另一方面,改革开放几十年来,我国的物理学研究取得了长足发展,一大批具有较高学术价值的著作相继问世。这套丛书首次将一些中国物理学者的优秀论著以英文版的形式直接推向国际相关研究的主流领域,使世界对中国物理学的过去和现状有更多的深入了解,不仅充分展示出中国物理研究和积累的“硬实力”,也向世界主动传播我国科技文化领域不断创新的“软实力”,对全面提升中国科学、教育和文化领域的国际形象起到重要的促进作用。

值得一提的是,《中外物理学精品书系》还对中国近现代物理学科的经典著作进行了全面收录。20世纪以来,中国物理界诞生了很多经典作品,但当时大都分散出版,如今很多代表性的作品已经淹没在浩瀚的图书海洋中,读者们对这些论著也都是“只闻其声,未见其真”。该书系的编者们在这方面下了很大工夫,对中国物理学科不同时期、不同分支的经典著作进行了系统的整理和收录。这项工作具有非常重要的学术意义和社会价值,不仅可以很好地保护和传承我国物理学的经典文献,充分发挥其应有的传世育人的作用,更能使广大物理学人和青年学子亲身体会我国物理学研究的发展脉络和优良传统,真正领悟到老一辈科学家严谨求实、追求卓越、博大精深的治学之美。

温家宝总理在2006年中国科学技术大会上指出,“加强基础研究是提升国家创新能力、积累智力资本的重要途径,是我国跻身世界科技强国的必要条件”。中国的发展在于创新,而基础研究正是一切创新的根本和源泉。我相信,这套《中外物理学精品书系》的出版,不仅可以使所有热爱和研究物理学的人们从中获取思维的启迪、智力的挑战和阅读的乐趣,也将进一步推动其他相关基础科学更好更快地发展,为我国今后的科技创新和社会进步做出应有的贡献。

《中外物理学精品书系》编委会 主任

中国科学院院士,北京大学教授

王恩哥

2010年5月于燕园

内 容 简 介

自 20 世纪 60 年代以来,非线性科学取得了飞速的发展,与此相应,物理学中的非线性方程的求解也日趋丰富.本书着重介绍在物理学中广泛遇到的非线性方程(包括非线性常微分方程、非线性偏微分方程、非线性差分方程和函数方程)的求解(解析解)和求解方法.

非线性方程的求解内容丰富,涉及数学的许多领域.本书力求用一种相对简单的方法去说明,让读者把它作为一个应用数学的范畴去了解,以便在物理学的各个分支领域中去应用.

全书共分 10 章.第 1 章普遍地给出物理学中的一些非线性方程.第 2 章从物理学角度去定性分析一些非线性方程,并从中说明一些非线性的概念.第 3 章给出一些经典的非线性常微分方程、差分方程和函数方程的求解.第 4~10 章分别介绍试探函数法(含 Adomian 分解法),摄动法(含幂级数展开法),行波解、双曲函数和 Jacobi 椭圆函数展开法(含守恒律、Lamé 函数和多级行波解),相似变换和自相似解,特殊变换法(含 WTC 方法和 Hirota 方法),散射反演法(含 Darboux 变换)以及 Bäcklund 变换.附录 A,B,C 分别列出了线性常微分方程、自治系统、椭圆积分和椭圆函数的一些必备的知识.附录 D 为各章的问题与思考.

本书包含作者十多年来的研究成果,可作为理工科研究生的教材或参考书,也可供理工科大学教师、高年级学生和科技人员阅读参考.

第二版前言

《物理学中的非线性方程》已出版 10 年,不少研究生和其他读者反映,这本书便于学习且较为实用,内容丰富也容易深入;从这本书的学习中他们熟知了不少非线性方程的求解方法,而且激发了对非线性方程的众多问题的兴趣.

借《中外物理学精品书系》面世之际,本书推出了第二版,一方面修正了第一版中的一些错误,另一方面又补充了近 10 年来这方面新的研究进展.事实上,自第一版出版以来,笔者就感到第一版的不足,而且也收到了读者许多有益的反馈.

本书第二版增加了一些新的内容,如关于 Euler 方程组和 Lorenz 方程组的定性分析,又如 Adomian 分解法、WTC 方法、双曲函数展开法和 Jacobi 椭圆函数展开法等.同时,第二版删除了第一版中个别重复的部分,整体结构仍保持 10 章,但为了便于从物理学问题去认识非线性科学,笔者将第一版中的第 2 章和第 3 章作了对调,并对第 3 章、第 6 章和第 8 章相对修改较多.此外,各章的习题作为“问题与思考”均编入附录 D.

随着我国经济和科技教育事业的蓬勃发展,笔者相信,这本书的第二版必将满足广大读者的需要,也会促进笔者和同行们所从事的教学科研工作的发展.

在本书作为《中外物理学精品书系》中的“物理学前沿系列”的出版之际,笔者在此感谢北京大学及其他高等学校老师和学生的帮助,特别要感谢《中外物理学精品书系》编委会主任王恩哥院士以及执行编委张酣教授和秘书陈小红的热情支持和大力协助.笔者在此也对北京大学出版社的支持和王剑飞编辑的辛勤劳动表示由衷的谢意.

刘式适 刘式达

2011 年 4 月 12 日于北京大学物理学院

第一版前言

随着非线性科学研究的进展,非线性方程(包括非线性常微分方程、非线性偏微分方程、非线性差分方程和函数方程等)的求解成为广大物理学、力学、地球科学、生命科学、应用数学和工程技术科学工作者研究非线性问题所不可缺少的.

本书是我们在北京大学从事非线性课程教学和科研近 20 年的结晶.我们希望研究生和其他读者比较容易地理解和掌握在物理学中广泛遇到的非线性方程的求解,并由此更深入地了解非线性方程和解的主要特征.

本书着重论述用解析的方法求解非线性方程.由于非线性方程无统一的求解方法,况且,它更多地属于应用数学的范畴,因而,我们采用了不同于一般非线性方程专著中的系统,即不从群分析或变换群的方法去论述,而是尽量用易于理解的一种变换方法去说明.而且着重从具体的非线性方程出发论述其求解方法,并从求解中去说明非线性科学中的一些概念和术语.

全书共分 10 章.第 1 章普遍地给出一些物理学中的非线性方程.第 2 章给出经典的一些非线性常微分方程、差分方程和函数方程的求解.第 3 章从物理角度去定性分析一些非线性方程,并从中说明一些非线性的概念.第 4 章到第 10 章分别介绍试探函数法、摄动法(含级数展开法)、行波解(着重介绍椭圆余弦波和孤立波解)、相似变换和自相似解、特殊变换法、散射反演法和 Bäcklund 变换.附录 A, B 和 C 分别列出了线性常微分方程、自治系统、椭圆积分和椭圆函数的一些必备的知识,便于读者查阅.

非线性方程的求解内容十分丰富,并饶有兴味,限于作者的水平,本书难免有许多不妥甚至错误,敬请读者给予批评和指正.

最后,作者衷心感谢高崇寿教授、郝柏林教授、郭柏林教授、周月梅编审和审稿人的热情支持和诚恳帮助,在此向他们表示感谢.

刘式适 刘式达

1999 年 4 月 12 日于北京大学

目 录

第 1 章 物理学中的非线性方程	(1)
§ 1.1 非线性常微分方程	(1)
§ 1.2 非线性偏微分方程	(7)
§ 1.3 非线性差分方程	(14)
§ 1.4 函数方程	(16)
第 2 章 非线性方程的定性分析	(19)
§ 2.1 Logistic 方程	(19)
§ 2.2 Landau 方程	(21)
§ 2.3 Lotka-Volterra 方程	(23)
§ 2.4 无阻尼的单摆运动方程	(25)
§ 2.5 有阻尼的单摆运动方程	(32)
§ 2.6 van der Pol 方程	(34)
§ 2.7 Duffing 方程	(39)
§ 2.8 Euler 方程组	(43)
§ 2.9 Lorenz 方程组	(45)
第 3 章 经典的非线性方程的求解	(48)
§ 3.1 等尺度方程和尺度不变方程	(48)
§ 3.2 经典的一阶非线性方程	(50)
§ 3.3 椭圆方程	(58)
§ 3.4 经典的二阶非线性方程	(80)
§ 3.5 Painleve 方程	(83)
§ 3.6 Euler 方程组	(90)
§ 3.7 差分方程	(93)
§ 3.8 函数方程	(99)
第 4 章 试探函数法	(104)
§ 4.1 幂试探函数	(104)

§ 4.2	三角试探函数	(106)
§ 4.3	指数试探函数	(107)
§ 4.4	微扰法	(118)
§ 4.5	Adomian 分解法	(120)
第 5 章	摄动法	(125)
§ 5.1	正则摄动法	(125)
§ 5.2	多尺度方法	(127)
§ 5.3	PLK(Poincare-Lighthill-Kuo)方法	(132)
§ 5.4	平均值方法	(135)
§ 5.5	KBM(Krylov-Bogoliubov-Mitropolski)方法	(137)
§ 5.6	约化摄动法	(138)
§ 5.7	幂级数展开法	(145)
第 6 章	行波解、双曲函数和 Jacobi 椭圆函数展开法	(153)
§ 6.1	行波解	(153)
§ 6.2	双曲函数展开法	(183)
§ 6.3	Jacobi 椭圆函数展开法	(187)
§ 6.4	守恒律	(202)
§ 6.5	扩展的行波解和 Jacobi 椭圆函数展开法	(208)
§ 6.6	Lamé 函数和多级行波解	(212)
第 7 章	相似变换和自相似解	(222)
§ 7.1	活动奇点和 Painleve 性质	(222)
§ 7.2	相似变换和自相似解	(225)
§ 7.3	Burgers 方程	(228)
§ 7.4	KdV 方程	(230)
§ 7.5	mKdV 方程	(232)
§ 7.6	正弦-Gordon 方程	(233)
§ 7.7	浅水方程组	(234)
第 8 章	特殊变换法	(238)
§ 8.1	特征线方法	(238)
§ 8.2	因变量或自变量变换	(247)
§ 8.3	Cole-Hopf 变换	(263)
§ 8.4	推广的 Cole-Hopf 变换	(265)

§ 8.5	WTC(Weiss-Tabor-Carnevale)方法	(269)
§ 8.6	Hirota 方法	(274)
第 9 章	散射反演法	(279)
§ 9.1	GGKM(Gardner-Greene-Kruskal-Miura)变换	(279)
§ 9.2	Schrödinger 方程势场的孤立子解	(280)
§ 9.3	散射反演法	(283)
§ 9.4	KdV 方程的单孤立子解	(294)
§ 9.5	KdV 方程的双孤立子解	(296)
§ 9.6	Lax 方程	(300)
§ 9.7	AKNS(Ablowitz-Kaup-Newell-Segur)方法	(302)
第 10 章	Bäcklund 变换	(311)
§ 10.1	Bäcklund 变换	(311)
§ 10.2	正弦-Gordon 方程	(315)
§ 10.3	KdV 方程	(320)
§ 10.4	Darboux 变换	(325)
§ 10.5	Boussinesq 方程	(327)
附录 A	线性常微分方程	(335)
附录 B	自治系统	(341)
附录 C	椭圆积分和椭圆函数	(346)
附录 D	问题与思考	(351)
参考文献		(391)

Contents

Chapter 1	Nonlinear equations in physics	(1)
§ 1.1	Nonlinear ordinary differential equations	(1)
§ 1.2	Nonlinear partial differential equations	(7)
§ 1.3	Nonlinear difference equations	(14)
§ 1.4	Functional equations	(16)
Chapter 2	Qualitative analysis of nonlinear equations	(19)
§ 2.1	Logistic equation	(19)
§ 2.2	Landau equation	(21)
§ 2.3	Lotka-Volterra equation	(23)
§ 2.4	Undamped simple pendulum equation of motion	(25)
§ 2.5	Damped simple pendulum equation of motion	(32)
§ 2.6	van der Pol equation	(34)
§ 2.7	Duffing equation	(39)
§ 2.8	Euler equations	(43)
§ 2.9	Lorenz equations	(45)
Chapter 3	Solving classical nonlinear equations	(48)
§ 3.1	Equidimensional equations and scale invariant equations	(48)
§ 3.2	Classical nonlinear equations of first-order	(50)
§ 3.3	Elliptic equations	(58)
§ 3.4	Classical nonlinear equations of second-order	(80)
§ 3.5	Painleve equations	(83)
§ 3.6	Euler equations	(90)
§ 3.7	Difference equations	(93)
§ 3.8	Functional equations	(99)
Chapter 4	Trial function methods	(104)
§ 4.1	Power trial functions	(104)

§ 4.2	Trigonometric trial functions	(106)
§ 4.3	Exponential trial functions	(107)
§ 4.4	Perturbation methods	(118)
§ 4.5	Adomian decomposition methods	(120)
Chapter 5	Perturbation expansion methods	(125)
§ 5.1	Regular perturbation expansion methods	(125)
§ 5.2	Multiple scales methods	(127)
§ 5.3	PLK (Poincare-Lighthill-Kuo) methods	(132)
§ 5.4	Averaging methods	(135)
§ 5.5	KBM (Krylov-Bogoliubov-Mitropolski) methods	(137)
§ 5.6	Reductive perturbation expansion methods	(138)
§ 5.7	Power series expansion methods	(145)
Chapter 6	Travelling wave solutions, hyperbolic function expansion methods and Jacobi elliptic function expansion methods	(153)
§ 6.1	Travelling wave solutions	(153)
§ 6.2	Hyperbolic function expansion methods	(183)
§ 6.3	Jacobi elliptic function expansion methods	(187)
§ 6.4	Conservation laws	(202)
§ 6.5	Extended travelling wave solutions and extended Jacobi elliptic function expansion methods	(208)
§ 6.6	Lamé functions and multi-order travelling wave solutions	(212)
Chapter 7	Similarity transformations and self-similarity solutions	(222)
§ 7.1	Movable singular points and Painleve properties	(222)
§ 7.2	Similarity transformations and self-similarity solutions	(225)
§ 7.3	Burgers equation	(228)
§ 7.4	KdV equation	(230)
§ 7.5	mKdV equation	(232)
§ 7.6	sine-Gordon equation	(233)
§ 7.7	Shallow water equations	(234)
Chapter 8	Special transformation methods	(238)
§ 8.1	Characteristics methods	(238)
§ 8.2	Dependent or independent variables transformations	(247)

§ 8.3	Cole-Hopf transformation	(263)
§ 8.4	Extended Cole-Hopf transformation	(265)
§ 8.5	WTC (Weiss-Tabor-Carnevale) methods	(269)
§ 8.6	Hirota methods	(274)
Chapter 9	Inverse scattering methods	(279)
§ 9.1	GGKM (Gardner-Greene-Kruskal-Muira) transformation	(279)
§ 9.2	Soliton solutions of potentials in Schrödinger equation	(280)
§ 9.3	Inverse scattering methods	(283)
§ 9.4	One-soliton solution of KdV equation	(294)
§ 9.5	Two-soliton solution of KdV equation	(296)
§ 9.6	Lax equations	(300)
§ 9.7	AKNS (Ablowitz-Kaup-Newell-Segur) methods	(302)
Chapter 10	Bäcklund transformations	(311)
§ 10.1	Bäcklund transformations	(311)
§ 10.2	Sine-Gordon equation	(315)
§ 10.3	KdV equation	(320)
§ 10.4	Darboux transformations	(325)
§ 10.5	Boussinesq equation	(327)
Appendix A	Linear ordinary differential equations	(335)
Appendix B	Autonomous systems	(341)
Appendix C	Elliptic integrals and elliptic functions	(346)
Appendix D	Problems and thoughts	(351)
References		(391)

第 1 章 物理学中的非线性方程

在物理学的众多问题中经常会遇到大量的能反映各种因子或各种物理量之间相互制约和相互依存关系的非线性方程,一般可以称为非线性演化方程(nonlinear evolution equations).

通常,物理学中的非线性方程包含非线性常微分方程(对未知函数及其导数都不全是线性的或一次式的常微分方程)、非线性偏微分方程(对未知函数及其偏导数都不全是线性的或一次式的偏微分方程)、非线性差分方程[又称为非线性映射(mapping),它通常是非线性常微分方程或偏微分方程的离散形式,它对未知函数的 n 次迭代值都不全是线性的或一次式的]和函数方程(一个函数自身或多个函数之间满足的一个代数关系式).当然,还有非线性微分-差分方程等.

自 20 世纪 60 年代以来,非线性科学飞跃发展,与此相应,物理学中的非线性方程的内容也日趋丰富.尽管线性方程定解问题的适定性(存在性、唯一性和稳定性)在非线方程中同样存在,但非线性方程的适定性问题要复杂得多,况且非线性方程有许多自身的特点,所以本书的重点放在非线性方程的物理分析、求解和求解方法上.

本章给出在各类非线性方程中人们经常用到的而且大多能求出解析解的一些非线性方程.由于这些方程在物理学的各个分支中都可能遇到,而且叙述和推演不尽相同,因此,对这些方程的物理背景,我们只作一些简单的说明.

§ 1.1 非线性常微分方程

在物理学中广泛遇到的问题是非线性常微分方程,经常提到和用到的有:

1. 经典的一阶非线性方程

这类方程包含 Riccati 方程、Bernoulli 方程、Chrystal 方程、Abel 方程和椭圆方程等.

Riccati 方程的一般形式为

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 + r(x) = 0, \quad (1.1.1)$$