

微积分



列 宁 語 录

物质的抽象，自然规律的抽象，价值的抽象以及其他等等，一句话，一切科学的（正确的、郑重的、非瞎说的）抽象，都更深刻、更正确、更完全地反映着自然。

毛 主 席 語 录

事物矛盾的法则，即对立统一的法则，是自然和社会的根本法则，因而也是思维的根本法则。

理论的基础是实践，又转过来为实践服务。

要把精力集中在培养分析问题和解决问题的能力上，不要只是跟在教员的后边跑，自己没有主动性。

学制要缩短。课程设置要精简。教材要彻底改革，有的首先删繁就简。

5000/2-20

51.6
3111

目 录

微积分大意	(1)
第一章 函数与极限	(10)
第一节 变量与函数	(10)
一、变量	(10)
二、函数	(13)
第二节 函数的几种特性	(29)
一、函数的奇偶性	(29)
二、函数的单调性	(30)
三、函数的周期性	(31)
四、函数的有界性	(32)
第三节 基本初等函数及其图形	(34)
一、常量 $y = c$	(34)
二、幂函数 $y = x^n$	(34)
三、指数函数 $y = a^x$	(36)
四、对数函数 $y = \log_a x$	(38)
五、三角函数	(39)
六、反三角函数	(41)
第四节 复合函数与初等函数	(46)
一、复合函数	(46)
二、初等函数	(47)
第五节 极限	(49)
一、研究函数变化趋势的意义	(49)
二、极限概念	(51)
三、极限的运算法则	(58)
四、两个重要极限	(62)
五、无穷小量与无穷大量	(65)
第六节 函数的连续性	(71)
一、函数的增量	(71)
二、函数的连续性	(78)
第二章 导数与微分	(79)
第一节 导数的概念	(79)
一、导数的实例	(79)
二、导数的概念	(83)
三、导数的几何意义	(85)

第二节 导数的计算方法	(89)
一、导数的基本公式	(89)
二、导数的四则运算	(94)
三、复合函数求导法	(98)
四、隐函数求导法	(102)
五、对数求导法	(105)
第三节 高阶导数	(112)
一、加速度问题	(112)
二、高阶导数	(113)
第四节 导数的应用	(116)
一、研究函数的变化及作图	(116)
二、函数的最大值、最小值问题	(122)
第五节 函数的微分	(130)
一、微分的概念	(130)
二、微分的几何意义	(134)
三、微分的计算	(135)
四、微分的应用	(139)
※第六节 弧微分与曲率	(148)
一、曲率的概念	(148)
二、弧微分公式	(150)
三、曲率的计算	(151)
第三章 积分及其应用	(157)
第一节、定积分概念	(157)
一、实际中定积分问题的举例	(157)
二、定积分概念	(164)
三、定积分的几何意义	(167)
第二节 微积分基本公式	(170)
一、原函数概念	(171)
二、微积分基本公式	(171)
三、对微积分基本公式的进一步分析	(174)
第三节 定积分的性质	(179)
第四节 不定积分	(182)
一、不定积分概念	(182)
二、不定积分的基本公式	(184)
三、不定积分的性质	(185)
第五节 换元积分法	(189)
第六节 分部积分法	(203)
第七节 积分表的使用	(207)

第八节	定积分的计算	(213)
一、	根据微积分基本公式求定积分	(213)
二、	定积分的换元积分法	(214)
三、	定积分的分部积分法	(216)
四、	奇偶函数的定积分计算	(217)
第九节	定积分的近似计算	(221)
一、	数方格法	(221)
二、	矩形法和梯形法	(222)
三、	抛物线法	(223)
第十节	定积分的应用	(226)
一、	平面图形的面积	(227)
二、	旋转体的体积	(231)
※三、	平面曲线的弧长	(235)
四、	功	(237)
※五、	压力	(240)
六、	平均值	(242)
※七、	重心	(246)
第四章	微分方程	(264)
第一节	微分方程的基本概念	(264)
一、	实例	(264)
二、	微分方程的基本概念	(267)
第二节	一阶微分方程	(271)
一、	可分离变量的方程	(271)
二、	一阶线性方程	(274)
第三节	一阶微分方程应用举例	(284)
一、	运动问题的微分方程	(284)
二、	电容器的放电规律	(285)
三、	分析微小变化的方法	(286)
※第四节	二阶常系数线性微分方程	(291)
一、	二阶常系数线性齐次方程的解法	(291)
二、	二阶常系数线性非齐次方程的解法	(297)
※第五节	二阶常系数线性微分方程应用举例	(307)
第五章	多元函数微积分初步	(315)
第一节	空间直角坐标	(315)
一、	空间点的直角坐标	(315)
二、	空间两点间的距离公式	(316)
第二节	空间曲面的方程	(319)
一、	曲面方程的概念	(319)

二、球面方程.....	(320)
三、平面方程.....	(321)
四、常见的曲面方程.....	(321)
第三节 多元函数的概念.....	(324)
一、多元函数的概念.....	(324)
二、二元函数的几何表示.....	(326)
第四节 多元函数的微分.....	(328)
一、多元函数的偏导数.....	(328)
二、偏导数的几何意义.....	(330)
三、二元函数的全微分.....	(331)
第五节 多元函数的积分.....	(335)
一、二重积分的概念.....	(335)
二、二重积分的计算.....	(339)
附录、最小二乘法.....	(346)
数学公式.....	(359)
习题答案.....	(376)

注：凡打※号的内容或习题均为选学

微积分大意

微积分是由于实践中需要研究变量而产生的一种数学方法，在生产和科学技术中有广泛的应用。在开始学习微积分知识的时候，我们按照毛主席关于“分析事物的矛盾”的教导，从劳动人民的生产实践出发，先分析微积分中两个比较典型的问题，目的在于破除“神秘论”，使初学者对微积分所要解决的问题和解决问题的思想方法，有一个初步的概貌的了解。

下面，我们以生产实践中提出的变速运动的速度和曲边三角形的面积这两个典型问题为例，来进行分析。

一、微积分问题的主要矛盾

1. 变速运动的速度

我们知道，对于匀速运动，已知路程求速度的问题，用初等数学的方法就可以解决，即可用公式

$$\text{速度} = \frac{\text{路程}}{\text{时间}}.$$

但是对变速运动，也就是在速度随时间变化的情况下，已知路程随时间变化规律（即已知路程 S 与时间 t 的函数关系），求某时刻运动的瞬时速度，这个问题只用初等数学就无法解决了。

我们以自由落体运动为例，分析这个问题的矛盾。

由物理学知道，自由落体运动是在地球引力下由静止状态开始下落的运动，若忽略空气阻力，则物体下落的路程 S 和时间 t 的函数关系是

$$S = S(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

我们要求它在一定时刻的瞬时速度，解决这个问题能不能用匀速运动的速度公式呢？不能！因为这个速度公式是在速度不变这个条件下成立的，而自由落体运动的速度从日常经验就可以知道，是

越落越快的，也就是速度随时都在变。这里遇到的主要困难是，已有的方法只适用于速度不变的运动，而不能直接用来解决变速运动的问题。因此，要想用已有的关于匀速运动的方法来解决变速运动的问题，就要解决：

速度“变”与“不变”的矛盾。

为了进一步认识这对矛盾，我们再从表示匀速运动与自由落体运动规律的函数 $S = S(t)$ 的图形上加以分析比较。

匀速运动

速度 V 是常数

运动规律 $S = vt$

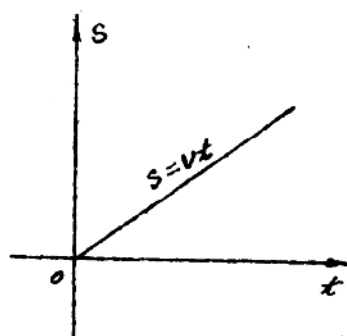
图形是直线

自由落体运动

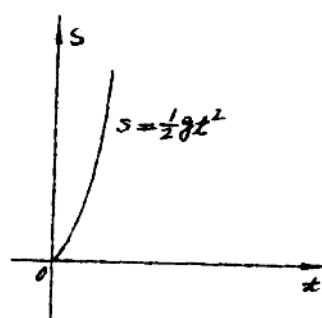
速度随时在变

运动规律 $S = \frac{1}{2}gt^2$

图形是曲线



图一



图二

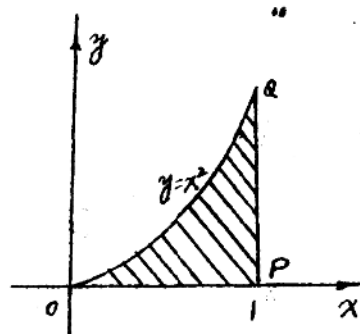
由此可见，对于匀速运动，即速度不变时， $S = S(t)$ 的图形是直线。对于变速运动， $S = S(t)$ 的图形是曲线。一个直，一个曲，这是匀速运动与变速运动的本质区别在函数 $S = S(t)$ 的图形上的表现。可见，要用已有的关于匀速运动的方法解决自由落体运动问题，反映在图形上就相当于要用已有的关于直线的知识来解决曲线问题。因此，研究变速运动问题的主要矛盾，即速度变与不变的矛盾，反映在 $S = S(t)$ 的图形上就表现为：

“曲”与“直”的矛盾。

2、曲边形的面积

在生产实践中，常常要计算由曲线围成的图形的面积。在初等数学中，对于直线所围成的图形，如长方形、平行四边形、三角形等的面积，我们知道计算的方法。但对于不只有直线，而且有曲线为边的一般曲边图形，怎样去求面积呢？

为了便于分析问题的矛盾，我们以抛物线 $y=x^2$ 、直线 $x=1$ 及 x 轴所围成的曲边三角形为例进行讨论，如图三。



图三

我们知道，矩形的面积计算公式是

$$\text{面积} = \text{底} \times \text{高}.$$

在矩形底边上各点处的高度是不变的。

现在讨论的曲边三角形 OPQ ，它的底边上各点处的高度随 x 的不同而变化，因此不能直接用上面的公式来求曲边三角形的面积。这里我们遇到了：

高度“变”与“不变”的矛盾。

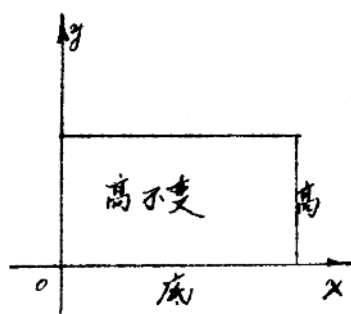
为了进一步认识这对矛盾，我们再从图形上加以分析比较。

矩 形

高度不变

高为常数

边界线的各形是直线



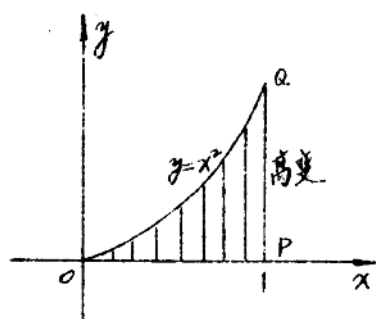
图四

曲边三角形

高度在变化

高为函数 $y=x^2$

边界线的各形一边是曲线



图五

一个的高度是直线，一个的高度是曲线，这就是矩形和曲边三角形的本质区别在函数各形上的表现。因此，利用矩形求面积的力法解决曲边形的面积，反映在各形上就是要用直线的知识解决曲线问题。高度变与不变的矛盾反映在边界线的各形上就是：

“曲”与“直”的矛盾。

以上两个问题是微积分中两个典型的例题，它们代表了两大类相反的问题。在实际问题中，和这两类问题类似的很多，如几何中求曲线的切线，电学中求瞬时电流，化学中求化学反应的速度等都是第一类问题，这类问题通常称为变化率问题或微分问题；再如力学中求变力作功，几何中计算体积等都是第二类问题，这类问题通常称为积分问题。在以后各章中可以见到，这些问题的主要矛盾也是“变”与“不变”或“曲”与“直”的矛盾，微积分方法就是在解决这类矛盾中产生的。

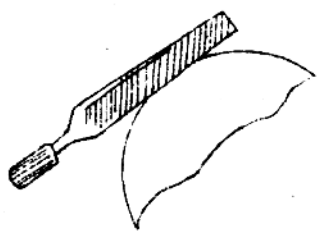
二、实践中解决曲直矛盾的方法

以上用两个典型问题为例，介绍了微积分中的两类问题，以及

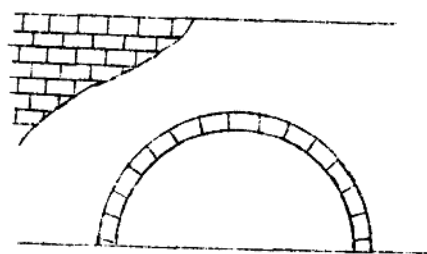
解决这两类问题遇到的主要矛盾——“变与不变”或“曲与直”的矛盾。怎样解决这个矛盾呢？

毛主席教导我们：“一切真知都是从直接经验发源的”。我们先来看，劳动人民在生产实践中遇到曲直矛盾时，是用什么方法解决的。

钳工师傅用平锉加工圆形或曲线形工件时，用平锉在工件上每锉一下都是直的，但工人师傅一边锉一边转动锉的方向（参六），就能锉出一个圆形工件。这个过程的实质是把整个圆弧看成由很多小段拼成的，在每一小段上，可以近似地用直线代替曲线，简称“以直代曲”。显然，分得越细，近似程度越好，不难想像，当每个小段无限变小时，整个工件就无限趋于圆弧形。



参六



参七

实际中有很多这样的例子。例如，造桥工人用条石砌成圆形桥，从一块条石看是直的，但从整体看却是曲的（参七）。

可见，在实践中，劳动人民巧妙地解决了“曲与直”的矛盾。其基本思想可以总结为：

(1) 整个是曲的东西，在相对于整体是很小的局部，可以近似地用直的代替曲的。

(2) 当局部越小，这种代替就越精确。这就是说，在实践中，“直和曲”这一对矛盾的双方，并不是僵死的，一成不变的，而是在相对于整体很小的局部这一条件下，可以互相转化。正如毛主席指出的：

“矛盾着的双方，依据一定的条件，各向着其相反的方向转化”。“曲和直”在一定条件下互相转化，是微积分方法解决问题的一个基础。就象恩格斯所说：“高等数学的主要基础之一是这样一个矛盾：在一定条件下直线和曲线应当是一回事”。应该特别注意的是，“曲和直”的互相转化是有条件的，对于具体问题要作具体分析。

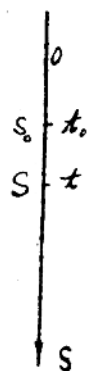
三、微积分的基本思想方法

劳动人民的生产实践，生动地提示了解决微积分问题的基本思想，这就是创造条件，促成“变与不变”或“曲与直”的互相转化。下面我们以前面提到的两个典型问题为例来说明。

1. 自由落体运动规律 $S = \frac{1}{2}gt^2$ 在某一时刻 t_0 的瞬时速度。

分析：如前边已经分析的，解决这个问题的主要矛盾是速度“变与不变”或函数 $S = S(t)$ 形状的“曲与直”。和钳工师傅锉圆形工件一样，总体上是曲的东西，在很小的局部可以近似地“以直代曲”。对 $S = S(t)$ 的图形来说，直线表示匀速运动，曲线表示变速运动，所以，我们想到，在很小一段时间内用匀速运动（直线）近似表示变速运动（曲线）。这是由于，从整个自由落体来看，落体速度变化很大，但在很短一段时间内，速度变化就不大了，可以把自由落体运动近似看作匀速运动。因为局部越小，“以直代曲”就越精确，所以时间间隔越小，匀速近似变速也就越精确。用这种思路就可以计算时刻 t_0 的速度。

第一步：划出微小局部。在时刻 t_0 之外任取一个时刻 t ，使 t 与 t_0 相差极小，即以 t_0 到 t 是极短的一段时间。这两个时刻对应的路程分别为 S_0 与 S ，这一小段时间内下落的路程为 $S - S_0$ （参八）



参八

第二步：以不变代变。由于 t_0 到 t 这段时间很短，落体的速度变化也很小，所以可以把

自由落体运动近似地看作匀速运动，用这段时间内的平均速度 $\bar{v}$ 近似代替落体在时刻 t_0 的速度。应用匀速运动求速度的公式，可得平均速度

$$\bar{v} = \frac{s-s_0}{t-t_0}$$

第三步：精确化。当 t 与 t_0 相差越小时，平均速度 $\bar{v}$ 越能精确地表示时刻 t_0 的瞬时速度。然而，不管 t 与 t_0 相差多么小，平均速度 $\bar{v}$ 总还只是时刻 t_0 瞬时速度的近似值。怎样解决这个矛盾呢？解决的办法就是，规定当 t 无限地接近于 t_0 时平均速度 $\bar{v}$ 的变化趋势。平均速度无限趋近的值，就是自由落体在时刻 t_0 的瞬时速度 v 的精确值。这种方法在下一章将会讲到，就叫取平均速度 $\bar{v}$ 的极限。

这个过程也可简要地归纳为：

先取一小段，“变”按“不变”办；

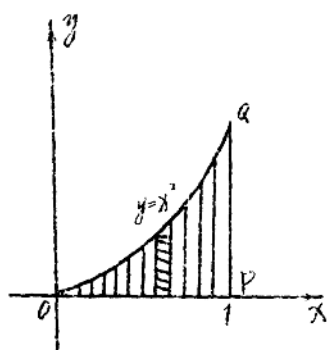
近似到精确，利用取极限。

2. 由抛物线 $y=x^2$ 、直线 $x=1$ 及 x 轴围成的曲边三角形的面积

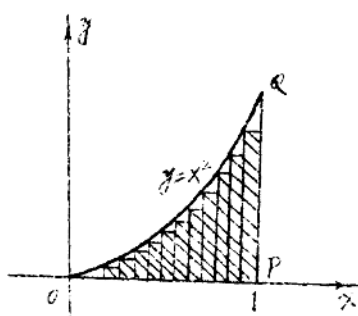
分析：前边已经分析过，解决这个问题的主要矛盾是高度“变与不变”，反映在函数图形上就是“曲与直”。由实践的启示，拿饼的东西在很小的局下，可以近似地“以直代曲”，对曲边三角形 OPQ 来说，从拿饼看来，底边上各点处的高度变化较大，但是当 x 变化很小时，高度的变化也就很小了。因而从局下看来，高度可以近似地看作不变的，即可以用直线代替曲线。为了创造条件，促成“曲与直”互相转化，以便能在很小的一段上用直线代替曲线，我们把底边 OP 分成许多小段，曲边三角形相应地被分成了许多窄曲边形（参九）。在每一小段上作小矩形，在底边很短的情况下，因为高度变化不大，这样的小矩形可以近似地代替对应的那个窄曲边形。把许多小矩形合起来，就得到了一个台阶形（参十）。台阶形面积就是曲边三角形面积的近似值，即

总面积 $\approx$ 各小矩形面积之和。

显然，将底边 OP 分得越细，就是每一小段的长度越短，小曲边形分得越多，台阶形的面积就越接近曲边三角形的面积，但这样的台阶形面积还毕竟是曲边三角形面积的近似值，而不是精确值。怎么求精确值呢？和例1一样，我们考虑分得的份数无限增大，并且每个小矩形底边无限变小时，台阶形面积变化的趋势。从各形上可以看出，当无限细分时，台阶形面积无限接近于曲边三角形的面积。这就是说，台阶形面积无限趋近的值就是曲边三角形面积 A 的精确值。



图九



图十

以上两个问题 重点在于介绍解决问题的基本思路，并没有给出结果，具体的计算在以后各章将详细讨论。

通过以上分析，我们可以看到：

1. 由于生产实践的发展，数学中引入了变量。例如，变速运动中，速度是变的；曲边三角形面积计算中，底上的高是变的。这时，初等数学的方法就不能适应要求了，微积分正是在解决这类“变而不不变”或“曲与直”的矛盾中而出现的数学方法。正如恩格斯所指出的：“数学中的转折点是笛卡尔的变数。有了变数，运动进入了数学，有了变数，并由此进入了数学，有了变数，微分和积分也就成为必要的了，……”。

2. 微积分的基本分析方法，来源于劳动人民的生产实践。主导思想是“分析事物的矛盾”，创造条件，“促成事物的转化”。具体作法可归纳为两步：

(1) 分析微小变化，促使“变与不变”（或“曲与直”）矛盾的转化，求得近似值。

(2) 取近似值的极限，由近似到精确，求得精确值。

因此，微积分的基本分析方法中，贯穿着丰富的辩证法思想，正如恩格斯指出的：“变数的数学——其中最重要的部分是微积分——本质上不外是辩证法在数学方面的运用。”

可是，历来的资产阶级出于压迫、愚弄劳动人民的阶级需要，它把唯心论的先验论，说什么微积分研究的是人类精神的“自由创造物和想像物”，它把微积分是少数天才灵机一动的发现，恩格斯早就有力地驳斥了这种荒谬的论点，指出了“自然界对这一切想像的数学都提供了反型”。“如果一杯水的最上面的一层分子蒸发了，那么水层的厚度就减少了 dx ，这样一层分子又一层分子地继续蒸发，实际上就是一个连续不断的微分。如果热的水蒸汽在一个器口中由于压力和冷却又凝结成水，而且分子一层又一层地累积起来（……），直到器口满了为止，那末这里就真正进行了一种积分，这种积分和数学上的积分不同的地方只在于：一种是由人的头脑有意识地完成的，另一种是由自然界无意识地完成的。”同时还指出：微积分“是由牛顿和莱布尼茨大体上完成的，但不是由他们发明的。”这就有力地捍卫了唯物论的反映论。

3、微积分的基本问题有两类：一类是微分问题，它解决的是局部性质的问题，如变速运动的速度；一类是积分问题，它解决的是整体性质的问题，如曲边三角形的面积。这里主要是先认识一下问题的主要矛盾和解决问题的基本思想方法，具体内容以后各章再分别详细讨论。

第一章 函数与极限

“科学研究的区分，就是根据科学对象所具有的特殊的矛盾性”。

初等数学研究的对象，基本上是不变的量。微积分是以现实世界的变量为其研究对象，因而变量之间相互影响和相互联系，即变量间的函数关系，是我们首先要加以研究的对象。

人们在长期的生产实践中，逐渐地总结出了研究函数以及各种运动过程的数学方法，很自然地产生了微积分。正如恩格斯指出的：“有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了，而它们也就立刻产生”。这个数学方法的基础，就是极限方法。它的实质是：研究函数的变化趋势，从而使我们能够用数学方法不仅反映出量变，而且能够反映出质变的飞跃。

因此，微积分是以函数为研究对象，以极限为基本方法。所以函数与极限就构成了微积分的基础部分。

在本章，我们通过实例引进函数的一般概念，并用函数的有关特性来研究基本初等函数的各性质和性质，在此基础上介绍函数极限概念，连续规律，以及初等函数连续性概念。

第一节 变量与函数

一、变量

1. 常量的变量

我们在进行科学实验或参加生产实践时，经常要接触到各种各样的量，如长度、面积、体积、重量、速度、时间、温度、电压、功率等。虽然这些量都可以用一个数来表示它们的大小，但我们注意到，在研究某一问题的过程中，有些量不起变化，也就是保持一定的数值，另外一些量都有变化，也就是可取各种不同的数值。

例如，人造地球卫星在运行过程中，它离地面的距离是变量；

火車由唐山開往北京的过程中，火車離開唐山的距離是變量，而每節車皮的長度是常量；一根圓軸在加熱过程中，軸的溫度逐漸升高，是變量，軸受熱膨脹，其長度也是變量，而截面周長與直徑之比則是常量 π ；……，等等。

一般說來，在某一过程中，保持一定的數值的量叫做常量（或常數）；可以取各種不同數值的量，叫做變量（或變數）。

應當指出：一個量是常量還是變量，因研究的具體問題和具體过程有關。例如，氣溫變化雖然使機口上的軸熱脹冷縮，但當氣溫變化引起的軸長變化不大時，通常將軸長看作常量，而在較精密的儀口上，軸的長度小的變化也可能影響儀口的精度，這時就應將軸長看成變量，以估計它對精度的影響。這就說明：變是絕對的，不變是相對的。變量和常量不是絕對互斥的，而是可以在一定條件下互相轉化的，總是相對於某一個具體过程，具體條件而言的。所以判斷某一個量是常量還是變量，要根據具體情況作具體分析。

在數學中，常量常用字母 a 、 b 、 c 等表示，變量常用字母 x 、 y 等表示，而用 x_0 、 y_0 表示變量 x 、 y 取的某一個特定值。

2、變量的變化範圍

實際問題中，變量的取值總有一定的範圍。常見的一種情形是，變量可以取得兩個數之間的所有數。例如，我國第一顆人造衛星運行時，衛星與地球距離 S 是變量，在近地點， S 的值为439公里，在遠地點， S 的值为2384公里，在運行过程中， S 的變化範圍為439與2384之間的所有數。這樣的變化範圍叫區間。區間常用下列三種方法表示：

（1）幾何表示法

初學數學中，任何一個實數都可用數軸上的點來表示，那麼區間就可用數軸上的一個線段來表示。例如數 a 對應數軸上 A 點，數 b （設 $b > a$ ）對應數軸上 B 點，如果變量 x 的變化範圍為 a 、 b 之間的所