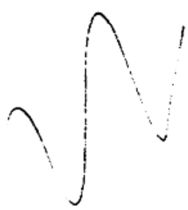
微积分



列　宁　語　录

物质的抽象，自然规律的抽象，价值的抽象以及其他等等，一句话，一切科学的（正确的、郑重的、非瞎说的）抽象，都更深刻、更正确、更完全地反映着自然。

毛　主　席　語　录

事物矛盾的法则，即对立统一的法则，是自然和社会的根本法则，因而也是思维的根本法则。

理论的基础是实践，又转过来为实践服务。

要把精力集中在培养分析问题和解决问题的能力上，不要只是跟在教员的后面跑，自己没有主动性。

学制要缩短。课程设置要精简。教材要彻底改革，有的首先删繁就简。

目　　录

注：凡打*号的内容或习题均为选学

微积分大意

微积分是由于实践中需要研究变量而产生的一种数学方法，在生产和科学技术中有广泛的应用。在开始学习微积分知识的时候，我们按照毛主席关于"分析事物的矛盾"的教导，从劳动人民的生产实践出发，先分析微积分中两个比较典型的问题，目的在于破除"神秘论"，使初学者对微积分所要解决的问题和解决问题的思想方法，有一个初步的概貌的了解。

下面，我们以生产实践中提出的变速运动的速度和曲边梯形的面积这两个典型问题为例，来进行分析。

一、微积分问题的主要矛盾

1、变速运动的速度

我们知道，对于匀速运动，已知路程求速度的问题，用初等数学的方法就可以解决，即可用公式

$$速度=\frac{路程}{时间}.$$

但是对变速运动，也就是在速度随时间变化的情况下，已知路程随时间变化规律(即已知路程 S 与时间 t 的函数关系)，求某时刻运动的瞬时速度，这个问题只用初等数学就无法解决了。

我们以自由落体运动为例，分析这个问题的矛盾。

由物理学知道，自由落体运动是在地球引力下由静止状态开始下落的运动，若忽略空气阻力，则物体下落的路程 S 和时间 t 的函数关系是
$$S=S(t)=\frac{1}{2}gt^2$$

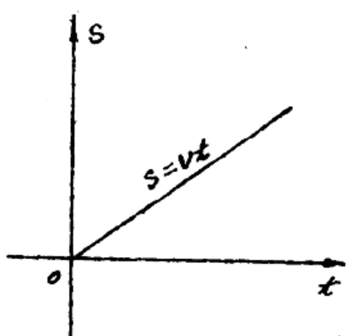
我们要求它在一定时刻的瞬时速度，解决这个问题能不能用匀速运动的速度公式呢？不能！因为这个速度公式是在速度不变这个条件下成立的，而自由落体运动的速度从日常经验就可以知道，是

越落越快的，也就是速度随时都在变。这里遇到的主要困难是，已有的方法只适用于速度不变的运动，而不能直接用来解决变速运动的问题。因此，要想用已有的关于匀速运动的方法来解决变速运动的问题，就要解决：

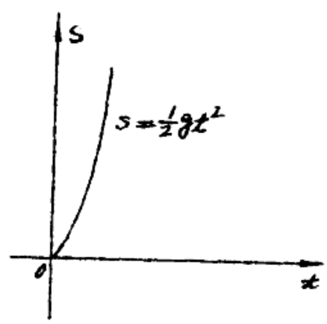
速度“变”与“不变”的矛盾。

为了进一步认识这对矛盾，我们再从表示匀速运动与自由落体运动规律的函数$S=S(t)$的图形上加以分析比较。

匀速运动	自由落体运动
速度V是常数	速度随时在变
运动规律$S=Vt$	运动规律$S=\frac{1}{2}gt^2$
图形是直线	图形是曲线



图一



图二

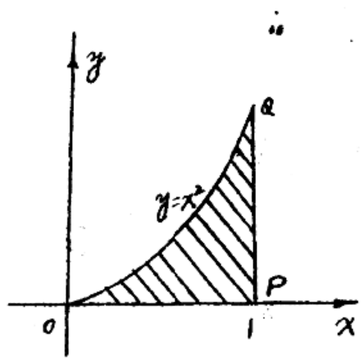
由图可见，对于匀速运动，即速度不变时，$S=S(t)$的图形是直线。对于变速运动，$S=S(t)$的图形是曲线。一个直，一个曲，这是匀速运动与变速运动的本质区别在函数$S=S(t)$的图形上的表现。可见，要用已有的关于匀速运动的方法解决自由落体运动问题，反映在图形上就相当于要用已有的关于直线的知识来解决曲线问题。因此，研究变速运动问题的主要矛盾，即速度变与不变的矛盾，反映在$S=S(t)$的图形上就表现为：

“曲”与“直”的矛盾。

2、曲边形的面积

在生产实践中，常常要计算由曲线围成的图形的面积。在初等数学中，对于直线所围成的图形，如长方形、平行四边形、三角形等的面积，我们知道计算的方法。但对于不单有直线，而且有曲线为边的一般曲边图形，怎样去求面积呢？

为了便于分析问题的矛盾，我们以抛物线$y=x^2$、直线$x=1$及x轴所围成的曲边三角形为例进行讨论，如图三。



图三

我们知道，矩形的面积计算公式是

面积＝底×高．

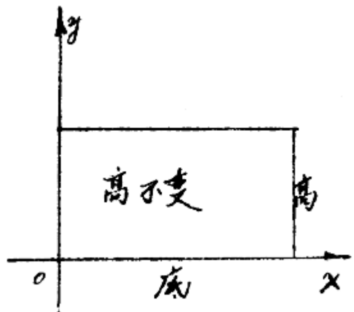
在矩形底边上各点处的高度是不变的。

现在讨论的曲边三角形OPQ，它的底边上各点处的高度随x的不同而变化，因此不能直接用上面的公式来求曲边三角形的面积。这里我们遇到了：

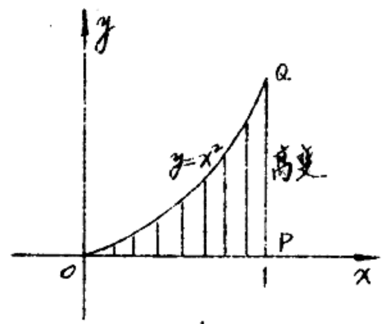
高度"变"与"不变"的矛盾．

为了进一步认识这对矛盾，我们再从图形上加以分析比较。

矩形	曲边三角形
高度不变	高度在变化
高为常数	高为函数 $y=x^2$
边界线的图形是直线	边界线的图形一边是曲线



图四



图五

一个的高度是直线，一个的高度是曲线，这就是矩形和曲边三角形的本质区别在函数图形上的表现。因此，利用矩形求面积的方法解决曲边形的面积，反映在图形上就是要用直线的知识解决曲线问题。高度变与不变的矛盾反映在边界线的图形上就是：

"曲"与"直"的矛盾．

以上两个问题是微积分中两个典型的例题，它们代表了两类相反的问题。在实际问题中，和这两类问题类似的很多，如几何中求曲线的切线，电学中求瞬时电流，化学中求化学反映的速度等都是第一类问题，这类问题通常称为变化率问题或微分问题；再如力学中求变力作功，几何中计算体积等都是第二类问题，这类问题通常称为积分问题．在以后各章中可以见到，这些问题的主要矛盾也是"变"与"不变"或"曲"与"直"的矛盾，微积分方法就是在解决这类矛盾中产生的。

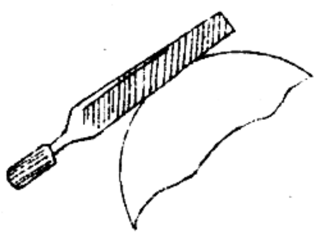
二、实践中解决曲直矛盾的方法

以上用两个典型问题为例，介绍了微积分中的两类问题，以及

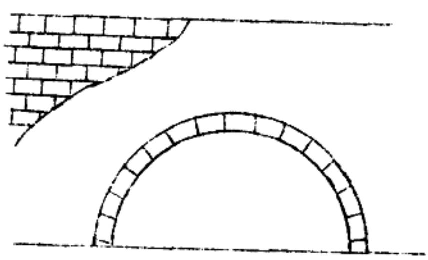
解决这两类问题遇到的主要矛盾——"变"与不变"或"曲与直"的矛盾。怎样解决这个矛盾呢？

毛主席教导我们："一切真知都是从直接经验发源的"。我们先来看看，劳动人民在生产实践中遇到曲直矛盾时，是用什么方法解决的。

钳工师付用平锉加工圆形或曲线形工件时，用平锉在工件上每锉一下都是直的，但工人师付一边锉一边转动锉的方向(图六)，就能锉出一个圆形工件。这个过程的实质是把整个圆弧看成由很多小段拼成的，在每一小段上，可以近似地用直线代替曲线，简称"以直代曲"。显然，分得越细，近似程度越好；不难想像，当每个小段无限变小时，整个工件就无限趋于圆弧形。



图六



图七

实际中有很多这样的例子。例如，建筑工人用条石砌成圆形桥，从一块条石看是直的，但从整体看却是曲的(图七)。

可见，在实践中，劳动人民巧妙地解决了"曲"与"直"的矛盾。其基本思想可以总结为：

(1)整个是曲的东西，在相对于整体是很小的局部，可以近似地用直的代替曲的。

(2)当局部越小，这种代替就越精确。这就是说，在实践中，"直和曲"这一对矛盾的双方，并不是僵死的，一成不变的，而是在相对于整体很小的局部这一条件下，可以互相转化。正如毛主席指出的：

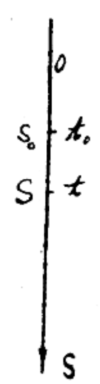
"矛盾着的双方，依据一定的条件，各向着其相反的方面转化"。"曲和直"在一定条件下互相转化，是微积分方法解决问题的一个基础。就象恩格斯所说："高等数学的主要基础之一是这样一个矛盾：在一定条件下直线和曲线应当是一回事"。应该特别注意的是，"曲与直"的互相转化是有条件的，对于具体问题要作具体分析。

三、微积分的基本思想方法

劳动人民的生产实践，生动地提示了解决微积分问题的基本思想，这就是创造条件，促成"变与不变"或"曲与直"的互相转化。下面我们以前面提到的两个典型问题为例来说明。

1、自由落体(运动规律 $S=\frac{1}{2}gt^2$)在某一时刻 t_0 的瞬时速度。

分析：如前面已经分析的，解决这个问题的主要矛盾是速度"变与不变"或函数 $S=S(t)$ 图形的"曲与直"。和钳工师傅锉圆形工件一样，整体上是曲的东西，在很小的局部可以近似地"以直代曲"。对 $S=S(t)$ 的图形来说，直线表示匀速运动，曲线表示变速运动，所以，我们想到，在很小一段时间内用匀速运动(直线)近似表示变速运动(曲线)。这是由于，从整个自由落体来看，落体速度变化很大，但在很短一段时间内，速度变化就不大了，可以把自由落体运动近似看作匀速运动。因为局部越小，"以直代曲"就越精确，所以时间间隔越小，匀速近似变速也就越精确。用这种思路就可以计算时刻 t_0 的速度。



图八

第一步：划出微小局部。在时刻 t_0 之外任取一个时刻 t，使 t 与 t_0 相差极小，即从 t_0 到 t 是极短的一段时间。这两个时刻对应的路程分别为 S_0 与 S，这一小段时间内下落的路程为 $S-S_0$(图八)

第二步：以不变代变。由于 t_0 到 t 这段时间很短，落体的速度变化也很小，所以可以把

自由落体运动近似地看作匀速运动，用这段时间内的平均速度$\overline{V}$近似代替落体在时刻t_0的速度。应用匀速运动求速度的公式，可得平均速度

$$\overline{V}=\frac{S-S_0}{t-t_0}$$

第三步：精确化。当t与t_0相差越小时，平均速度$\overline{V}$越能精确地表示时刻t_0的瞬时速度。然而，不管t与t_0相差多么小，平均速度$\overline{V}$总还只是时刻t_0瞬时速度的近似值。怎样解决这个矛盾呢？解决的办法就是，观察当t无限地接近于t_0时平均速度$\overline{V}$的变化趋势。平均速度无限趋近的值，就是自由落体在时刻t_0的瞬时速度V的精确值。这种方法在下一章将会讲到，就叫取平均速度$\overline{V}$的极限。

这个过程也可简要地归纳为：

先取一小段，"变"按"不变"林；

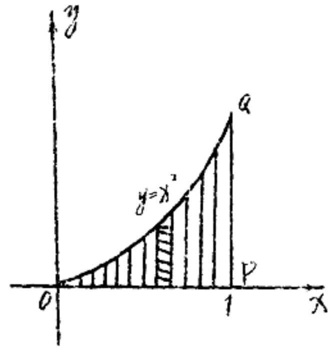
近似到精确，利用取极限。

2、由抛物线$y=x^2$、直线$x=1$及x轴围成的曲边三角形的面积。

分析：前面已经分析过，解决这个问题的主要矛盾是高度"变与不变"，反映在图像形上就是"曲与直"。由实践的启示，整体的东西在很小的局部，可以近似地"以直代曲"，对曲边三角形OPQ来说，从整体看来，底边上各点处的高变化较大，但是当x变化很小时，高度的变化也就很小了。因而从局部看来，高度可以近似地看作不变的，即可以用直线代替曲线。为了创造条件，促成"曲与直"互相转化，以便能在很小的一段上用直线代替曲线，我们把底边OP分成许多小段，曲边三角形相应地被分成了许多窄曲边形(图九)。在每一小段上作小矩形，在底边很短的情况下，因为高度变化不大，这样的小矩形可以近似地代替对应的那个窄曲边形。把许多小矩形合起来，就得到了一个台阶形(图十)。台阶形面积就是曲边三角形面积的近似值，即

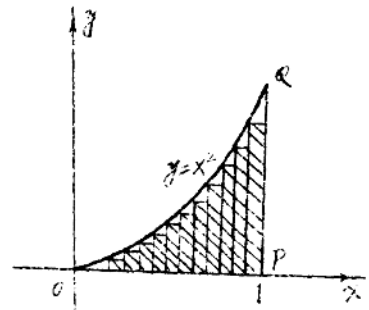
总面积≈各小矩形面积之和。

显然，将底边OP分得越细，就是每一小段的长度越短，小曲边形分得越多，台阶形的面积就越接近曲边三角形的面积。但这样的台阶形面积还毕竟是曲边三角形面积的近似值，而不是精确值。怎样求精确值呢？和例1一样，我们考虑等分的份数无限增大，并且每个小矩形底边无限变小时，台阶形面积变化的趋势。从图形上可以看出，当无限细分时，台阶形面积无限接近于曲边三角形的面积。这就是说，台阶形面积无限趋近的值就是曲边三角形面积A的精确值。



图九

以上两个问题，重点是介绍解决问题的基本思路，并没有算出结果。具体的计算在以后各章将详细讨论。



图十

通过以上分析，我们可以看到：

1.由于生产实践的发展，数学中引入了变量。例如，变速运动中，速度是变的；曲边图形面积计算中，底上的高是变的。这时，初等数学的方法就不能适应要求了，微积分正是在解决这类"变与不变"或"曲与直"的矛盾中而出现的数学方法。正如恩格斯所指出的："数学中的转折点是笛卡儿的变数。有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就成为必要的了，……"。

2.微积分的基本分析方法，来源于劳动人民的生产实践。主导思想是"分析事物的矛盾"，创造条件，"促成事物的转化"。具体作法可归纳为两步：

(1)分析微小变化，促使"变与不变"(或"曲与直")矛盾的转化，求得近似值。

(2)取近似值的极限，由近似到精确，求得精确值。

因此，微积分的基本分析方法中，贯穿着丰富的辩证法思想，正如恩格斯指出的："变数的数学——其中最重要的部分是微积分——本质上不外是辩证法在数学方面的运用"。

可是，历来的资产阶级出于压迫、愚弄劳动人民的阶级需要，它们用唯心论的先验论，说什么微积分研究的是人类精神的"自由创造物和想像物"，它们把微积分说成少数天才灵机一动的发现，恩格斯早就有力地驳斥了这种荒谬的论点，指出了"自然界对这一切想像的数量都提供了原型"。"如果一杯水的最上面的一层分子蒸发了，那么水层的高度就减少了dx，这样一层分子又一层分子地继续蒸发，事实上就是一个连续不断的微分。如果热的水蒸汽在一个容器中由于压力和冷却又凝结成水，而且分子一层又一层地累积起来(……)，直到容器满了为止，那末这里就真正进行了一种积分，这种积分和数学上的积分不同的地方只在于：一种是由人的头脑有意识地完成的，另一种是由自然界无意识地完成的"。同时还指出：微积分"是由牛顿和莱布尼茨大体上完成的，但不是由他们发明的"。这就有力地捍卫了唯物论的反映论。

3、微积分的基本问题有两类：一类是微分问题，它解决的是局部性质的问题，如变速运动的速度；一类是积分问题，它解决的是总体性质的问题，如曲边梯形的面积。这里主要是先认识一下问题的主要矛盾和解决问题的基本思想方法，具体内容以后各章再分别詳细讨论。

第一章 函数与极限

"科学研究的区分，就是根据科学对象所具有的特殊的矛盾性"。初等数学研究的对象，基本上是不变的量。微积分是以现实世界的变量为其研究对象，因而变量之间相互影响和相互联系，即变量间的函数关系，是我们首先要加以研究的对象。

人们在长期的生产实践中，逐渐地总结出了研究函数以及各种运动过程的数学方法，很自然地产生了微积分。正如恩格斯指出的："有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了，而它们也就立刻产生"。这个数学方法的基础，就是极限方法。它的实质是：研究函数的变化趋势，从而使我们能够用数学方法不仅反映出量变，而且能够反映出质变的飞跃。

因此，微积分是以函数为研究对象，以极限为基本方法。所以函数与极限就构成了微积分的基础部分。

在本章，我们通过实例引进函数的一般概念，并用函数的有关特性来研究基本初等函数的图形和性质，在此基础上介绍函数极限概念，运算规律，以及初等函数连续性概念。

第一节 变量与函数

一、变量

1.常量与变量

我们在进行科学实验或参加生产实践时，经常要接触到各种各样的量，如长度、面积、体积、重量、速度、时间、温度、电压、功率等等。虽然这些量都可以用一个数来表示它们的大小，但我们注意到，在研究某一问题的过程中，有些量不起变化，也就是保持一定的数值，另外一些量都有变化，也就是可取各种不同的数值。

例如，人造地球卫星在运行过程中，它与地面的距离是变量；

火車由唐山开往北京的过程中，火車离开唐山的距离是变量，而每节車皮的长度是常量；一根圆轴在加热过程中，轴的温度逐渐升高，是变量，轴受热膨胀，其长度也是变量，而截面周长与直径之比则是常量π；……，等等。

一般说来，在某一过程中，保持一定的数值的量叫做常量(或常数)；可以取各种不同数值的量，叫做变量(或变数)。

应当指出：一个量是常量还是变量，同研究的具体问题和具体过程有关。例如，气温变化虽然使机器上的轴热胀冷缩，但当气温变化引起的轴长变化不大时，通常将轴长看作常量，而在较精密的仪器上，轴的长度小的变化也可能影响仪器的精度，这时就应将轴长看成变量，以估计它对精度的影响。这就说明：变是绝对的，不变是相对的。变量和常量不是绝对对立的，而是可以在一定条件下互相转化的，总是相对于某个具体过程，具体条件而言的。所以判断某一个量是常量还是变量，要根据具体情况作具体分析。

在数学中，常量 常用字母 a、b、c 等表示，变量常用字母 x、y、z 等表示，而用 x_0、y_0 表示变量 x、y 取的某个特定值。

2、变量的变化范围

实际问题中，变量的取值总有一定的范围。常见的一种情形是，变量可以取得两个数之间的所有数。例如，我国第一颗人造卫星运行时，卫星与地面距离 S 是变量，在近地点，S 的值为439公里，在远地点，S 的值为2384公里，在整个运行过程中，S 的变化范围为439与2384之间的所有数。这样的变化范围叫区间。区间常用下列三种方法表示：

(1) 几何表示法

初等数学中，任何一个实数都可用数轴上的点来表示，那么区间就可用数轴上的一个线段来表示。例如数 a 对应数轴上 A 点，数 b(设 $b>a$)对应数轴上 B 点，如果变量 x 的变化范围为 a、b 之间的所