

21 世纪高等师范院校数学教育教学系列教材

总主编 刘 影 程晓亮

本科数学教育 选修课教

中学竞赛数学

Z H O N G X U E J I N G S A I S H U X U E

主编 刘 影 程晓亮



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

5

21 世纪高等师范院校

数学教育教学系列教材 / 总主编 刘 影 程晓亮

中学竞赛数学

主 编	刘 影	程晓亮	
副主编	李艳军	范兴亚	
编著者	李春玲	宋士波	刘 露
	徐苏焦	蔡炯辉	张丰硕
	郑雪静	李艳军	张 平
	张智民	柳长青	叶根福
	范兴亚	龚剑钧	程晓亮
	刘 影		



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

中学竞赛数学/刘影,程晓亮主编. —北京:北京大学出版社,2012.1

(21世纪高等师范院校数学教育教学系列教材)

ISBN 978-7-301-20076-6

I. ①中… II. ①刘… ②程… III. ①数学—竞赛—师范大学—教材 IV. ①O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 005136 号

书 名: 中学竞赛数学

著作责任者: 刘 影 程晓亮 主编

责任编辑: 曾婉婷

封面设计: 张 虹

标准书号: ISBN 978-7-301-20076-6/O · 0860

出版发行: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址: <http://www.pup.cn> 电子信箱: zpup@pup.pku.edu.cn

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 理科编辑部 62767347 出版部 62754962

印 刷 者: 三河市博文印刷厂

经 销 者: 新华书店

787mm×980mm 16 开本 19.25 印张 404 千字

2012 年 1 月第 1 版 2012 年 1 月第 1 次印刷

印 数: 0001—3000 册

定 价: 35.00 元

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究

举报电话:(010)62752024 电子信箱: fd@pup.pku.edu.cn

内 容 简 介

本书是高等师范院校数学教育专业选修课竞赛数学的教材. 它既覆盖中学数学的内容, 又有高等数学的背景, 更体现高等数学中解决问题的思想方法, 是一本综合性、提高性、衔接性的教材. 本书是在学生掌握了一定高等数学理论知识的基础上, 根据中学数学教学工作的实际需要进行编写的, 力求运用现代数学和高等数学中处理问题的思想方法来解决中学数学问题, 对解题方法进行剖析、整理和研究, 对学生已有的中学数学知识和技能进行复习巩固、查缺补漏和进一步充实提高, 以达到拓展思维能力、提高数学修养的目的.

通过对本书的学习, 学生可了解中学数学竞赛的开展情况, 了解初、高中数学竞赛的基本知识, 掌握竞赛数学的思维方法, 提高数学修养, 从而具有熟练分析和解决问题的能力, 为能够担任中学数学竞赛的辅导工作打下坚实基础.

本书可作为高等师范院校、教育学院、教师进修学校数学系开设的竞赛数学课程教材, 也可作为数学奥林匹克教练员培训班、优秀竞赛选手培训班的参考书.

为方便教师多媒体教学和读者学习, 我们提供与教材配套的相关内容的电子资源(包括习题的解答), 需要者请电子邮件联系 chengxiaoliang92@163.com.

作 者 简 介

刘 影 1987 年本科毕业于四平师范学院数学系, 硕士毕业于东北师范大学数学与统计学院. 现为吉林师范大学数学学院教授、硕士生导师、数学学科教学论方向学科带头人, 吉林省高等师范院校数学教育研究会副理事长、全国高等师范院校数学教育研究会理事. 为本科生开设数学教学论、中学数学研究、微格教学、数学教学测量与评价等课程, 其中数学教学论课程自 1994 年至今一直是吉林省高等学校优秀课程. 主持或参与完成教育部软科学重点研究项目和省级高等教育教学改革项目多项. 在《吉林大学学报(理学版)》、《中小学教师培训》、《中学数学的教与学》等刊物上发表学术论文 30 余篇, 主编和参编教材 10 余部. 2011 年其主编的《数学教学论》教材获吉林省优秀教材奖. 指导学生参加“东芝杯”全国师范大学理科学科生教学技能创新大赛, 并于 2010 年获二等奖, 2011 年获一等奖和创新奖.

《21 世纪高等师范院校数学教育教学系列教材》编委会

名誉主编：高 夯（东北师范大学）

主 编：刘 影（吉林师范大学）

编 委：王明礼（邢台学院）

周其明（皖西学院）

周仕荣（漳州师范学院）

马秀梅 王雅丽（廊坊师范学院）

杨 尚 张海燕（包头师范学院）

李全有（唐山师范学院）

范兴亚 龚剑钧（北京四中）

刘金福（四平市实验中学）

罗彦东（长春市十一高中）

王 乐（长春市第二实验中学）

王 莹（北京市通州区潞州中学）

张智民（唐山市开滦第一中学）

由 勇 戴 莹（通化市通钢一中）

喇雪燕（青海民族大学）

郭凤秀 何素芳（长江师范学院）

朱石焕 李光海（安阳师范学院）

李艳军（内蒙古兴安职业技术学院）

柳长青（百色学院）

徐苏焦（浙江海洋学院）

张 平（长春大学理学院）

王 琦（拉萨师范高等专科学校）

李春鹏 贺 侠

（四平市第十四中学）

陈建荣（肇庆市高要二中高中部）

王光明（天津师范大学）

程晓亮（吉林师范大学、首都师范大学）

徐传胜（临沂师范学院）

刘宝瑞 徐 伟 彭艳贵（鞍山师范学院）

杨灿荣（安庆师范学院）

翁小勇（遵义师范学院）

孙广才（渭南师范学院）

蔡炯辉 张丰硕（玉溪师范学院）

潘 俭（玉林师范学院）

李唐海（大庆师范学院）

武江红 常金勇（长治学院）

孙雪梅（曲靖师范学院）

程广文 郑雪静（泉州师范学院）

张艳霞 陈海俊（邯郸学院）

盛 登（绵阳师范学院）

苗凤华（长春师范学院）

徐建国（通化师范学院）

李春玲（佳木斯大学）

吴晓冬（呼伦贝尔学院）

李云晖 宋士波 柳成行 王 君

（哈尔滨学院）

刘 露（长安大学兴华学院）

李 莉 王 彬 牟 欣（白城师范学院）

叶根福（杭州高级中学）

刘兴华（哈尔滨市阿城区第七中学）

马 云（东北师范大学附属实验学校）

秘 书 长：程晓亮（吉林师范大学）

责任编辑：刘 勇 曾琬婷（北京大学出版社）



前言

中学竞赛数学课程是高等师范院校数学教育专业必选课程.北京、吉林、安徽、福建、陕西、黑龙江、辽宁、云南、河北、河南、四川、贵州、山西、山东、重庆、内蒙古、广西、青海等二十余个省、市、自治区的二十余所高等师范院校中学数学竞赛教学与研究的教师、中学数学一线教师参与了编写本教材的全过程.我们组成提议、编写、审阅委员会.本书内容全面结合中学数学课程改革的内容,力求适应新世纪高等师范院校数学教育教学改革实践要求,主要阐述中学竞赛数学的基本内容与方法.本书分绪论和正文八章,绪论主要介绍数学竞赛的产生、国际数学奥林匹克竞赛、中国数学竞赛和中学数学竞赛大纲;正文的内容包括多项式、函数方程、不定方程、数列、不等式、条件最值、整数的整除、同余、高斯函数、复数、平面几何、立体几何、平面解析几何、几何不等式、抽屉原理、容斥原理、组合计数、组合几何、图形覆盖、图论以及中学竞赛数学中的构造法和数学归纳法.本书在阐述理论内容的同时,结合中学数学内容,特别是近几年各种竞赛的试题等,给出具体的例子,并做详细解答.

全书的编写框架结构由吉林师范大学数学学院刘影、程晓亮确定,编写、审稿分工如下:绪论由李春玲编写,刘影审阅;第一章由宋士波编写,程晓亮审阅;第二章由刘露、程晓亮编写并审阅;第三章由徐苏焦编写,刘影审阅;第四章由蔡炯辉、张丰硕编写,刘影审阅;第五章由郑雪静编写,叶根福审阅;第六章由李艳军编写,刘影审阅;第七章由张平、程晓亮编写并审阅;第八章由张智民、程晓亮编写并审阅.参加编写修改、图文处理工作的还有范兴亚、叶根福、柳长青、龚剑钧.全书最后由刘影、程晓亮统稿并经讨论、修改后定稿.

在本书的编写过程中,全国十余所师范院校初等数学教学与研究专家,二十多所中学一线教师看了我们的初稿,提出了许多宝贵的建议,我们在此表示诚挚的谢意.主编刘影、程晓亮得到了东北师范大学高夯教授的热情鼓励,以及吉林师范大学教务处的支持,各编写者也得到相应省市、学校的支持和资助,全体编者向给予支持和资助的单位和个人表示衷心的感谢.本书的出版得到北京大学出版社的大力支持,在此我们表示诚挚的谢意.

本书内容虽然经过各编委多次讨论、审阅、修改,但限于编者的水平,不妥之处仍然存在,诚恳希望广大同行和读者给予批评指正.

刘 影 程晓亮

2011年12月



目 录

绪 论	(1)	第三节 高斯函数	(35)
第一节 数学竞赛的产生	(1)	一、基本概念	(36)
一、中国数学竞赛的产生	(1)	二、基本性质	(36)
二、欧洲数学竞赛的产生	(2)	三、基本结论	(37)
第二节 国际数学奥林匹克竞赛	(2)	四、典型例题解析	(38)
一、世界各国的数学竞赛热潮	(2)	第四节 复数	(43)
二、国际数学奥林匹克竞赛的诞生	(3)	一、基本概念	(43)
三、国际数学奥林匹克竞赛的 发展阶段	(4)	二、复数的三种形式	(44)
四、国际数学奥林匹克竞赛的 运转常规	(5)	三、基本性质	(44)
第三节 中国数学竞赛	(5)	四、典型例题解析	(45)
一、中国数学竞赛发展的三个阶段	(6)	习题一	(50)
二、中国数学竞赛的组织机制	(8)	本章参考文献	(52)
三、对数学竞赛“热”的思考	(8)	第二章 数列与不等式	(54)
第四节 中学数学竞赛大纲	(9)	第一节 数列	(54)
一、初中数学竞赛大纲	(10)	一、等差数列与等比数列	(54)
二、高中数学竞赛大纲	(11)	二、高阶等差数列与等比数列	(56)
本章参考文献	(12)	三、递推数列与周期数列	(57)
第一章 整除与同余	(14)	四、数列的求和	(62)
第一节 整数的整除性	(14)	五、数列的性质	(66)
一、整数的整除性	(14)	第二节 不等式	(68)
二、奇数与偶数	(21)	一、不等式的解集	(68)
三、质数与合数	(24)	二、基本性质	(69)
四、完全平方数	(29)	三、不等式的常用解法	(69)
第二节 同余	(30)	四、不等式的证明	(72)
一、基本概念	(31)	五、一些重要的不等式	(78)
二、基本性质	(31)	第三节 条件最值	(83)
三、典型例题解析	(31)	一、利用不等式求条件最值	(83)
		二、利用换元法求条件最值	(85)
		三、利用函数的知识求条件最值	(86)

四、利用数形结合思想求条件最值	(87)	习题四	(174)
五、离散型条件最值问题	(88)	本章参考文献	(179)
习题二	(90)	第五章 平面解析几何与	
本章参考文献	(92)	几何不等式	(180)
第三章 多项式与方程	(93)	第一节 平面解析几何	(180)
第一节 多项式	(93)	一、基本结论	(180)
一、基本知识	(93)	二、典型例题解析	(182)
二、常用方法	(97)	第二节 几何不等式	(200)
三、典型例题解析	(97)	一、几何不等式	(200)
第二节 函数方程	(104)	二、几个著名的代数不等式在几何中的	
一、基本知识	(104)	应用	(207)
二、常用方法	(105)	三、几个著名的定理和几何不等式的	
三、典型例题解析	(106)	应用	(209)
第三节 不定方程	(112)	习题五	(217)
一、基本知识	(112)	本章参考文献	(220)
二、几个特殊类型不定方程的		第六章 组合数学	(221)
求解定理	(113)	第一节 抽屉原理	(221)
三、常用方法	(115)	一、抽屉原理的四种形式	(221)
四、典型例题解析	(116)	二、抽屉原理的解题思想	(222)
习题三	(121)	三、典型例题解析	(222)
本章参考文献	(122)	第二节 容斥原理	(227)
第四章 平面几何与立体几何	(124)	一、预备知识	(227)
第一节 平面几何	(124)	二、容斥原理	(229)
一、几个著名定理及其应用	(124)	三、容斥原理的解题思想	(230)
二、三角形的“五心”	(136)	四、典型例题解析	(230)
三、点共圆、点共线、线共点、定点及		第三节 排列与组合	(232)
面积问题	(143)	一、加法原理与乘法原理	(232)
四、平面几何问题基本解题方法	(152)	二、排列与组合	(233)
第二节 立体几何	(157)	三、典型例题解析	(237)
一、空间共线、共面与平行	(157)	习题六	(241)
二、空间中的角	(159)	本章参考文献	(242)
三、空间中的距离	(161)	第七章 组合几何与图论	(243)
四、棱柱与棱锥	(165)	第一节 组合几何	(243)
五、旋转体	(170)	一、基本知识	(243)

二、典型例题解析	(244)	四、构造极端情况	(282)
第二节 图形覆盖	(254)	五、构造对应的平面模型,将空间问题化为平面问题	(282)
一、基本知识	(254)	六、构造集合	(282)
二、典型例题解析	(255)	七、构造新数列	(283)
第三节 图论	(263)	第二节 数学归纳法	(285)
一、基本知识	(263)	一、第一数学归纳法	(286)
二、典型例题解析	(265)	二、第二数学归纳法	(289)
习题七	(273)	三、跳跃数学归纳法	(290)
本章参考文献	(274)	四、反向数学归纳法	(290)
第八章 构造法与数学归纳法	(276)	五、螺旋式数学归纳法	(291)
第一节 构造法	(276)	六、二重数学归纳法	(292)
一、构造关系	(276)	习题八	(294)
二、构造几何模型,使代数问题几何化	(280)	本章参考文献	(296)
三、构造方程模型,使几何问题代数化	(281)		



绪 论

数学竞赛,顾名思义,是数学学科的一种竞赛活动,也是开拓数学创新思维、激发数学研究兴趣、发现数学人才和促进数学发展的重要手段与途径.数学竞赛崇尚奥林匹克精神且历史悠久.数学竞赛最早起源于中国,兴盛于当代.现代意义上的数学竞赛是1894年从匈牙利开始的.第1届国际数学奥林匹克竞赛(International Mathematical Olympiad,简称IMO)是1959年在罗马尼亚举办的.本章将从数学竞赛产生的历史事实及演变过程,介绍国际数学奥林匹克竞赛、中国数学竞赛及中国数学竞赛大纲.

第一节 数学竞赛的产生

一、中国数学竞赛的产生

早在我国战国时期(公元前475—公元前221年)齐威王与大将军田忌赛马,每次比赛都掷以千金.齐威王与田忌的马都有上、中、下三等,田忌的每等马都不如齐威王同等的马好,但田忌还是很想取胜,于是他采用军事家孙臆的建议:先出下等马对齐威王的上等马,输一局;再出上等马对齐威王的中等马,胜一局;最后出中等马对齐威王的下等马,再胜一局.结果以2:1赢得千金.这是孙臆用数学运筹思想来解决实际问题的一个范例,也可以说是我国数学竞赛的萌芽.

另据古书《唐阙史》记载:唐代青州尚书杨损,他让手下的人推荐一个优秀的人加以提升.经过千筛百选,最后剩下两个人时,拿不定去掉哪一位好.杨损得知这个消息之后,斟酌再三,最后决定出一道数学题来考考他们.他出的题目是:一天,某人在树林中的小路上散步,无意中听到一伙盗贼在林中偷分盗来的布匹,只听他们窃窃私语:林中布匹各争竞,不知人数不知布;每人六匹多五匹,每人七匹少八匹.问人、布各几何?先答对的人得到了升迁.这实际上可以说是我国数学竞赛之始,要比欧洲的数学竞赛大约早两个世纪!

我国古代人们常常还把某些算题编成便于记忆的诗词古体,相互“问难”,称为“难题”.这种风气,自南宋以来,更为盛行.对这些算题的求解也是我国早期的数学竞赛内容.

二、欧洲数学竞赛的产生

在欧洲,意大利自十一二世纪以来,就十分盛行数学竞赛.著名的数学家斐波那契(Fibonacci,约1170—1250)应当时罗马帝国国王腓德烈第二(Frederick II, 1194—1250)的邀请,与巴勒摩的约翰(John)进行数学比赛.约翰出了几个在当时是很难的题目.

在十六七世纪时,欧洲的数学家们常常把自己发现的解题新方法、新理论秘而不宣,再向其他数学家“问难”,进行挑战,以比高低,其中解三次方程比赛尤为精彩.意大利数学家发现的三次方程的代数解法被认为是16世纪最壮观的数学成就之一.1535年意大利数学家菲奥(A. M. Fior)向塔塔利亚(丰坦那(Niccolo Fontana),人称“塔尔塔利亚”(Tartaglia))提出挑战,要求举行一次解三次方程的公开比赛.比赛在米兰大教堂进行,双方各给对方出30道题,议定在30日内解题多者为胜.为迎接这场挑战,塔塔利亚做了充分准备.他冥思苦想,终于掌握了 $x^3+mx^2=n$ 和 $x^3+mx=n$ ($m, n>0$)两种类型三次方程的解法,因而大获全胜.

公开的解题竞赛不仅会引起数学家的注意,而且会激发更多人对数学的兴趣.随着教育事业的不断发展,教育工作者开始考虑在中学生之间举办解数学难题的竞赛,来引起学生对数学的兴趣,从而激发其数学思维和才能.

第二节 国际数学奥林匹克竞赛

解题是数学活动的核心,它的工具是创新思维.通过数学解题活动而进行的有意识比赛或无意识竞争由来已久.数学解题活动不仅能教会学生运算技巧,更能培养其严密的逻辑思维和灵活分析问题、解决问题的能力,所以现代的数学竞赛主要是在学生(尤其是中学生)之间进行.

一、世界各国的数学竞赛热潮

1. 匈牙利的数学竞赛

匈牙利被认为是最早开展现代中学生数学竞赛的国家.1894年,匈牙利数学物理协会通过了在全国举办中学数学竞赛的决议.在协会主席兼教育部部长埃特沃斯(Etvs,数学家、物理学家)男爵的领导下,匈牙利开始了全国性的数学竞赛,以选拔有才能的学生.这种竞赛被称为埃特沃斯男爵考试.匈牙利的数学竞赛造就了一大批数学大师.在早期的优胜者中,有被誉为匈牙利现代数学之父的费叶尔(L. Fejer),航天动力学的奠基人冯·卡门(Von Karman),哈尔测度与哈尔积分提出者哈尔(Haar),对泛函分析有重大贡献的黎茨(Rieszs),对复变函数、测度论、组合等多有建树的拉多(Rado),等等.

2. 苏联的数学竞赛

苏联是第一个采用“数学奥林匹克”这一名称的国家,也是开展数学竞赛活动最早和最活跃的国家之一.1934年,苏联在列宁格勒大学(今为圣彼得堡大学)举办了中学数学奥林匹克竞赛,首次把数学竞赛与公元前776年的古希腊奥林匹克体育竞赛联系起来.称数学竞赛为数学奥林匹克竞赛,形象地揭示了数学竞赛是参赛选手间智力的角逐.1935年,莫斯科大学和基辅大学又分别主办了莫斯科数学奥林匹克竞赛和基辅数学奥林匹克竞赛,之后每年举行一次(在1942年至1944年中断过3年).1961年,第1届全俄数学奥林匹克竞赛(All Russian Mathematical Olympiad)开始举行.1972年该赛事改称全苏数学奥林匹克竞赛(All Soviet Union Mathematical Olympiad),届数重新算起.苏联解体后的1992年赛事又改称独联体数学奥林匹克竞赛(the Commonwealth of Independent States Mathematical Olympiad),届数再次重新算起,这也是最后一届独联体数学奥林匹克竞赛.1993年,俄罗斯数学奥林匹克竞赛(Russian Mathematical Olympiad)开始举行,届数从第19届计起.

苏联的数学奥林匹克竞赛中,中学生的竞赛分为5个级别,即校内竞赛、地区或市级竞赛、省级竞赛、加盟共和国竞赛、全苏联竞赛.参加比赛的人数形成金字塔,第二级比赛约10万以上选手参加,以后每一级人数为前一级的十分之一左右.其特点是分年级进行,高年级的优胜者被推荐进入大学,免去升学考试.曾有包括柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)在内的很多著名数学家参与数学竞赛工作,故苏联的数学竞赛命题质量很高.

3. 世界各地的数学竞赛

当匈牙利数学竞赛造就的大师们纷纷“登台”的时候,欧洲和其他国家对数学竞赛产生了强烈的兴趣.在1902年,罗马尼亚就曾通过《数学杂志》组织过竞赛.再加上苏联数学竞赛普遍开展,又为他们提供了丰富的学习经验.所以,20世纪四五十年代,数学奥林匹克竞赛在这些国家蓬勃开展:在保加利亚(1949年)、波兰(1950年)、原捷克斯洛伐克(1951年)、中国(1956年)、印度(1958年)均举行了数学竞赛.以后还有原东德、瑞典、越南、原南斯拉夫、荷兰、古巴、意大利、蒙古、卢森堡、西班牙、英国、芬兰、阿根廷、比利时、以色列、加拿大、希腊、原联邦德国、澳大利亚、美国等国均举办了数学竞赛.

世界各国举办数学竞赛的目的可归结为以下三条:提高中学数学的教学水平;引发学生对数学科学的兴趣;发现具有特殊天赋的学生,并对他们以后的求学给予便利.20世纪50年代以来,世界出现了一股举办中学数学竞赛的热潮,它既为国际数学奥林匹克竞赛的诞生准备了条件,又为国际数学奥林匹克竞赛的发展提供了动力.

二、国际数学奥林匹克竞赛的诞生

1956年,经过罗马尼亚的罗曼(T. Roman)教授积极活动,东欧国家正式确定了开展国际数学竞赛的计划.第1届IMO于1959年7月在罗马尼亚古都布拉索拉拉开帷幕,其中7

个国家、52名选手参加了这次比赛。罗马尼亚、匈牙利、原捷克斯洛伐克、保加利亚、波兰、原民主德国各派8名队员，苏联派4名队员。试题共6道，都是与中学教材比较接近的算术、代数、三角、平面几何和立体几何等方面的问题。比赛结果是：罗马尼亚总分第一，匈牙利第二，原捷克斯洛伐克第三。虽然参赛的国家和选手不多，但此次比赛却开辟了国际数学竞赛的先河。

前几届IMO的参赛国仅限于东欧几个国家(当时的社会主义阵营)，实际上只有地区性而没有太多的国际性。到20世纪60年代末，竞赛规模才逐步扩大，南斯拉夫、蒙古、芬兰、英国、法国、意大利、瑞典、比利时、荷兰、奥地利、古巴、美国等相继加入，IMO发展成真正全球性的中学数学竞赛。特别是1985年中国步入IMO之后，参加国或地区增加得很快。1990年在中国举办第31届IMO时，已发展到54个队308人参赛。如今已稳定在八十多个国家或地区，四百余人的规模。

当今，虽然还不是世界上的每一个国家每一届IMO都能参加，但大多数经济、文化发达的国家都置身其列了。IMO已经成为国际上最有影响的学科竞赛，同时也是公认水平最高的中学数学竞赛。虽然国际数学奥林匹克竞赛的参赛队在增加，规模在扩大，但在1980年以前，并没有一个统一的国际机构负责组织协调工作。起初，基本上是由最早参加国际竞赛的几个东欧国家依次承担组织工作和所需的费用。1976年，奥地利成为第一个主办IMO的西方国家，此后英国主办了1979年第21届IMO。但1980年IMO没能举行，原因是原定主办国经济困难，而IMO又缺乏一个国际性协调机构使可能的主办国和参赛国了解这一情况。这使人们清楚认识到建立一个国际机构来协调组织每年的IMO的必要性。1980年，国际数学教育委员会决定成立IMO分委员会(1981年4月正式成立)，负责组织安排每年的活动，因而自1981年起，IMO的传统一直没有中断，并且逐步规范化。

三、国际数学奥林匹克竞赛的发展阶段

国际数学奥林匹克竞赛的发展，大体经历了三个阶段：第一阶段，国内准备阶段(从1894年匈牙利首开数学竞赛之先河到1959年第1届IMO)。这一阶段的数学竞赛基本上是在各国内部举行。虽然这期间已经有过一些小型的、国与国之间的比赛，但是仅仅是局部的、偶然的现象。第二阶段，由地区性崛起到全球性发展的阶段(从1959年第1届IMO到1979年第21届IMO)。这一阶段实现了三个突破：国界的突破，即不同国家的中学生都在一起进行数学竞赛；意识形态的突破，即不同社会制度的国家都在一起进行数学竞赛；地域的突破，即从欧洲发展到全球。第三阶段，成熟阶段(从1981年第22届IMO开始至今)。这时，IMO运作已经制度化、规范化，选手的水平也大大提高，竞赛的理论研究亦在兴起。特别需要提出的是，由于中国数学竞赛工作具备了出类拔萃的实践成果和初露锋芒的理论研究水平，还形成了一支宏大的数学竞赛活动学术群体——奥林匹克学派，所以，数学竞赛学的建设工作，正在数学竞赛起源地——中国表现出推动和领导世界新潮流的潜力与实力。

四、国际数学奥林匹克竞赛的运转常规

经过四十多年的发展,国际数学奥林匹克竞赛虽然还没有正式通过一份章程,但是已经有了一整套约定俗成的运转常规,并为历届东道主所遵循.国际数学奥林匹克竞赛旨在激励和培养数学人才,促进各国数学教育的交流与发展.该竞赛每年举办一届,时间定于7月(通常在中旬),参赛国轮流主办,经费由东道主提供.参赛选手为20岁以下的中学生(据29届IMO统计表明,17岁是参加IMO的最佳年龄);每队6人(历史上曾经有过8人或4人的),另派2名数学家为领队和教练.试题由各参赛国提供(东道国不提供),通常要求在每年4月底以前提供3~5道题(附答案),作为预选题,经东道主精选后提交给主试委员会表决,产生6道试题.试题确定之后,写成英、法、德、俄文,由领队译成本国文字.虽然没有统一的大纲,但统计表明,试题范围多集中在四个方面:代数、几何、初等数论、组合初步.竞赛分两天进行,每天连续4.5小时,考3道题.同一国家的6名选手分配到6个考场,独立答题,不得使用参考书和计算器.答卷由本国领队评判,然后与组织者指定的协调员协商,如有分歧,再请主试委员会仲裁.从第20届开始,每道题7分,总计满分为42分.

IMO并不确定冠军,而是希望鼓励更多有数学才华的青年成长.因此IMO的获奖人数比较多,约占全体选手的一半.竞赛设一等奖(金牌)、二等奖(银牌)、三等奖(铜牌),大致比例为1:2:3.各届获奖的分数线与当届试题的难易有关.对于某一道题解法独特,与原标准答案不同的选手,授予IMO特别奖,而不管他的总分多少;根据中国香港的建议,第29届IMO首次设立荣誉奖,奖给那些虽然未获一、二、三等奖,但至少有一道题得满分的选手. IMO不是队与队之间的比赛,所以没有设团体奖,但各国都非常重视团体总分所处的位置.从近20年的情况看来,实力较强的是中国、俄罗斯、美国、罗马尼亚等.

主试委员会由各国的正领队及主办国指定的主席组成.这个主席通常都是该国的数学权威,并有相当的组织才能与外教经验.主试委员会的职责有:

- (1) 选定试题;
- (2) 确定评分标准;
- (3) 用英、法、德、俄文准确表达试题,并翻译、核准成各参赛国文字的试题;
- (4) 比赛期间,确定如何回答学生用书面提出的关于试题的疑问;
- (5) 解决个别领队与协调员之间在评分上的不同意见;
- (6) 决定奖牌的个数与分数线.

第三节 中国数学竞赛

我国中学生数学竞赛正式开始于1956年,可以说与IMO同时起步.

一、中国数学竞赛发展的三个阶段

我国数学竞赛活动发展曲折,至今已经经历了两个时期,走过了三个阶段.1956年至1964年为第一时期,同时也是第一阶段;1978年至今为第二时期,其中1978年至1985年为国内恢复与成熟的第二阶段,1985年至今为走向世界并取得辉煌成果的第三阶段.

1. 中国数学竞赛的早期萌芽

1956年,在华罗庚、苏步青、江泽涵、柯召、吴大任、李国平等老一辈数学家的倡导下,由中国数学理事会发起,经当时高等教育部和教育部同意,我国举办了首次中学数学竞赛.由于是试办,故只在北京、天津、上海、武汉四个城市进行,而后再逐步推广.据不完全统计,除1959年和1961年因严重经济困难停顿外,每年都有一些城市举行数学竞赛,如北京、上海、天津、武汉、南京、成都、西安、广州、福州、合肥、杭州、哈尔滨等,持续发展到了1964年.这一时期,我国数学竞赛的势头很好,竞赛方式、试题难度、选手水平都与国际数学竞赛持平,可惜因“文化大革命”而从1965年起中断了13年.

2. 中国数学竞赛的国内成熟

1978年4月中旬,国务院批准全国举办中学数学竞赛,并由方毅副总理担任全国竞赛委员会名誉主任,华罗庚教授担任主任并亲自主持命题会议.这次竞赛有北京、上海、天津、陕西、安徽、四川、辽宁、广东共8个省市参加.竞赛自下而上,先举办地区、省、市预赛、复赛,计20万人参加.然后从中选拔350人于5月21日分别在8省市同时进行全国决赛.全国统一试题:第一试10道题,重基础;第二试6道题,重能力.最后评出59名优胜者.6月19日,在北京举行颁奖大会,每个优胜者都得到了荣誉奖状和书籍、文具等奖品,并可免试升入高等学校学习.

这次竞赛打破了闭关自守的局面,在全国造成了广泛的轰动.1979年,竞赛规模扩大,除港、澳、台外,29个省、市、自治区都参加了.许多学校、地区为了争得好名次,层层加码、层层选拔、集中培训、突击强化,加重了学生的负担,甚至打乱了正常的教学秩序.有鉴于此,当时的教育部决定,不再由官方举办全国性的数学竞赛.这样,本来一年举办一次的全国数学竞赛于1980年暂停了.巧合的是,IMO也于1980年中断了.

当时,与我国50年代数学竞赛同时起步的国际数学竞赛已经形成规模,并向我国发出了邀请.我国数学工作者感到有责任去迎接IMO的挑战.至于竞赛与日常教学的关系,并非必然的对立,所出现的矛盾纯属工作失误.因此,各地热心数学奥林匹克事业的数学工作者强烈要求,“官办”的竞赛停止之后进行“民办”的竞赛,“全国性”的竞赛停止之后开始进行“地区性”的竞赛.

1980年8月,中国数学会成立了一个新设的工作委员会——中国数学会普及工作委员会,并在大连召开会议,与各省志同道合的数学界人士共商数学竞赛大计.“大连会议”决议:

数学竞赛是一项群众性课外活动,数学竞赛和有关的科普活动将作为中国数学会普及工作委员会的一项主要工作.从此,中国的中学数学竞赛有了一个常设的学术机构,同时也开始了一个雄心勃勃冲向国际并最终取得辉煌成果的新局面.

由于数学学术界和数学教育界的团结拼搏,从1981年开始,我国中学数学竞赛以省市联合竞赛的方式延续了下来.数学竞赛1985年发展到初中,1991年延伸到小学.

在工作实践中,中国数学会普及工作委员会不断总结经验,除每两年召开一次年会外,还召开过13次系列工作会议和若干次数学竞赛高级研讨会,创造性地解决竞赛中所遇到的理论和实际问题.主要成果有:

(1) 明确了竞赛活动的目的与原则;

(2) 坚持了普及与提高相结合的方针;

(3) 调动了中学和大学的积极性;

(4) 完善了中国数学竞赛的工作程序,贯穿“省、市、预赛—全国联赛—冬令营考试—国家集训队考试—IMO”全过程;

(5) 完成了命题工作的规范化;

(6) 制定了数学竞赛大纲并编写出基础教程;

(7) 建立了等级教练员制度.

这些卓有成效的工作,实际上已经形成了一整套具有中国特色的数学奥林匹克工作法.如果说,其中有些做法是模仿国际惯例的话,那么促成我国选手在国际竞赛中一再夺标的成功经验,则完全是我国数学工作者的智慧与创造.

3. 中国数学竞赛的国际发展

早在1978年,我国就接到IMO的邀请,限于当时的历史条件,数学工作者只能先做好基础性的准备工作.1980年,中国数学会收到美国数学会的邀请,拟参加1981年在华盛顿举办的第22届IMO,但终未成行.1984年也曾考虑参加,又由于经费等原因再次搁浅.直到1985年7月,我国才第一次以观察员的身份参加在赫尔辛基举办的第26届IMO.当时带了两名学生去试一试,以了解国际数学竞赛的基本情况.

1985年12月,在上海举办的纪念中国数学会成立50周年的大会期间,中国数学会决定派正式代表队参加1986年在波兰举行的第27届IMO.当年就获团体总分第4名.后来成绩越来越好,1989年登上了团体总分冠军的宝座.

1990年7月,在北京举办了空前规模的第31届IMO,中国队蝉联团体总分第一,获5金1银的好成绩.王元教授说:“我国成功地举办了第31届国际数学奥林匹克(竞赛),这标志着我国的数学竞赛水平已达到国际领先水平.”

自1985年至2004年的20年来,中国队在国际数学奥林匹克竞赛中高潮迭起,成绩显赫,参赛110人次,得奖108人次(得奖率为98%),其中金牌83枚(占76.9%)、银牌20枚(占18.5%)、铜牌5枚(占4.6%).团体总分11次获第一名,4次获第二名,成为公认的数学

竞赛强国.

二、中国数学竞赛的组织机制

经过十几年的艰苦摸索和实践检验,我国中学数学竞赛活动积累了成熟的经验,形成了一整套适合我国国情、相对稳定而又不断丰富做法.

1. 目的与原则

我国数学竞赛的目的:

- (1) 提高学生学习数学的兴趣,推动课外活动的开展;
- (2) 促进中学数学教学的改革;
- (3) 发现和培养数学人才;
- (4) 为参加国际数学奥林匹克竞赛作准备.

我国数学竞赛的原则:

- (1) 民办公助;
- (2) 精简节约;
- (3) 自愿参加.

2. 时间与奖励

为保证我国数学竞赛活动的健康发展,中国数学会于1994年制定了《高中数学竞赛大纲》和《初中数学竞赛大纲》,并出版了相应的数学奥林匹克基础教程.每年10月中旬的第一个星期天举行全国高中数学联赛,每年4月中旬的第一个星期天举行全国初中数学联赛,每年3月份和4月份分别举行全国小学数学奥林匹克竞赛初赛和决赛.由各省、市、自治区数学会轮流主办高中联赛和初中联赛,并由中国数学会表彰各省、市、自治区参加高中联赛的前150名、初中联赛的前200名优胜者,发给统一证书和奖章.高中联赛一等奖获得者可以保送到著名高校.竞赛试题由各省、市、自治区数学会提供,经东道主精选出所需题量的2~3倍,最后由全国命题工作会议定稿.命题贯彻“大众化、普及性、不超纲、不超前”的原则.

为选拔和培训我国的IMO队员,自1986年起,每年元月由中国数学奥林匹克委员会举办一次全国中学生数学冬令营.营员来自各省的高中联赛第一名及其他联赛成绩优异者,计百人左右.虽然冬令营期间有参观、专家报告等活动,但核心是进行两天模拟IMO的考试,选拔出二三十名国家集训队队员,集训一个月后产生6名国家队队员.全国中学生数学冬令营从1991年(第6届)起更名为中国数学奥林匹克竞赛(Chinese Mathematical Olympiad,简称CMO).

三、对数学竞赛“热”的思考

国际数学竞赛已经得到全世界的承认,我国数学竞赛亦在高潮之中,但是人们对数学竞