

高等学校教材

高等数学

(数学物理方法)

(物理类专业用)

(第二版)

第四册

四川大学数学系 高等数学 微分方程 教研室编

高等教育出版社

出版前言

本书内容为数学物理方法,包括复变函数论、数学物理方程、积分变换和特殊函数等部分,可供综合大学和师范学院物理类专业作为教材。

第二版由梁昆森教授初审,并由理科数学教材编审委员会高等数学编审组委托欧维义副教授复审。

本书第一版系由梁昆森教授与马元鹏同志主审。

高等学校教材
高等数学
(数学物理方法)
(物理类专业用)
(第二版)

第四册

四川大学数学系 高等数学教研室编
微分方程

*

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 18 字数 310,000

1979年8月第1版 1985年6月第2版 1985年6月第1次印刷

印数 00,001-25,500

书号 13010·01044 定价 2.65元

目 录

第一篇 复变函数论	1
第一章 复数与复变函数	2
*第一节 复数	2
§ 1.1.1. 复数域	2
§ 1.1.2. 复平面	3
§ 1.1.3. 复数的模与辐角	4
§ 1.1.4. 复数的乘幂与方根	6
*第二节 复变函数的基本概念	8
§ 1.2.1. 区域与约当曲线	8
§ 1.2.2. 复变函数的概念	11
§ 1.2.3. 复变函数的极限与连续性	12
第三节 复球面与无穷远点	14
§ 1.3.1. 复球面	14
§ 1.3.2. 闭平面上的几个概念	15
习题	16
第二章 解析函数	19
第一节 解析函数的概念及哥西-黎曼条件	19
§ 2.1.1. 导数的定义	19
§ 2.1.2. 哥西-黎曼条件	20
§ 2.1.3. 解析函数的定义	24
第二节 解析函数与调和函数的关系	24
§ 2.2.1. 共轭调和函数的求法	24
§ 2.2.2. 共轭调和函数的几何意义	26
第三节 初等解析函数	28
§ 2.3.1. 初等单值函数	28
§ 2.3.2. 初等多值函数	31
习题	38
第三章 哥西定理 哥西积分	41

第一节 复变积分的概念及其简单性质	41
§ 3.1.1. 复变积分的定义及其计算方法	41
§ 3.1.2. 复变积分的简单性质	44
第二节 哥西积分定理及其推广	45
§ 3.2.1. 哥西积分定理	45
§ 3.2.2. 不定积分	46
§ 3.2.3. 哥西积分定理推广到复围线的情形	48
第三节 哥西积分公式及其推广	51
§ 3.3.1. 哥西积分公式	51
§ 3.3.2. 解析函数的无限次可微性	53
§ 3.3.3. 模的最大值原理 哥西不等式 刘维尔定理 摩勒纳定理	55
第四节 解析函数在平面场中的应用	57
§ 3.4.1. 什么叫平面场	57
§ 3.4.2. 复位势	58
§ 3.4.3. 举例	60
习题	64
第四章 解析函数的幂级数表示	66
*第一节 函数项级数的基本性质	66
§ 4.1.1. 数项级数	66
§ 4.1.2. 一致收敛的函数项级数	68
第二节 幂级数与解析函数	72
*§ 4.2.1. 幂级数的敛散性	72
§ 4.2.2. 解析函数的幂级数表示	76
第三节 罗朗级数	81
§ 4.3.1. 双边幂级数的收敛圆环	81
§ 4.3.2. 解析函数的罗朗展式	82
§ 4.3.3. 罗朗展式举例	85
第四节 单值函数的孤立奇点	89
§ 4.4.1. 孤立奇点的三种类型	89
§ 4.4.2. 可去奇点	90
§ 4.4.3. 极点	91
§ 4.4.4. 本性奇点	93
§ 4.4.5. 解析函数在无穷远点的性质	93

习题	96
第五章 残数及其应用	99
第一节 残数	99
§ 5.1.1. 残数的定义及残数定理	100
§ 5.1.2. 残数的求法	101
§ 5.1.3. 无穷远点的残数	104
第二节 利用残数计算实积分	106
§ 5.2.1. $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$ 的计算	106
§ 5.2.2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ 的计算	109
§ 5.2.3. 实轴上有奇点的情形	113
§ 5.2.4. 其他例子	115
习题	120
第六章 保角变换	123
第一节 解析变换的特性	123
§ 6.1.1. 单叶变换	123
§ 6.1.2. 解析函数的保角性	125
§ 6.1.3. 拉普拉斯算符的变换	126
第二节 线性变换	128
§ 6.2.1. 几种最简单的保角变换	128
§ 6.2.2. 线性变换	130
§ 6.2.3. 线性变换的保圆周性	132
§ 6.2.4. 线性变换的保对称点性	133
§ 6.2.5. 线性变换的应用	134
第三节 某些初等函数所构成的变换	137
§ 6.3.1. 幂函数与根式函数	137
§ 6.3.2. 指数函数与对数函数	139
习题	142
第二篇 数学物理方程	144
第七章 一维波动方程的付氏解	145
第一节 一维波动方程——弦振动方程的建立	145
§ 7.1.1. 弦振动方程的建立	145
§ 7.1.2. 定解条件的提出	147

第二节 齐次方程混合问题的付里叶解法(分离变量法,驻波法)	149
§7.2.1. 利用分离变量法求解齐次弦振动方程的混合问题	149
§7.2.2. 付氏解的物理意义	155
第三节 电报方程	157
第四节 强迫振动 非齐次方程的求解	160
习题	163
第八章 热传导方程的付氏解	166
第一节 热传导方程和扩散方程的建立	166
§8.1.1. 热传导方程的建立	166
§8.1.2. 扩散方程的建立	168
§8.1.3. 定解条件	170
第二节 混合问题的付氏解法	171
第三节 初值问题的付氏解法	173
§8.3.1. 付氏积分	173
§8.3.2. 利用付氏积分解热传导方程的初值问题	175
§8.3.3. 付氏解的物理意义	178
第四节 一端有界的热传导问题	181
§8.4.1. 定解问题的解	181
§8.4.2. 举例	183
§8.4.3. 杜赫美原则	187
习题	191
第九章 拉普拉斯方程的圆的狄利克雷问题的付氏解	193
第一节 圆的狄利克雷问题	193
§9.1.1. 定解问题的提法	193
§9.1.2. 定解问题的付氏解法	194
第二节 δ 函数	198
§9.2.1. δ 函数的引入	198
§9.2.2. δ 函数的性质	199
§9.2.3. 把 δ 函数看作是弱收敛函数序列的弱极限	201
§9.2.4. 高维空间中的 δ 函数及 δ 函数的其他性质	203
习题	205
第十章 波动方程的达朗贝尔解	208
第一节 弦振动方程初值问题的达朗贝尔解法	208

§ 10.1.1. 达朗贝尔解的推出	208
§ 10.1.2. 达朗贝尔解的物理意义	210
§ 10.1.3. 举例	211
§ 10.1.4. 依赖区间 决定区域和影响区域	215
第二节 高维波动方程	215
§ 10.2.1. 三维波动方程的初值问题	215
§ 10.2.2. 降维法	217
§ 10.2.3. 解的物理意义	218
第三节 非齐次波动方程 推迟势	220
§ 10.3.1. 非齐次波动方程的初值问题	220
§ 10.3.2. 非线性方程	222
习题	224
第十一章 数学物理方程的解的积分公式	227
第一节 格林公式 调和函数的基本性质	227
§ 11.1.1. 球对称解	227
§ 11.1.2. 格林公式	228
§ 11.1.3. 调和函数的基本性质	229
第二节 拉普拉斯方程的球的狄利克雷问题	236
§ 11.2.1. 边值问题的提法	236
§ 11.2.2. 球的狄利克雷问题	236
§ 11.2.3. 狄利克雷外问题	240
第三节 格林函数	241
§ 11.3.1. 格林函数的定义	241
§ 11.3.2. 举例	244
§ 11.3.3. 格林函数的对称性	246
§ 11.3.4. 保角变换法	248
第四节 泊松方程	249
§ 11.4.1. 泊松方程的导出	249
§ 11.4.2. 泊松方程的狄利克雷问题	250
习题	262
第十二章 定解问题的适定性	254
第一节 弦振动方程的初值问题的适定性	255
第二节 弦振动方程混合问题的适定性	257

§ 12.2.1. 解的存在性	257
§ 12.2.2. 能量积分和解的唯一性	259
第三节 狄利克雷问题的适定性	262
§ 12.3.1. 解的唯一性	262
§ 12.3.2. 解的稳定性	263
第四节 热传导方程混合问题的适定性	264
§ 12.4.1. 极值原理	264
§ 12.4.2. 解的唯一性	266
§ 12.4.3. 解的稳定性	266
第五节 热传导方程初值问题的适定性	267
§ 12.5.1. 解的唯一性和稳定性	267
§ 12.5.2. 解的存在性	269
第六节 拉普拉斯方程狄利克雷外问题的解的唯一性	271
§ 12.6.1. 三维空间狄利克雷外问题解的唯一性	271
§ 12.6.2. 二维空间狄利克雷外问题解的唯一性	272
第七节 定解问题不适定之例	273
§ 12.7.1. 不适定问题举例	273
§ 12.7.2. 对不适定问题的研究	275
第八节 三类方程的比较	277
§ 12.8.1. 关于定解问题的提法	277
§ 12.8.2. 关于解的性质	277
§ 12.8.3. 关于时间的反演	279
习题	281
第十三章 付里叶变换	283
第一节 付氏变换的定义及其基本性质	283
§ 13.1.1. 付氏变换的定义	283
§ 13.1.2. 付氏变换的基本性质	284
§ 13.1.3. n 维付氏变换	287
§ 13.1.4. δ 函数的付氏变换	287
第二节 用付氏变换解数理方程举例	288
第三节 基本解	290
§ 13.3.1. 基本解的物理意义	290
§ 13.3.2. 基本解的定义	292
§ 13.3.3. 非定常型非齐次方程的基本解	300

习题	301
第十四章 拉普拉斯变换	303
第一节 拉氏变换的定义和它的逆变换	303
§ 14.1.1. 付氏变换与拉氏变换	303
§ 14.1.2. 拉氏变换的定义	304
§ 14.1.3. 拉氏变换的存在定理和反演定理	305
第二节 拉氏变换的基本性质及其应用举例	308
第三节 展开定理	320
§ 14.3.1. 展开定理	320
§ 14.3.2. 用反演公式解数理方程举例	322
习题	326
第三篇 特殊函数	329
第十五章 勒让德多项式 球函数	330
第一节 勒让德微分方程及勒让德多项式	330
§ 15.1.1. 勒让德微分方程的导出	330
§ 15.1.2. 幂级数解和勒让德多项式的定义	332
§ 15.1.3. 勒让德多项式的微分表达式——洛德利格公式	338
§ 15.1.4. 勒让德多项式的施列夫利积分表达式	339
第二节 勒让德多项式的母函数及其递推公式	340
§ 15.2.1. 勒让德多项式的母函数	340
§ 15.2.2. 勒让德多项式的递推公式	342
第三节 按勒让德多项式展开	344
§ 15.3.1. 勒让德多项式的正交性	344
§ 15.3.2. 勒让德多项式的归一性	344
§ 15.3.3. 展开定理的叙述	346
第四节 连带勒让德多项式	347
§ 15.4.1. 连带勒让德多项式的定义	347
§ 15.4.2. 连带勒让德多项式的正交性和归一性	348
第五节 拉普拉斯方程在球形区域上的狄利克雷问题	349
§ 15.5.1. 利用连带勒让德多项式 $P_n^m(x)$ 得出方程 (15.1)' 的解	350
§ 15.5.2. 确定出定解问题 (15.1)' 和 (15.2)' 的解	350
公式表	352
习题	353

第十六章 贝塞耳函数 柱函数	355
第一节 贝塞耳微分方程及贝塞耳函数	355
§ 16.1.1. 贝塞耳微分方程的导出	355
§ 16.1.2. 幂级数解和贝塞耳函数的定义	356
第二节 贝塞耳函数的母函数及其递推公式	360
§ 16.2.1. 贝塞耳函数的母函数	360
§ 16.2.2. 贝塞耳函数的积分表达式	361
§ 16.2.3. 贝塞耳函数的递推公式	362
§ 16.2.4. 半奇数阶贝塞耳函数	363
第三节 按贝塞耳函数展开	366
§ 16.3.1. 贝塞耳函数的零点	366
§ 16.3.2. 贝塞耳函数的正交性	367
§ 16.3.3. 贝塞耳函数的归一性	368
§ 16.3.4. 展开定理的叙述	369
§ 16.3.5. 圆膜振动问题	369
第四节 第二类 and 第三类贝塞耳函数	371
§ 16.4.1. 第二类贝塞耳函数	371
§ 16.4.2. 第三类贝塞耳函数	374
§ 16.4.3. 球贝塞耳函数	375
第五节 变形(或虚变量)贝塞耳函数和贝塞耳函数的渐近公式	376
§ 16.5.1. 变形贝塞耳函数	376
§ 16.5.2. 贝塞耳函数的渐近公式	379
§ 16.5.3. 可以化为贝塞耳方程的微分方程	382
公式表	382
习题	385
第十七章 厄密多项式和拉盖尔多项式	388
第一节 厄密多项式	388
§ 17.1.1. 厄密微分方程的导出	388
§ 17.1.2. 幂级数解和厄密多项式的定义	389
§ 17.1.3. 厄密多项式的母函数	390
§ 17.1.4. 厄密多项式的正交性和归一性	391
第二节 拉盖尔多项式	392
§ 17.2.1. 拉盖尔微分方程的导出	392
§ 17.2.2. 幂级数解和拉盖尔多项式的定义	393

§ 17.2.3. 拉盖尔多项式的母函数·····	394
§ 17.2.4. 拉盖尔多项式的正交性和归一性·····	396
第三节 特征值和特征函数·····	396
§ 17.3.1. 特征值和特征函数的概念·····	396
§ 17.3.2. 特征值和特征函数的性质·····	397
§ 17.3.3. 斯图谟-刘维尔型微分方程边值问题的例子·····	398
习题·····	399
附录·····	400
付里叶变换表·····	400
拉普拉斯变换表·····	401
外国人名表·····	404

第一篇 复变函数论

大家知道,在解一元二次方程 $aX^2+bX+c=0$ (这里 a, b, c 都是实数且 $a \neq 0$)时,如果判别式 $b^2-4ac < 0$,就会遇到负数开方的问题.最简单的一个例子是在解 $X^2+1=0$ 时遇到的 -1 开平方的问题.为了使负数开平方有意义,也就是要使这类方程有解,我们需要扩大数的范围.这就引进一种所谓虚数,用符号 i 当作虚数单位,即规定

(i) $i^2 = -1$;

(ii) 它与实数在一起可以进行通常的四则运算.

根据这个规定就会出现形如 $x+iy$ (这里 x, y 都是实数)的数,我们把它叫做复数.

复变函数论要研究的是:复变数 $z=x+iy$ 的函数的基本概念和理论及其一些应用.复变函数理论的发展与数学分析是不能分离的,但它有它自身的特点,它的中心对象是解析函数.由于解析函数具有许多独特的性质,致使复变函数论方法不但在纯粹数学各个部门有很多的应用,而且在各种应用数学、数学物理课程中也有广泛的应用,成为一种不可缺少的强有力的工具.

第一章 复数与复变函数

*第一节 复数^①

§ 1.1.1. 复数域

所谓复数,是指形如 $z = x + iy$ 的数,其中 $i = \sqrt{-1}$ ($i^2 = -1$) 称为虚单位, x, y 都是实数,分别称为复数 z 的实部与虚部,记为 $x = \operatorname{Re}z, y = \operatorname{Im}z$.

实部为 0 的复数 $0 + iy = iy$ 称为纯虚数,或虚数. 虚部为 0 的复数 $x + i \cdot 0 = x$ 就是实数. 因此,全体实数是全体复数的一部分. 实部与虚部都为 0 的复数称为复数 0, 记为 0. 故 $x + iy = 0$ 必须且只须 $x = 0, y = 0$.

复数的相等与加、减、乘、除等运算是这样规定的:

(i) $x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$, 必须且只须 $x_1 = x_2, y_1 = y_2$;

(ii) $(x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$;

(iii) $(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2)$;

(iv)
$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2}$$
$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2},$$

其中 $x_2 + iy_2 \neq 0$.

显然,除法是乘法的逆运算.

若 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2, z_3 = x_3 + iy_3$, 则以下的交换律、结

① 作有记号 * 的各节是指与微积分中有关部分平行的内容, 只作扼要讲解.

合律和分配律成立:

$$\text{交换律: } z_1 + z_2 = z_2 + z_1, z_1 z_2 = z_2 z_1;$$

$$\text{结合律: } z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3, z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3;$$

$$\text{分配律: } (z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3.$$

全体复数在引进上述相等关系和运算法则之后,称为复数域。在复数域中没有复数大小的概念。

我们称两个复数 $x + iy$ 与 $x - iy$ 为共轭复数,或者说,这两个复数共轭。如其中一个记为 z , 则另一个记为 \bar{z} 。共轭复数有一些简单而重要的性质,例如

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2,$$

$$z + \bar{z} = 2x = 2\operatorname{Re}z,$$

$$z - \bar{z} = 2iy = 2i\operatorname{Im}z.$$

§ 1.1.2. 复平面

一个复数 $z = x + iy$, 本质上由一对有序实数 (x, y) 唯一确定, 于是能够建立平面上的全部点和全体复数间一一对应的关系(图 1.1)。由于 x 轴上的点对应着实数, 故 x 轴称为实轴, y 轴上的点对应着纯虚数, 所以 y 轴称为虚轴, 这样表示复数的平面称为复平面或 z 平面。

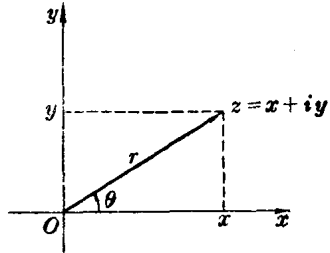


图 1.1

引进复平面之后, 我们在“数”和“形”之间就建立了联系。今后, 我们不再区分“数”和“点”了, 说到“点”可以指它所代表的“数”, 说到“数”也可以指这个数所代表的“点”。

在复平面上, 从原点到点 $z = x + iy$ 所引的矢量与这个数 z 也构成一一对应关系, 且复数相加、减与矢量相加、减的法则是一致的。

例如, 若 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, 则 $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$. 由图 1.2 可以看出 $z_1 + z_2$ 所对应的矢量就是 z_1 所对应的矢量与 z_2 所对应的矢量按矢量加法作出的和矢量.

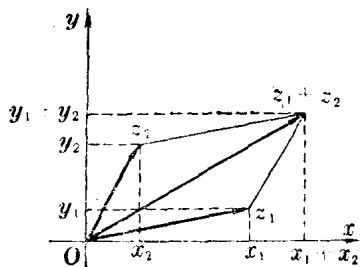


图 1.2

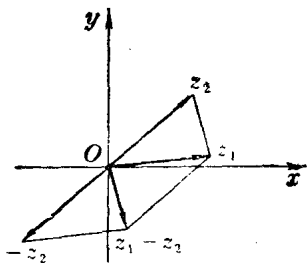


图 1.3

又如, 将 $z_1 - z_2$ 表成 $z_1 + (-z_2)$, 可以看出 $z_1 - z_2$ 所对应的矢量就是 z_1 所对应的矢量减 z_2 (即加 $-z_2$) 所对应的矢量 (图 1.3).

§ 1.1.3. 复数的模与幅角

表示复数 z 的点, 也可以用极坐标 r 和 θ 来确定 (图 1.1).

上面我们用矢量 \vec{Oz} 来表示复数 $z = x + iy$, x, y 分别等于 \vec{Oz} 沿 x 轴与 y 轴的分量, 矢量 \vec{Oz} 的长度称为复数 z 的模, 或绝对值, 以符号 $|z|$ 或 r 表示, 因而有

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0.$$

根据图 1.1, 图 1.2 及图 1.3, 我们有下面三个不等式:

$$|x| \leq |z|, |y| \leq |z|, |z| \leq |x| + |y|. \quad (1.1)$$

$$|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2| \text{ (三角形两边和} \geq \text{第三边)}. \quad (1.2)$$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \text{ (三角形两边差} \leq \text{第三边)}. \quad (1.3)$$

由图 1.3 可见, $|z_1 - z_2|$ 表示点 z_1 与 z_2 的距离, 记为

$$\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|. \quad (1.4)$$

复数 $z \neq 0$ 所对应的矢量 \vec{Oz} 与实轴正向的夹角 θ 称为复数 z 的幅角. 任一复数 $z \neq 0$ 有无穷多个幅角, 记为 $\theta = \text{Arg}z$. 如果 θ_0 是

其中一个, 则有

$$\theta = \text{Arg}z = \theta_0 + 2k\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

我们把其中属于 $(-\pi, \pi]$ 的幅角称为 $\text{Arg}z$ 的主值, 或称为 z 的主幅角, 记为 $\arg z$. 于是有

$$\theta = \text{Arg}z = \arg z + 2k\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.5)$$

注意, 原点的模为 0, 幅角无定义.

从直角坐标与极坐标的关系, 我们可以用复数的模与幅角来表示非 0 复数 z . 由图 1.1 即得

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta). \quad (1.6)$$

特别当 $r=1$ 时

$$z = \cos\theta + i\sin\theta.$$

这种复数称为单位复数.

我们引出熟知的欧拉公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad (1.7)$$

并且容易验证

$$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \quad (1.8)$$

$$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1 - \theta_2)}. \quad (1.9)$$

利用公式(1.7), 就可以把(1.6)改写成

$$z = x + iy = re^{i\theta}. \quad (1.10)$$

我们分别称(1.6)和(1.10)为复数 $z \neq 0$ 的三角形式和指数形式.

例 1. $1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}},$

$$i = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = e^{i\frac{\pi}{2}},$$

$$1 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0) = e^{i0},$$

$$-2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = 2e^{i\pi},$$

$$-3i = 3 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

利用复数的指数形式作乘法比较简单，因为由(1.8)及(1.9)可得

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \quad (1.11)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} \frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

所以 $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2|$, $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ($z_2 \neq 0$), (1.12)

$$\text{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \text{Arg}z_1 + \text{Arg}z_2, \quad (1.13)$$

$$\text{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \text{Arg}z_1 - \text{Arg}z_2. \quad (1.14)$$

公式(1.11)说明， $z_1 z_2$ 所对应的矢量就是把 z_1 所对应的矢量伸长(或缩短) $r_2 = |z_2|$ 倍，然后再旋转一个角度 $\theta_2 = \arg z_2$ 而得到的矢量(图 1.4)。特别是当 $|z_2| = 1$ 时，只需把 z_1 所对应的矢量旋转一个角度 $\theta_2 = \arg z_2$ 就行了。这就是说，以单位复数乘任何复数，几何上相当于将此复数所对应的矢量旋转一个角度。

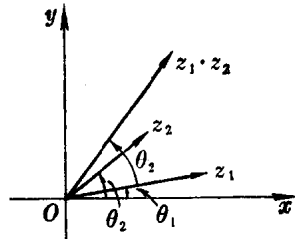


图 1.4

公式(1.13)可理解如下：对于 $\text{Arg}(z_1 \cdot z_2)$ 的任一值，一定有 $\text{Arg}z_1$ 及 $\text{Arg}z_2$ 的各一值与之对应，使等式成立；反过来也是一样。公式(1.14)可作类似的理解。

§ 1.1.4. 复数的乘幂与方根

作为乘积的特例，我们考虑非 0 复数 z 的正整数次幂 z^n ，它是 n 个相同因子 z 的乘积，

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta).$$