经济数学

MATHEMATICS IN ECONOMICS

1

中国 CHINA

1984

我们是怎样使数学为国民经济建设服务的

刘 德 铭

（国防科大）

我校应用数学教研室成立以来，比较重视把数学理论应用于实践，特别是数学如何为国民经济建设服务，１９７８年底，在教研室内设立了运筹学教学组。当时，我们认为要打开一条数学理论为国民经济建设服务的路，首先要做普及工作。几年来我们先后与校内外兄弟单位合作，参与举办了许多讲习班，其中有：

１９７９春，湖南省数学学会与省科协联合举办的运筹学讲习班，由长沙铁道学院与我们承担了讲课任务，并编写了讲义。

１９８０～１９８３年间，中国科学院农业现代化委员会与各地联合举办了全国农业系统工程讲习班１～６期，我们教研室与本校７０１，７０２教研室、中国人民大学等单位都派教师参加了讲课工作，并编了一套讲义。由于这类讲习班时间一般为４～６月，故在课程讲完后还安排有实践环节。部分教师和讲习班的学员一起参加实践，做小区域内的农业生产规划等工作，进行农业现代化途征的探索，做出一些可喜的结果。这些结果主要是学员做的，但参加讲习班的教员也被誉为“农业系统工程的开拓者”。

在此期间，我们还派出教员参加了各地区邀请主办的各种系统工程或运筹学讲习班，如在湖南桃源、涟源、永兴、陕西武功、宁夏银川、安徽蚌埠等地的讲习班的讲课工作。

１９８３年５月，我们派教员参加了湖南财经学院举办的经济数学讲习班的讲课工作。１９８３年５～６月，派教员参加了长沙市科协举办的系统工程讲习班的讲课工作，１９８３年１０月受××部队委托，举办了运筹学与软件讲习班，并编写了讲义。

如果说在这些讲习班上的讲课是播下种子的话，那么，它就会在应用的领域内发芽、生长。几年来，我们应一些兄弟单位的邀请，参加了一些经济咨询工作和一些科研项目，其中咨询项目中较大的有：

１、《××冶炼厂、××化工厂联合治理铅锌烟气方案决策分析》

２、《××钢铁厂技术改造》方案分析与论证。以上这些项目均是采用系统工程与运筹学的方法，选取较优决策，提出可行方案。它们均已为有关部门采纳，为国家经济建设做出了贡献。

我们承担的一些科研项目有：

１、《２０００年全国粮食和经济作物产量的预测研究》作出了初步的预测工作。

２、《浏阳县经济振兴规划及山区开发研究》，现已提出一个进行全面综合治理、逐步建立一个合理的农业结构和良好的农业生态体系的规划方案。

３、汉寿县资源开发课题。

几年来。我们还在整数规划、图的算法、成组剖分算法、二次规划、对策论等方面进行了一些理论研究与探讨。与此同时，还为应用数学专业的学生开设数学规划、对策论、运筹学通论等选修课。并招收了几届运筹学方向的研究生。

通过这几年的工作，我们认识到教学必须与科学研究相结合。在科学研究中，必须注意理论联系实际，特别是注意用数学理论解决国民经济建设中的问题，为工业和农业的现代化服务，在这方面，经济数学大有用武之地。

目　录

经济 MATHEMATICS
数学 IN ECONOMICS
NO 1 1984

经济系统的控制模式与自治控制的极点配置*

张钟俊 周斯富

上海交通大学

摘 要

决定一个生产单位各类产品的生产量和原材料的进货量间的关系，是经济系统中需要解决的基本问题之一。经济系统中解决这个问题的控制模式可分为两大类。本文以离散的差分方程形式建立了经济系统的数学模型，并应用现代控制理论中的极点配置概念对自治控制模式进行了初步分析。

经济系统是个复杂的大系统。复杂的大系统具有多种功能，一般说来，它们由简单的与复杂的多级调节机构加以控制。以宇宙飞船为例，某些功能由飞船上装置的伺服机构来控制，另一些功能由地面站实施半自动控制，还有一些功能则由宇航员加以手动控制。又如人体是个复杂的大系统，人体的肺、胃、肠及心脏等器官所完成的呼吸、消化和血液循环等功能，由自治的植物神经系统加以控制，另外许多重要的功能则受中枢神经系统的控制。经济系统也并不例外，它的行动也由低级的与高级的各类机构加以控制。低级机构的控制，借用生理学的名词，称为自治控制。

一、经济系统的控制模式

为了抽象地分析经济系统，我们将它区分为二个范畴。一个称为实际范畴，指的是经济系统中发生的物质过程，例如生产、流通和消费。另一个称为控制范畴，指的是对实际经济行为的指导活动，其中包括信息的收集：加工和传递以及在掌握信息基础上的决策。经济系统中存在多种控制模式，它们之间虽然存在相互联系，但各类模式还是具有一定的独立性。

经济系统中控制模式的区分，主要根据下列准则：

*1984年5月3日收到。

（1）组织机构：由哪一类经济组织实施对经济行为的控制？

（2）信息结构：实施控制需要哪一类主要信息？与信息通道相联接的又是哪一些经济组织？

（3）行为法则：经济系统对各类信息输入的响应函数的形式。

（4）目标函数：实施控制的经济组织所追求的目标形式。

由以上准则我们可以将经济系统中的控制模式区分为计划调节和市场调节。

计划调节又可以区分为二类。第一类为指令性计划，即通过指令实现对经济系统的控制。计划一经下达就必须执行，对生产企业具有强制力。其组织结构是集中和递阶的，在中央与生产企业之间存在着多级的中间指令性组织。它的信息结构的特征为信息的上下流动：上级向下级发出各类指令，下级向上级报告执行结果，中央根据下级提供的信息作出最终决策。它的短期行为法则是：若下级的报表中某项产品出现短缺，则上级的指令就要求增加该短缺产品的生产。反之亦然。在社会主义国家中，非常重视中、长期国民经济规划的作用，目前在发展中国家甚至发达的资本主义国家，也开始重视这一点。这种控制模式的目标函数为追求公众最大的物质和精神利益。

第二类计划调节方式为指导性计划。这类计划对生产企业不具有强制力。它不同于指令性计划主要是通过行政手段加以实施，而是往往通过一些重要的经济杠杆（如信贷、税收）实行调节。

市场调节的重要特点是经济活动受价值规律的调节，我们称这类控制模式为价格控制。它的组织结构是完全分散的，所有的生产单位与消费单位法律上不存在高低之分。实施控制所需的主要信息是价格。当供过于求时，价格会下降；而当供不应求时，价格就上升。在这种模式中，生产单位的行为法则是：当某产品的价格上升，他们就扩大该项产品的生产量，反之则减少款项产品的生产量。消费单位的行为法则是：当某产品的价格上升时，他们就减少该产品的消费量，并尽可能用其他消费品来替代；反之则增加该产品的消费量。生产单位的目标函数为追求最大利润；消费单位的目标函数为追求最大效用。

市场经济就是为满足市场需要而生产的经济。当价格不变时，市场需要也可能变化。因而在市场调节中还需要运用另一类控制模式，称之为自治控制。它还可以区分为若干种子模式，其中最重要的有二类。其一是由库存量信息（以下简称存量信息）实施的控制。生产单位可以利用产品与原材料的存量信息，实施对生产与进货的反馈控制：产品的存量增大了，就减少生产量。原材料的存量增大了，就减少进货量。消费单位在购置商品时，也应用

同样的逻辑。另一类自治控制的子模式是通过广告，双方洽谈直至签订合同，实现产销见面，直接进货。

自治控制总是发生在较低级的经济组织中，毋需上级组织的行政干预，具有局部的性质。在第一类子模式中，信息和决策过程发生在单个的经济细胞中。在第二类子模式中，则发生在相邻的二个经济细胞中。

正如生命组织的一些基本功能（呼吸、消化、血液循环等）并不受中枢神经系统的控制而是受植物神经系统的自治控制那样，经济系统的一些基本功能也是通过自治控制实现的。这里以匈牙利的经济改革为例加以说明。自一九六八年起，在匈牙利的经济中国家计划的指令性控制被减少了。自那以后，在经济领域中，市场平衡的调节仅有一小部分是由制订价格的机构所控制。尽管如此，经济管理中并未出现真空。正是由于自治控制模式的作用，匈牙利的经济得以顺利的发展。目前我国经济改革中的一条重要措施，是扩大企业的自主权，并强调了以市场调节来做为计划调节的补充。因而对自治控制模式的研究，应当引起重视。

表1中列出了各类控制模式的主要特征。

二、经济系统的一般数学模型

为了分析经济系统，首先需要对这类系统建立描述生产、流通和消费过程的数学模型。

假设经济系统中共有n种产品和m种天然资源，又假设系统中共有M个消费单位和（$N+1$）个生产单位，其中标号为0的生产单位指的是大自然，它生产着天然资源。系统方程是动态的，即与时间变量t有关。为了书写简便起见，一般省略了下标t。

(1)各类变量

系统中的生产单位共有三类存量：产品的存量、原材料的存量和天然资源的存量。消费单位共有n种产品的存量，分别用下列符号表示：

P_{ij}：第i个生产单位的第j个产品的存量，即它的产出存量（$i=1, 2, \cdots N$, $j=1, 2, \cdots n$）；

q_{ij}：第i个生产单位的第j种原料的存量，即它的投入存量（$i=1, 2, \cdots N$, $j=1, 2, \cdots n$）；

r_{ih}：第i个生产单位的第h种天然资源的存量（$i=0, 1, 2, \cdots, N$, $h=1, 2, \cdots, m$）；

W_{ij}：第i个消费单位的第j种产品的存量（$i=1, 2, \cdots, M$, $j=1, 2,$

表1 各类控制模式的特征

	计划调节		市场调节		
	1	2	3	4 A	4 B
	指令性计划	指导性计划	价格控制模式	自治控制模式 买、卖方直接接触	自治控制模式 存量信息控制
组织机构	集中递阶	集中递阶	分散 买、卖方共同活动	分散 买、卖方直接接触	分散 基层组织
信息结构	向下：指令 向上：报表	向下：计划指标 经济杠杆 向上：报表	价格	需求与供给可能性的直接信息	存量信息
生产单位的行为法则	指令⟶ 完成指令	计划指标 经济杠杆⟶ 生产单位的计划安排	价格变化⟶ 投入、产出变化	买方的信息⟶ 生产单位的计划安排	存量变化⟶ 投入、产出变化
生产单位的目标函数	完成指令	参照计划指标 增加物质利益	增加企业利润	企业顺利经营	

$\cdots, n$）。

存量的多少分别与生产、流通和消费各个环节有关。因而需要定义下列变量：

(a)生产

y_{ij}：第i个生产单位的第j种产品的产出量（$i=1, 2, \cdots N, j=1, 2, \cdots n$；

u_{ij}：第i个生产单位所消耗的第j种产品的投入量（$i=1, 2, \cdots N, j=1, 2, \cdots n$）；

v_{ih}：第i个生产单位所消耗的第h种天然资源的投入量（$i=1, 2, \cdots N, h=1, 2\cdots m$）。

(b)流通

l_{ikj}：第i个生产单位从第k个生产单位购得的第j种产品量（$i=1, 2, \cdots N, k=1, 2, \cdots N, j=1, 2\cdots n$）；

S_{ikj}：第i个消费单位从第k个生产单位购得的第j种产品量（$i=1, 2, \cdots M, k=1, 2, \cdots N, j=1, 2, \cdots n$）；

Z_{ikh}：从第k个生产单位到第i个生产单位的第h种天然资源的流通量（$h=1, 2, \cdots, m, k=1, 2, \cdots, N, i=1, 2, \cdots N$）。

(c)消费

g_{ij}：第i个消费单位所消耗的第j种产品量（$i=1, 2, \cdots M, j=1, 2, \cdots n$）。

(2)存量方程可用下列的离散方程来描述：

$$\left.\begin{aligned}
P_{ij}(t+1) &= P_{ij}(t) + y_{ij}(t) - \sum_{k=1}^{N} l_{kij}(t) - \sum_{k=1}^{M} S_{kij}(t) \\
q_{ij}(t+1) &= q_{ij}(t) + \sum_{k=1}^{N} l_{ikj}(t) - u_{ij}(t) \\
r_{ih}(t+1) &= r_{ih}(t) + \sum_{k=0}^{N} Z_{ikh}(t) - u_{ih}(t) \\
w_{ij}(t+1) &= w_{ij}(t) + \sum_{k=1}^{N} s_{ikj}(t) - g_{ij}(t)
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

式中存量指的是时刻t的存量；式子右边的其它变量指的是时间间隔($t, t+1$)内生产、消费和流通量的总和。

对流通过程，应满足下列二个恒等式：

$$\left.\begin{aligned} l_{kij} &= -l_{ikj} \\ Z_{ikh} &= -Z_{kih} \end{aligned}\right\}(2)$$

(3)投入函数

生产中的投入量显然与产出量有关，一般具有下列函数关系：

$$\left.\begin{aligned} u_{ij} &= u_{ij}(y_{i1},\ y_{i2},\ \cdots,\ y_{in},\ t) \\ v_{ih} &= v_{ih}(y_{i1},\ y_{i2},\ \cdots,\ y_{iu},\ t) \end{aligned}\right\}\quad(3)$$

(4)行为法则

对生产单位来说，需合理安排生产量和原材料的进货量。行为法则可用下列函数关系来表明：

$$\left.\begin{aligned} y_{ij} &= \xi_{ij}(p_{ij},\ \sum_{k=1}^{N} l_{kij}+\sum_{k=1}^{M} S_{kij},\ t) \\ \sum_{k=1}^{N} l_{ikj} &= \eta_{ij}(q_{ij},\ u_{ij},\ t) \\ \sum_{k=0}^{N} Z_{ikh} &= \xi_{ih}(r_{ih},\ v_{ih},\ t) \end{aligned}\right\}(4)$$

上列方程指出：生产量应由产品存量与对该产品的需求量来确定，原材料的进货量应由原材料的存量与生产中所需的投入量来确定。

消费单位的行为法则可用下列函数来表明：

$$\sum_{k=1}^{N} S_{ikj} = \varrho_{ij}(w_{ij},\ g_{ij},\ t) \qquad (5)$$

该方程指出，消费单位采购的商品量，应由存量与实际的消费需要来确定。

(5)生存条件：

一个生产单位在组织正常的生产和一个消费单位在维持正常的生活时，都需满足一定的条件。这些条件叫做生存条件。下面是基本的生存条件：

$$\left.\begin{aligned} & y_{ij} \geqslant 0 \\ & p_{ij} \geqslant 0,\ q_{ij} \geqslant 0,\ w_{ij} \geqslant 0 \\ & r_{ih} - v_{ih} \geqslant 0 \\ & r_{0h} \geqslant 0 \end{aligned}\right\}\quad(6)$$

三、两种控制模式的系统分析

采用列昂惕夫投入-产出法的一些假设,可把上节的一般数学模型进行简化。他所采用的假设是:

（Ⅰ）只有一个消费单位，即$M=1$。

（Ⅱ）第i种产品只存在一个生产单位，即$N=n$。

（Ⅲ）不需考虑天然资源为有限的情况，即$m=0$。

（Ⅳ）生产过程中的投入量与产出量成比例，即$u_{ij}=F_{ij}y_j$。F_{ji}叫做投入系数。

采用了这些假设后，上节中的式(1)—式(3)可以简化成下列形式:

(1) 存量方程

$$\left.\begin{aligned}
&P_i(t+1)=P_i(t)+y_i(t)-\sum_{k=1}^{n}L_{ki}(t)-S_i(t)\\
&q_{ij}(t+1)=q_{ij}(t)+L_{ij}(t)-u_{ij}(t)\\
&w_i(t+1)=w_i(t)+S_i(t)-g_i(t)
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

(2) 投入函数

$$u_{ij}(t)=F_{ji}(t)y_i(t)\qquad(8)$$

为了将式(7)和式(8)改写成向量形式，首先定义下列向量和矩阵:

$$\left.\begin{aligned}
&P\triangleq(P_1,\ P_2,\ \cdots P_n)^T,\\
&q\triangleq(q_{11},\ q_{12},\cdots q_{1n},\ q_{21},\ q_{22},\cdots q_{2n},\cdots q_{n1},\ q_{n2},\cdots q_{nn})^T,\\
&W\triangleq(W_1,\ W_2,\ W_n)^T\\
&y\triangleq(y_1,\ y_2,\ \cdots y_n)^T\\
&L\triangleq(L_{11},\ L_{12},\cdots L_{1n},\ L_{21},\ L_{22},\cdots L_{2n},\cdots L_{n1},L_{n2},\cdots L_{nn})^T\\
&S\triangleq(S_1,\ S_2,\ \cdots S_n)^T\\
&u\triangleq(u_{11},\ u_{12},\cdots u_{1n},\ u_{21},\ u_{22},\cdots u_{2n},\cdots u_{n1},\ u_{n2},\cdots u_{nn})^T\\
&g\triangleq(g_1,\ g_2,\ \cdots g_n)^T
\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

$$\left.\begin{array}{l} I^* \triangleq [\,I_n,\ I_n \cdots I_n\,] \quad \in E^n \times E^{n^2} \\ F^* \triangleq \begin{pmatrix} F_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ F_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_{n1} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & F_{12} & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & F_{22} & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & F_{n2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & F_{1n} \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & F_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & F_{nn} \end{pmatrix} \in E^{n^2} \times E^n \end{array}\right\} \quad (10)$$

这样，式(7)和式(8)便可改写为：

$$\left.\begin{array}{l} P(t+1) = P(t) + y(t) - I^* L(t) - S(t) \\ q(t+1) = q(t) + L(t) - F^*(t) y(t) \\ W(t+1) = W(t) + S(t) - g(t) \end{array}\right\} \quad (11)$$

并写出下列状态方程：

$$\begin{bmatrix} P(t+1) \\ q(t+1) \\ W(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_{n^2} & 0 \\ 0 & 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(t) \\ q(t) \\ W(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_n & -I^* & -I_n \\ -F & I_{n^2} & 0 \\ 0 & 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ L(t) \\ S(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_n \end{bmatrix} g(t) \quad (12)$$

(3) 行为法则：

上节中的式(4)是用来描述行为法则的一般函数，用以说明经济系统中供应与需求的调节关系。不同的控制模式具有不同的行为法则。在指令性控制模式中，生产计划是上级下达的，即 $\hat{y}(t)$ 是由上级规定的。事实上，在应用投入-产出法时，应首先确定最终需求量 $\hat{g}(t)$，并给出投入系数矩阵的估计值 $\hat{F}(t)$，然后可由下式确定 $\hat{y}(t)$：

$$\hat{y}(t) = (I - \hat{F})^{-1} \hat{g}(t) \quad (13)$$

显然，合理的原材料进货量应为：

$$L(t) = \hat{F}^* \hat{y}(t) = \hat{F}^* (I - \hat{F})^{-1} \hat{g}(t) \quad (14)$$

假若生产是严格按照计划进行的，则 $y(t) = \hat{y}(t)$。须注意到在式(13)

和式(14)中所引入的投入系数矩阵$\hat{F}$和$\hat{F}^*$，是包含了估计误差的；并且消费单位的实际购货量$S(t)$，大部分是不列入国家计划的。目前，我国实行票证计划供应的商品已经是少量的了；例如，随着经济的发展，棉布和猪肉等商品目前已经不需要票证了。

将式(13)和(14)代入状态方程(12)，经化简后可得：

$$\begin{bmatrix} P(t+1) \\ q(t+1) \\ W(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_{n^2} & 0 \\ 0 & 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(t) \\ q(t) \\ W(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{g}(t) - S(t) \\ (\hat{F}^* - F^*)y(t) \\ S(t) - g(t) \end{bmatrix} \tag{15}$$

显然，方程(15)有(n^2+2n)重特征根($\lambda=1$)，因而系统处于临界稳定。方程(15)的解可写为：

$$\left.\begin{aligned} P(t) &= P(0) + \sum_{k=0}^{t-1} [\hat{g}(k) - S(k)] \\ q(t) &= q(0) + \sum_{k=0}^{t-1} (\hat{F}^* - F^*) y(t) \\ W(t) &= W(0) + \sum_{k=0}^{t-1} [S(k) - g(k)] \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

由式(16)可以推断：在经济系统中可能会出现下列情况：或是某种商品的存量不断增大，造成大量积压；或是某种商品的存量不断减少，造成供不应求。当经济系统仅采用第一种控制模式时，这是很难避免的一种现象。

解决办法之一是利用价格杠杆调节供求关系。对于这种模式，本文将不予详细讨论。

另一个解决办法是利用存量信息实施自治控制。由于存量的变化是由供求不平衡所造成，因而利用存量信息对经济活动进行反馈控制，可以改善供求的不平衡。应用这种控制模式时，可以选择下列行为法则：

$$\left.\begin{aligned} y(t) &= y(t-1) + I^*L(t) - I^*L(t-1) + S(t) - S(t-1) \\ &\quad + K_1[P(t) - P^*] + K_2[P(t-1) - P^*] \\ L(t) &= L(t-1) + \hat{F}^* y(t) - \hat{F}^* y(t-1) + K_3[q(t) - q^*] \\ &\quad + K_4[q(t-1) - q^*] \\ S(t) &= S(t-1) + g(t) - g(t-1) + K_5[W(t) - W^*] \\ &\quad + K_6[W(t-1) - W^*] \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

式中K_1-K_6为定常的反馈系数矩阵。P^*、q^*和W^*为规定的正常存量水平。

为了求解方便起见，假设投入系数矩阵没有估计误差，即$\widehat{F}^*=F^*$。将行为法则式(17)和状态方程(12)联立,便可进行求解。首先由式(17)解得：

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ L(t) \\ S(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n-I^*-I_n & & \\ -F^* & I_{n2} & 0 \\ 0 & 0 & I_n \end{pmatrix}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} K_1+I_n & 0 & 0 \\ 0 & K_3+I_{n2} & 0 \\ 0 & 0 & K_5+I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(t)-P^* \\ q(t)-q^* \\ W(t)-W^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_2-I_n & 0 & 0 \\ 0 & K_4-I_{n2} & 0 \\ 0 & 0 & K_6-I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(t-1)-P^* \\ q(t-1)-q^* \\ W(t-1)-W^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix} \right\} \quad (18)$$

将式(18)代入式(12)，便得：

$$\begin{pmatrix} P(t+1) \\ q(t+1) \\ W(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1+2I_n & 0 & 0 \\ 0 & K_3+2I_{n2} & 0 \\ 0 & 0 & K_5+I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(t)-P^* \\ q(t)-q^* \\ W(t)-W^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_2-I_n & 0 & 0 \\ 0 & K_4-I_{n2} & 0 \\ 0 & 0 & K_6-I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(t+1)-P^* \\ q(t+1)-q^* \\ W(t+1)-W^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P^* \\ q^* \\ W^* \end{pmatrix} \quad (19)$$

我们希望通过适当选择矩阵K_1-K_6，使得当$t\to\infty$时，$P(t)\to P^*$，$q(t)\to q^*$，$W(t)\to W^*$。这实质上就是现代控制理论中的极点配置问题。

由于我们假定了$\widehat{F}=F$，因而式(19)中的向量P、q和W已经解耦（当$\widehat{F}\neq F$时，系统不能解耦）。下面以产品的存量P为例讨论如何选择反馈系数矩阵K_1和K_2。

由式(19)可知：

$$P(t+1)=(K_1+2I_n)[P(t)-P^*]+(K_2-I_n)[P(t+1)-P^*]+P^* \quad (20)$$

这个二阶差分向量方程,可以通过扩充状态向量,写成典范的状态方程。首先定义状态向量。

$$x(t)\triangleq\begin{bmatrix} P(t)-P^* \\ P(t-1)-P^* \end{bmatrix} \quad (21)$$

则式(20)可写成下列形式：

$$x(t+1)=\begin{bmatrix} K_1+2I_n & K_2-I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}x(t) \quad (22)$$

其中K_1和K_2均选为对角阵，即

$$\left.\begin{aligned} K_1&=diag\ \{k_{11},\ k_{12},\ \cdots k_{1n}\} \\ K_2&=diag\ \{k_{21},\ k_{22},\ \cdots k_{2n}\} \end{aligned}\right\}(23)$$

选取对角阵是符合经济系统中的实际情况的。若不选取对角阵，则会产生关联：即决定某一产品的生产水平时需了解其他各产品的存量信息，这是很难考虑的。

如果选取系统的极点为

$$\left.\begin{aligned}\lambda_{1i}&=\gamma_{li}cos\theta_{li}+i\gamma_{li}Ain\theta_{li}\\ \lambda_{2i}&=\gamma_{li}cos\theta_{li}-i\gamma_{li}Ain\theta_{li}\end{aligned}\right\}\qquad(24)$$

则系统的解为：

$$P_i(t)=P_i^*+(P_{oi}-P_i^*)\gamma_{li}{}^t cos\theta_{li}t;\qquad(25)$$

$$i=1,2,\cdots n$$

这相当于选取

$$\left.\begin{aligned}k_{1i}&=2\gamma_{li}cos\theta_{li}-2\\ k_{2i}&=1-\gamma_{li}{}^2\end{aligned}\right\}\qquad(26)$$

为使系统稳定，要求$-1<\gamma_{li}<1$。

至于K_3-K_6，可用同样的方法选择。从而可得：

$$\left.\begin{aligned}q_i(t)&=q_i^*+(q_{oi}-q_i^*)\gamma_{2i}{}^t cos\theta_{2i}t,\ i=1,2,\cdots n^2\\ W_i(t)&=W_i^*+(W_{oi}-W_i^*)\gamma_{3i}{}^t cos\theta_{3i}t,\ i=1,2,\cdots n\end{aligned}\right\}\qquad(27)$$

将式（25）和（27）代入式（18），便可求得$y(t)$，$L(t)$和$S(t)$的解。当$g(t)=g^*=const$时，方程的解具有下列形式：

$$\left.\begin{aligned}y_i(t)&=[(I-F)^{-1}g^*]_i+(y_{oi}-g_{oi}^*)\gamma_{li}{}^t cos\ \theta_{li}t,\ i=1,2,\cdots n\\ l_i(t)&=[F^*(I-F)^{-1}g^*]_i+\{l_{oi}-[F^*(I-F)^{-1}g^*]_i\}\gamma_{2i}{}^t cos\theta_{2i}t\\ &\qquad i=1,2,\cdots n^2\\ S_i(t)&=g_i^*+(S_{oi}-g_i^*)\gamma_{3i}{}^t cos\ \theta_{3i}t,\ i=1,2,\cdots n\end{aligned}\right\}\qquad(28)$$

在以上的讨论中，并未涉及P^*、q^*和W^*的选定方法。它们的选定应考虑两方面的因素：一方面，如果正常的库存量选得较大，当然有利于生产、流通和为消费单位服务。但另一方面，库存必须占用资金，对实物存储来说，要支出仓库储存费、耗损费和利息等，这会提高产品的成本和减少企业的赢利。决策者应该权衡这二方面的因素，拟定合理的库存水平。

四、小　结

本文介绍了三种经济控制的模式，提出了经济系统的一般数学模型。采用了列昂惕夫投入-产出法的假设，重点对自治控制模式进行了数学分析，并讨论了自治控制中的极点配置问题。一个生产企业生产什么产品，生产多少？这是经济系统中需要解决的基本问题之一。当然，对国计民生有重要关系

的一些产品，宜于采用指令性的控制模式，但对大量的其他各类产品，采用自治控制似乎能够更好地调节市场。

限于篇幅，本文对自治控制方式的分析是很初步的。还有许多问题没有进行分析，例如：

（Ⅰ）决策变量有时间滞后时；

（Ⅱ）投入系数矩阵$\hat{F}$存在估计误差时；

（Ⅲ）模型中存在随机干扰时；

（Ⅳ）生产函数为非线性时；

（Ⅴ）采用其他行为法则时；

（Ⅵ）应用多级控制时。

这些问题都值得进一步的深入讨论。

参 考 文 献

〔1〕 JAnos Kornai and Bela Martos:
"Autonomous Control of the economic system" Econometrica, Vol. 41, No, 3 (May, 1973)

〔2〕 Chow G. C:
"Analysis and control of Dynamic Economic Systems" John Wiley and Sons. New York, 1975.

The Control Mechanisms Of The Economic System And The Pole Assignment For The Autonomous Control

Zhang Zhongjun Zhou Sifu

(Shanghai Jiao Tong University)

Abstract

To decide the quantities of production and purchase for a producer is one of the fundamental problems in the economic system. The control mechanisms to tackle this problem may be divided into three classes: directive control, price control and autonomous control. In this paper, the mathematical models of the economic system are described in the form of difference equations, then an elementary analysis of the autonomous control is made with the heip of the method of pole assignment in modern control theory.