普通高等教育“十一五”国家级规划教材

微分方程数值方法

（第二版）

胡健伟　汤怀民

科学出版社
www.sciencep.com

微分方程数值方法

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

微分方程数值方法

(第二版)

胡健伟　汤怀民

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书为普通高等教育“十一五”国家级规划教材，分为常微分方程的数值解法、偏微分方程的差分方法和有限元方法三部分，共8章. 内容包括常微分方程初值问题、椭圆型方程、离散方程的数值解法、抛物型方程、双曲型方程、边值问题的变分原理与广义解、有限元方法的基本过程及其进一步的讨论.

本书在不太高的起点上循序渐进，通过一些典型有效的方法阐明构造数值方法的基本思想，尽可能精确地叙述必要的基本概念. 每章都有习题和小结，书末附有部分习题答案及提示，宜于教学和自学.

本书既可作为理工科本科生或研究生的教材，也可作为从事科学与工程计算的有关人员自学与进修的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

微分方程数值方法/胡健伟，汤怀民. —2版. —北京：科学出版社，2007
普通高等教育“十一五”国家级规划教材

ISBN 978-7-03-018539-6

I.微… II.①胡… ②汤… III.微分方程-数值计算-高等学校-教材
IV.O241.8

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第017510号

责任编辑：赵 靖／责任校对：张 琪
责任印制：张克忠／封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

化学工业出版社印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
1999年1月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2007年2月第 二 版 印张：24
2007年2月第七次印刷 字数：452 000
印数：17 201—21 200

定价：30.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈化工〉)

第二版前言

本书第一版自 1999 年初问世以来已经过去八年了. 在此期间, 我国的高等教育得到前所未有的巨大发展, 高等学校的专业设置和培养目标也作了很大调整. 除了数学类的专业, 很多理工类专业在本科或者研究生阶段都开设了微分方程数值解法方面的课程. 因此, 在本书被列入普通高等教育"十一五"国家级规划教材目录后, 为适应广大的读者面, 在修订过程中仍然设法保持原先的风格, 在不太高的起点上循序渐进, 介绍实用的数值方法.

根据本书第一版的使用情况, 修订中首先删除了一些过于繁杂的内容, 如对流扩散问题的特征差分法、变系数抛物型方程差分格式的能量方法等; 某些部分则在章节标题前加了星号, 表示不是最基本的内容. 其次, 对微分方程离散后所建立的代数方程组, 为强调一些当代数值求解方法的重要性, 将有关内容单独列成一章, 以引起读者注意. 此外, 还修改了部分习题, 使不同难度的习题都有适当的数量; 在书末新增了习题答案及提示, 以便于自学; 修订了文字, 使之更为通顺易读; 更新了参考文献, 使读者了解最新的出版物. 全书仍然分为三部分, 每一部分保持相对的独立性. 因此, 本书可以作为一门课程或者多门课程的教材使用.

本书问世以来, 广大的读者通过各种途径向我们提出了很多意见和建议. 虽然这次修订中作者做了仔细校阅和检查, 但仍然会有缺点甚至错误, 希望读者能对本书提出批评和意见, 我们将感激不尽. 科学出版社的编辑对本书的出版给予了积极的支持, 孙文昌教授和黄惠茹、廖清清两位同学为排版付出了辛勤的劳动, 谨此向他们表示衷心的感谢.

作　者

2006 年 10 月于南开大学

第一版前言

现代的科学、技术、工程中的大量数学模型都可以用微分方程来描述，很多近代自然科学的基本方程本身就是微分方程. 从微积分理论形成以来，人们一直用微分方程来描述、解释或预见各种自然现象，不断地取得了显著的成效. 遗憾的是，绝大多数微分方程 (特别是偏微分方程) 定解问题的解不能以实用的解析形式来表示. 这就产生了理论与应用的矛盾：一方面，人们列出了反映客观现象的各种微分方程，建立了大量实用的数学模型；另一方面，人们又无法得到这些方程的准确解以定量地描述客观过程.

随着电子计算机的出现和发展，解决上述矛盾的一门学科 —— 微分方程的数值方法得到了前所未有的发展和应用. 虽然常微分方程数值方法的历史可以追溯到 18 世纪，一些偏微分方程的数值方法也在 20 世纪初得到研究，但是，它们发展成为一门理论上严谨、实用上有效的学科，还是 20 世纪 50 年代以来的事. 究其原因，除了其他学科和工程技术发展的需要，电子计算机的诞生是最重要的客观条件.

自从 Galielo 系统地引进实验方法和 Newton 奠定物理学的理论基础以来，近代的科学方法一直分为实验与理论两大方面. 任何科学工具的创新，都能推动有关学科的发展，正如望远镜、显微镜带动了天文学、生物学和医学的发展，而电子计算机是一种延伸、强化人的思维和智能的工具，它的出现影响了一切科学技术领域. 它刚诞生时，著名的数学家 von Neumann 就深刻地指出这一新工具的巨大潜力，并预见计算的方法作为一项第三种科学方法的发展前景. 50 年来社会发展和科学技术进步的历史证明了这位天才科学家的预言是完全正确的. 今天，计算机的飞速发展正把计算的方法推向人类科学活动的前沿，使它成为一种重要的科学方法，特别是对科学的定量化起了重要的作用.

在科学的计算机化进程中，科学与工程计算作为一门工具性、方法性、边缘交叉性的新学科开始了自己的新发展. 由于科学基本规律大多是通过微分方程来描述的，因此，科学与工程计算的主要任务就是求解形形色色的微分方程，特别是一些大规模、非线性、几何非规则性的方程. 因此，今天需要掌握和应用微分方程数值方法的已不再限于有关专业的学生和专门从事科学与工程计算的人员. 大量从事力学、物理学、天文学方面的科研人员，航空、土木、船舶、机械、电机、地质勘探、油田开发、水文、原子能、电子、航天等领域的工程技术人员，甚至连金融工程、风险投资等非科技领域都已把这门学科作为自己领城的一种重要研究手段和方法.

特别应该指出的是，人类的计算能力决不是单方面地依赖于电子计算机，还取

决于计算方法的效率. 例如, 从 20 世纪 50 年代到 70 年代, 计算机的运算速度提高了数千倍; 但同一时期内, 解决某些椭圆型方程的计算方法效率提高了近百万倍. 又如, 从 20 世纪 60 年代中期至 80 年代初, 计算机速度提高了数百倍, 而计算二维平面粘性流的数值方法效率提高近千倍. 因此, 数值方法的发展对于提高计算能力的贡献是与新一代计算机的研制同样重要的. 在今天, 即使计算机发展速度之快往往使人预料不及, 但实际应用需求的增长更快, 仍然使人们觉得计算机还不够快、不够大, 还不能满足大规模科学与工程计算的需要, 仍然要依靠发展新的数值方法来完成更大规模的计算.

本书是作为入门性质的教材而编写的, 它不可能也不必要包罗万象. 第一部分为常微分方程初值问题的数值方法, 第二部分是求解偏微分方程的差分方法, 第三部分是有限元方法. 我们通过一些典型、常用、有效的数值方法来阐明构造数值方法的基本思想, 以使读者了解如何在电子计算机上应用这些方法数值求解一个微分方程定解问题. 另外, 我们对数值方法中一些基本概念和基本理论 (如方法的稳定性、收敛性、误差估计等) 给出尽可能精确的叙述, 使得对此感兴趣的读者在理论分析能力上得到一定的训练. 对于只是关心如何使用数值方法的读者, 最好也能粗读一下这方面的内容, 因为这些理论对使用数值方法是有指导意义的.

对多数学生而言, 大学学习是他们一生中系统学习的最后阶段. 因此, 应当创造条件减少他们对老师的依赖性, 培养和提高他们的自学能力. 所以, 本书的起点并不高, 凡是学过微积分, 并且对数值逼近、数值代数和微分方程的初步内容有所了解的读者都可以设法读懂. 在较难的地方或者容易混淆概念的地方, 我们都多做了解释, 或者结合例子予以说明. 我们认为, 课本内容应该丰富一些, 但讲授不必讲得过多, 有些内容由学生根据个人条件灵活地选择自学.

按照我们的设想, 本教材讲授时间大约需要 100 学时左右. 三大部分的内容基本上是独立的, 每一部分的后面章节也有相对独立性. 因此, 读者可以酌情选学感兴趣的部分而不必从头读起. 我们在每一章的末尾都写了该章的内容提要, 并且对正文中未能深入讨论的某些内容作必要的补充, 给出参考书目, 以利于读者自学. 每一章后都配备了习题, 以利于读者消化正文中的内容. 还应当指出, 为了培养读者的实际解题能力, 应当结合正文安排一些实习, 使读者应用学过的数值方法在计算机上算出数值结果, 并对结果作出分析.

本书初稿最初以油印讲义在南开大学使用. 编写过程中南开大学计算数学教研室的同事们给了许多帮助和支持, 听课的同学也对初稿提出了很多有益的意见. 1990 年, 南开大学出版社正式出版了此书. 近年来, 兄弟院校一些用过本书的老师和同学也提出了宝贵的意见, 并给予热情的鼓励. 此次再版, 由两作者作了全面的修订和补充, 其中第 2 章和第 4 章的一些小节是重新写的. 编写和修订过程中参考了国内外的一些教材和专著, 它们中的一些被列在本书每一部分附录的参考书目中.

作者衷心感谢科学出版社和南开大学出版社的支持，使本书得以顺利问世. 两个出版社的编辑为本书的出版都付出了辛勤的劳动，谨向他们表示最衷心的感谢.
由于笔者水平所限，书中一定有疏漏和不足之处，敬请读者批评指正.

作　者

1998 年 7 月于南开大学

目　录

第一部分　常微分方程的数值解法

第二部分 偏微分方程的差分方法

第三部分 偏微分方程的有限元方法

第一部分 常微分方程的数值解法

本书开篇，我们首先讨论常微分方程初值问题的数值方法．常微分方程作为微分方程的基本类型之一，是生产和科学发展的得力助手和工具．自然界与工程技术中的很多现象，其数学表述归结为常微分方程定解问题．很多偏微分方程问题也可以化为常微分方程问题来近似求解．因此，常微分方程的数值解法是微分方程数值分析的基础内容．由于生产和技术需要的推动，经过长时间的发展，特别是电子计算机诞生以来的大发展，常微分方程定解问题的数值解法已经比较成熟，理论是比较完善的，数值分析工作者构造了许多有实用价值的方法，并且形成了计算机软件．

常微分方程数值解法主要分为两大部分，初值问题与边值问题的数值方法．本部分只讨论初值问题，而不涉及边值问题．因为后者的典型问题与椭圆型方程边值问题具有很多相近性，我们将它放到第二部分第 2 章讨论．

第 1 章　常微分方程初值问题

本章讨论一阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = f(t,u), \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \tag{1.0.1}$$

的数值求解, 其中 f 为 t 和 u 的已知函数,u_0 为给定的初值. 为方便, 我们做如下基本假设：设函数 $f(t,u)$ 在区域:$t_0 \leqslant t \leqslant T, |u| < \infty$ 内连续, 并且关于 u 满足 Lipschitz 条件, 亦即, 存在常数 L(以后称为 Lipschitz 常数), 对所有 $t \in [t_0, T]$ 和 u_1, u_2, 有

$$|f(t,u_1) - f(t,u_2)| \leqslant L|u_1 - u_2|.$$

由常微分方程理论, 在上述基本假设下, 初值问题 (1.0.1) 在区间 $[t_0, T]$ 上有唯一解 $u(t)$, 并且 $u(t)$ 为连续可微的. 进而, 解函数 $u(t)$ 连续地依赖于初值及右端.

在常微分方程理论中, 已对某些类型的初值问题 (1.0.1) 提出了一些解析求解方法, 但都满足不了生产实践与科学技术发展的需要. 本章着重讨论初值问题 (1.0.1) 的数值解法, 它是一种具有实用价值的方法.

什么是数值解法? 它是一种离散化方法, 利用这种方法, 可以在一系列离散点 t_1, $t_2,\cdots,t_N$ 上求出未知函数 $u(t)$ 之值 $u(t_1)$, $u(t_2)$, $\cdots$, $u(t_N)$ 的近似值 $u_1, u_2, \cdots, u_N$. 自变量 t 的离散值 $t_1, t_2, \cdots, t_N$ 是事先取定的, 称之为节点, 通常取成等距的, 即 $t_1 = t_0 + h, t_2 = t_0 + 2h, \cdots, t_N = t_0 + Nh$, 其中 $h > 0$ 称为步长, 必要时, 可以改变它的大小. 而 $u_1, u_2, \cdots, u_N$ 通常称为初值问题的一个数值解.

本章 1.1 节将以最简单的数值方法为例, 说明数值解法中的基本概念和主要讨论的问题. 1.2 节讨论最常用的单步方法 ——Runge-Kutta 法, 并相应研究它的理论问题. 1.3 节导出另一类重要方法 —— 线性多步方法, 同时讨论它的使用. 1.4 节讨论线性差分方程的基本性质, 它是本章以后各节对数值方法进行理论分析的工具. 1.5 节对一般多步方法 (包括单步方法及线性多步方法) 进行理论分析, 讨论它们的收敛性问题, 并给出相应的充要条件. 1.6 节讨论舍入误差对数值解的影响, 分析数值方法的绝对稳定性质. 1.7 节将前述各节的结果推广到一阶微分方程组的情形, 并简介一类具有特殊性质的方程 —— 刚性 (stiff) 方程的数值求解问题.

1.1　基本概念　Euler 法与梯形法

本节通过 Euler 法及梯形法的讨论, 说明常微分方程数值解法中的一些基本概