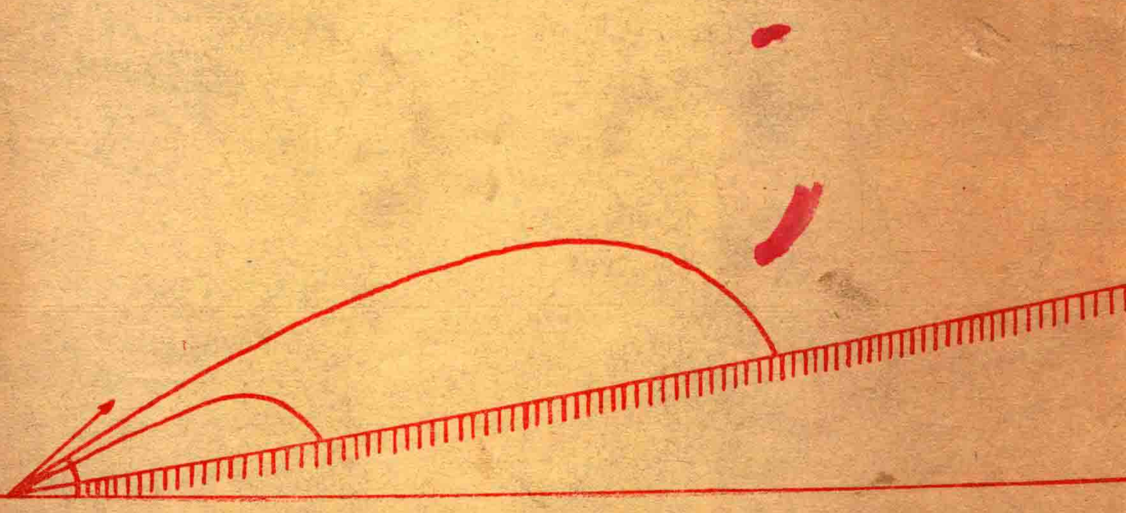
全国各省市历届

中学数学竞赛试题解答汇集



灵川县教育局教研室翻印

目　　录

〔附〕 国外中学数学竞赛试题

《数学竞赛试题汇编》序言

华 罗 庚

为了适应新形势，完成新任务，响应英明领袖华主席提出的“提高整个中华民族的科学文化水平”的伟大号召，我国科技教育战线已开始出现崭新的局面。

经国务院批准，教育部及全国科协联合举办的全国部分省、市中学生数学竞赛，已经告一段落了。在这期间，各地老师们为了培养下一代，为了向四个现代化进军，呕心沥血地出了不少试题。各方面要求把这些试题汇总出版。

这样的事，只有在华主席为首的党中央一举粉碎“四人帮”之后，在抓纲治国、拨乱反正初见成效后才会出现。其影响遍及全国，其意义之深远是难以估计的，我参与其事的体会是说不尽的，并将在另一机会讲述。在这儿只准备谈些我和同学们一同被考试后的一些体会，着重地讲讲我所领会到的部分试题的背景，但很可能限于水平，挂一漏万，不能道出出题老师们的全部心意。但想到抛砖引玉，总比藏而不露易于受到教益，因此把一些认识写在下面，敬待指教。

1. 从量地看阶级剥削

全国试题第二试第4题，是一个量地的问题。一块四边形的土地要丈量它的面积，解放以前，北方地主是用两组对边中点连线长度的乘积作为面积；而南方地主是用两组对边边长平均值的乘积作为面积。实际上，四边形真正的面积⩽两组对边中点连线长度的乘积⩽两组对边边长平均值的乘积，这也就是说，北方地主和南方地主的量法都是量大了，把面积量大了，农民就得多交租，当然是对地主有好处。而这种剥削，农民由于缺乏文化，比大斗小秤更难于发觉。

我们证明这个题目的方法是这样的：

图1

图2

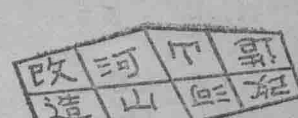


图3

把四边形沿对边中点连线划成四块(图1)，把四块搬到图2的位置，得到一个平行四边形，它的两边就是原四边形对边中点连线(这里利用了对边中点连线互相平分的性质，请同学们想一想，这点能如何简单地证明)，一个平行四边形的面积总是⩽两边边长乘积，因而我们证明了第一个不等式。在原四边形的右边并上同样的四块得到图3，利用三角形两边之和大于

第三边，就得到对边边长的平均值大于另一组对边中点连线，这样就证明了第二个不等式。

2. 物理模型与数学方法

北京试题第二试第1题，其实际背景是从光行最速原理推出入射角等于反射角；在数学上涉及了对称原理，这是一道好题目。

光线从A经B到C，A'是A的对称点，利用三角形两边之和大于第三边，可见，只有当入射角等于反射角时，$AB+BC$才取最小值。

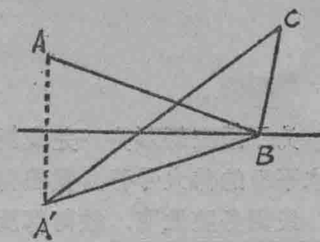


图 4

这次出全国试题时，本来想出从光行最速原理推出关于折射角的问题。虽然利用微积分的方法，这是很容易的，但由于我们没有找到适合于中学生的解法，所以没有采用。

3. 射影几何的基本定理

全国试题第二试第1题，包含了仿射几何的基本定理。苏步青教授在来信中也建议出同样性质但另一形式的题目：已知与一直线l平行的一条线段AC，今要求只用直尺不用圆规平分线段AC。作图方法如下：*

M点即平分AC。射影几何是仿射几何进一步的发展。在图5中去掉AC平行于l这一条件，就得到另一图形。(图6)

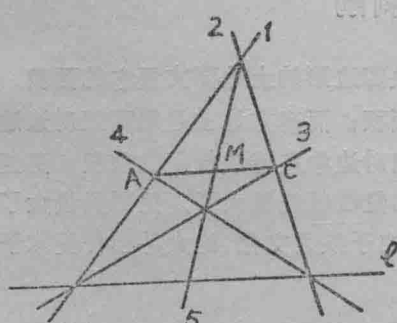


图 5

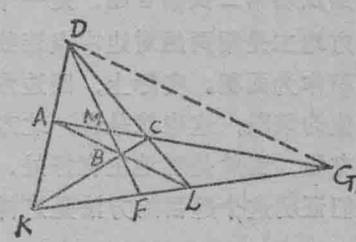


图 6

求证 $\dfrac{KF}{FL}=\dfrac{KG}{LG}$

这里就包含了射影几何的基本定理。将G点趋于无穷，图6就变为图5。

我们来证明这个题目。设$\triangle KFD$中KF边上的高为h，利用

$$2\triangle KFD面积=KF\cdot h=KD\cdot DF\cdot\sin\angle KDF$$

得到 $KF=\dfrac{1}{h}\cdot KD\cdot DF\cdot\sin\angle KDF$

*按图5所标1，2，3，4，5的顺序画直线。——本刊注

因而* $$\frac{KF}{LF}\cdot\frac{LG}{KG}=\frac{KD\cdot DF\cdot\sin\angle KDF}{LD\cdot DF\cdot\sin\angle LDF}\cdot\frac{LD\cdot DG\cdot\sin\angle LDG}{KD\cdot DG\cdot\sin\angle KDG}$$

$$=\frac{\sin\angle KDF}{\sin\angle LDF}\cdot\frac{\sin\angle LDG}{\sin\angle KDG}$$

同样可得到 $$\frac{AM}{CM}\cdot\frac{CG}{AG}=\frac{\sin\angle ADM}{\sin\angle CDM}\cdot\frac{\sin\angle CDG}{\sin\angle ADG}$$

所以 $$\frac{KF}{LF}\cdot\frac{LG}{KG}=\frac{AM}{CM}\cdot\frac{CG}{AG}$$

类似地可以证明 $$\frac{LF}{KF}\cdot\frac{KG}{LG}=\frac{\sin\angle LBF}{\sin\angle KBF}\cdot\frac{\sin\angle KBG}{\sin\angle LBG}=\frac{\sin\angle ABM}{\sin\angle CBM}\cdot\frac{\sin\angle CBG}{\sin\angle ABG}$$

$$=\frac{AM}{CM}\cdot\frac{CG}{AG}$$

由此可见 $$\left(\frac{KF}{LF}\cdot\frac{LG}{KG}\right)^2=1$$

即证得结论

图6也告诉我们，在已知K、F、L三点时，可以只用直尺不用圆规作图找到第四点G，使F“内分”KL的比等于G“外分”KL的比。

4. 凸体分割问题

安徽试题第3题是说，通过三角形重心的任意一条直线，把三角形切成的两块，其面积之比总是在$\frac{4}{5}$与$\frac{5}{4}$之间。这里我们可以想到这样一个问题，在三角形内应该选择怎样的点，使得过这点沿任意直线把三角形所切得的两块，其面积之比的变化范围最小。同学们可以证明，这点是选在三角形的重心最好。不只是三角形，平面上任意一个凸的图形，过它的重心沿任一直线把图形切成两块，其面积之比也总是在$\frac{4}{5}$与$\frac{5}{4}$之间。更进一步，我们也知道，三维空间任意一个凸体，过它的重心沿任意一个平面把凸体切成两块，其体积之比总在$\frac{27}{37}$与$\frac{37}{27}$之间，要证明这些结论，可能就出乎中学数学的范围了。

5. 规划论的一个基本原则

全国试题第二试第3题，可以一般化为下列的问题：当点(x,y)在平面上一个区域Γ(包括边界)上变动时，求一次函数$ax+by$的最大值和最小值$ax+by=p$. 当p变动时就得到一组互相平

*这里自然还应该仿照KF那样再求得LF，LG，KG的表达式。——本刊注

行的直线族，与Γ有公共点的最近边缘的两条直线l_1和l_2，就决定了$ax+by$在Γ上的最小值和最大值，可见一次函数的极值总是在Γ的边界上达到，当区域Γ是一个三角形时，就一定在顶点上达到极值，如果Γ有一条边属于直线族$ax+by=p$，则在这条边上$ax+by$的值都相等，且是最大值或最小值。

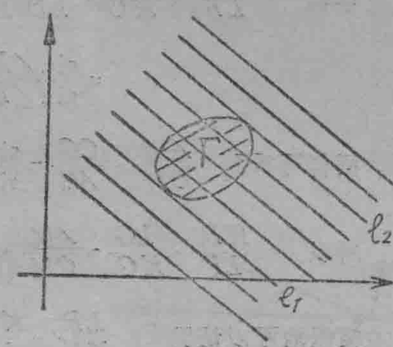


图 7

6. 分圆多项式不可分解问题

全国试题第二试第2(1)题，要分解多项式

$$F(x)=x^{12}+x^9+x^6+x^3+1$$

在复数范围内可分解为

$$F(x)=\prod_{\substack{\kappa=1\\ \kappa\neq 5,10}}^{14}\left(x-e^{\frac{2\pi i}{15}\kappa}\right),$$

在实数范围内可分解为

$$F(x)=\prod_{\substack{\kappa=1\\ \kappa\neq 5}}^{7}\left(x^2-2\cos\frac{2\kappa\pi}{15}x+1\right)$$

在整数范围内有

$$F(x)=\frac{x^{15}-1}{x^3-1}=\frac{(x^5-1)(x^{10}+x^5+1)}{x^3-1}$$

$$=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$$

在整数范围内分解$F(x)$，这是出题人的原意。在整数范围内，上面两个因子能不能继续分解？这两个多项式都是所谓“分圆多项式”，在高等数学中可以一般地证明，分圆多项式在整数范围内不可分解，我们现在用初等的方法来证明

$$f_1(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$$

和

$$f_2(x)=x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1$$

在整数范围内不可分解。

$f_1(x)$和$f_2(x)$都是$x^{15}-1$的因子，$x^{15}-1$除了1之外没有其他的实根，而1不是$f_1(x)$和$f_2(x)$的根，所以$f_1(x)$和$f_2(x)$没有实根，于是它们不可能有奇数次因子。如果$f_1(x)$和$f_2(x)$有二次因子，一定形如$x^2-2\cos\frac{2\kappa\pi}{15}x+1\ (1\leqslant\kappa\leqslant 7,\kappa\neq 5)$而这时$\cos\frac{2\kappa\pi}{15}\neq 0,\pm\frac{1}{2},\pm 1$。所以$2\cos\frac{2\kappa\pi}{15}$不是整数，因此$f_1(x)$和$f_2(x)$不可能有二次因子。这样我们就证明了$f_1(x)$不可分解，而$f_2(x)$如果能分解，只能是

$$f_2(x)=(x^4+ax^3+bx^2+ax+1)(x^4+cx^3+dx^2+cx+1)$$

（两个二项式 $x^2-2\cos\frac{2k\pi}{15}x+1$ 相乘得到的四次因子一定是上述形式）比较等式两边的系数可得

$$a+c=-1 \tag{1}$$
$$d+ac+b=0 \tag{2}$$
$$c+ad+bc+a=1 \tag{3}$$
$$2+2ac+bd=-1 \tag{4}$$

第(2)式乘2减去第(4)式得

$$(d-2)(b-2)=1$$

因而 $\quad b=d=2\pm1^*$

由第(3)式得 $\quad b=-2$

矛盾，所以 $f_2(x)$ 不可分解。

7。证明素数定理的一个工具

全国试题第二试第2(2)题，来自下列一般问题：求整数 $a_0, a_1\cdots\cdots a_n$ 使三角多项式

$$a_0+a_1\cos\varphi+\cdots\cdots+a_n\cos n\varphi>0\text{（对一切}\varphi\text{）}$$

且适合 $\quad 0<a_0<a_1 \qquad a_2\geqslant0\cdots\cdots a_n\geqslant0$

并使 $\quad a=\dfrac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{2(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_0})^2}$

最小，并求这最小值。

这个问题太难，现在给出下列诸例，

例1 $\quad n=2$

$$3+4\cos\phi+\cos2\phi=3+4\cos\phi+2\cos^2\phi-1=2(1+\cos\phi)^2\geqslant0$$

$$a=\frac{4+1}{2(2-\sqrt{3})^2}=\frac{35}{2}+10\sqrt{3}=34.82$$

例2 $\quad n=3$

$$\begin{aligned}5+8\cos\phi+4\cos2\phi+\cos3\phi&=5+8\cos\phi+4(2\cos^2\phi-1)+4\cos^3\phi-3\cos\phi\\&=4\cos^3\phi+8\cos^2\phi+5\cos\phi+1=(\cos\phi+1)\\&\quad(2\cos\phi+1)^2\geqslant0,\end{aligned}$$

$$a=\frac{8+4+1}{2(\sqrt{8}-\sqrt{5})^2}=\frac{169}{18}+\frac{26}{9}\sqrt{10}=18.52$$

例3 $\quad n=4$

$$\begin{aligned}&18+30\cos\phi+17\cos2\phi+6\cos3\phi+\cos4\phi\\&=18+30\cos\phi+17(2\cos^2\phi-1)+6(4\cos^3\phi-3\cos\phi)+(8\cos^4\phi-8\cos^2\phi+1)\end{aligned}$$

---

*因为这里假定 b 和 d 都是整数，那么 $d-2$、$b-2$ 都是整数，两者之积等于1。所以两者只能都是1或者同是 -1。不论哪种情形，必然 $b=d$。——本刊注

$$=8\cos^4\phi+24\cos^3\phi+26\cos^2\phi+12\cos\phi+2$$
$$=2[(4\cos^4\phi+4\cos^3\phi+\cos^2\phi)+(8\cos^3\phi+8\cos^2\phi+2\cos\phi)+(4\cos^2\phi+4\cos\phi+1)]$$
$$=2(\cos\phi+1)^2(2\cos\phi+1)^2\geqslant0,$$
$$a=\frac{30+17+6+1}{2(\sqrt{30}-\sqrt{18})^2}=9+\frac{9}{4}\sqrt{15}=17.71$$

例1、例2被用于素数定理的证明，例3被用于某些素数函数的上界估计中。

8. 排 序 问 题

全国试题第二试第5题，排队提水的问题，在其他一些场合也是会遇到的。例如，有一台机床要加工n个零件，每个工件需要的加工时间不一样，问应该按照什么次序加工，使总的等待时间最短，同样，如果有两台同样的机床加工n个工件，应该怎样安排加工顺序呢？在这个题目的解法中利用了一条简单而重要的引理。

（Ⅰ）引理　(a)表示非负数$a_1,a_2,\cdots\cdots a_n$

(b)表示非负数$b_1,b_2,\cdots\cdots b_n$

问题　(a)与(b)一对一对相乘后相加，何时最大，何时最小

答案　同序数最大，倒序数最小。

将(a)由小到大排为$\bar{a}_1\leqslant\bar{a}_2\leqslant\cdots\cdots\leqslant\bar{a}_n$

将(b)由小到大排为$\bar{b}_1\leqslant\bar{b}_2\leqslant\cdots\cdots\leqslant\bar{b}_n$

也就是说，$\bar{a}_1\bar{b}_1+\bar{a}_2\bar{b}_2+\cdots\cdots+\bar{a}_n\bar{b}_n$最大，$\bar{a}_1\bar{b}_n+\bar{a}_2\bar{b}_{n-1}+\cdots\cdots+\bar{a}_n\bar{b}_1$最小。

证明　若$a_i<a_j$，$b_i<b_j$则

$$a_ib_i+a_jb_j-(a_ib_j+a_jb_i)=(a_i-a_j)(b_i-b_j)>0$$

可见，在i和j两个位置上，将同序改为倒序时和值将减少，由此即可证得引理。

（Ⅱ）一个水龙头的情况，若按某一顺序放水时间依次为$a_1,a_2,\cdots\cdots a_n$则总的等待时间为

$$a_1+(a_1+a_2)+(a_1+a_2+a_3)+\cdots\cdots+(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$
$$=na_1+(n-1)a_2+\cdots\cdots+2a_{n-1}+a_n$$

在引理中取(b)$=n,n-1,\cdots\cdots,2,1$，可见依a_i由小到大的次序放水等待时间最少。

（Ⅲ）二个水龙头的情况，首先考虑两个龙头上人数相等的情况，若一个龙头上按某一顺序放水时间依次为$a_1,a_2,\cdots\cdots a_n$，另一龙头上按某一顺序放水时间依次为$a'_1,a'_2,\cdots\cdots,a'_n$，则总的等待时间为

$$na_1+(n-1)a_2+\cdots\cdots+a_n+na'_1+(n-1)a'_2+\cdots\cdots+a'_n$$
$$=na_1+na'_1+(n-1)a_2+(n-1)a'_2+\cdots\cdots+a_n+a'_n$$

在引理中取(b)为$n,n,n-1,n-1,\cdots\cdots1,1$，可见当

$$a_1\leqslant a'_1\leqslant a_2\leqslant a'_2\leqslant\cdots\cdots\leqslant a_n\leqslant a'_n$$

时，总的等待时间最少，当然使等待时间最少的排法可以不止一个。

若两个龙头上人数不等，则在人数少的龙头上添上一定个数放水时间为零的人，使人数相等，再利用上述引理。

（Ⅳ）类似地可以讨论 n 个人 r 个龙头的情况，等待时间最少的排列，就是按照放水时间由小到大的次序，依次在 r 个龙头上放水，哪个龙头上的人打完了水，后面等待着的第一人就上去打水。

9. Fareg贯问题

陕西试题第3题告诉我们，如果 p_1/q_1，p_2/q_2 为两个正分数，则 $\frac{p_1+p_2}{q_1+q_2}$ 总是界于这两个分数之间。在所谓Fareg贯的问题中就用到了这一原则。今要把分子分母互素，且分母 $\leqslant n$ 的所有分数按由小到大次序排出来。方法是这样：在 $0\left(=\frac{0}{1}\right)$ 和 $1\left(=\frac{1}{1}\right)$ 之间插入中项 $\frac{1}{2}$，再在 $0\left(=\frac{0}{1}\right)$ 与 $\frac{1}{2}$ 之间插入中项 $\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$ 与 1 之间插入中项 $\frac{2}{3}$，这样不断地在相邻两数之间插入中项，直到所有相邻数分母之和都大于 n 时为止，这样就得到了 n 阶Fareg贯。

（引自《中学理科教学》1978年第5期）

北京市1964年数学竞赛题解

高 二 第 一 试

1. 求证

$$\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)=2\operatorname{cosec}\theta.$$

证1：$\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)=\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}-\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)\left(1+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)$

$$=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}+\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{\cos\theta}{\frac{1}{2}\sin\theta}\cdot\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{2}{\sin\theta}$$

$$=2\operatorname{cosec}\theta.$$

证2：$\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)$

$$=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}\left(1+\frac{2\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}\right)=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\sec^2\frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}=\frac{2}{\sin\theta}=2\operatorname{cosec}\theta.$$

2. 化简$\log_a\left[\left(\dfrac{m^4n^{-4}}{m^{-1}n}\right)^{-3}\div\left(\dfrac{m^{-2}n^2}{mn^{-1}}\right)^5\right]$，这里$m$、$n$和$a$都是正数，$a\neq1$。

解：$\log_a\left[\left(\dfrac{m^4n^{-4}}{m^{-1}n}\right)^{-3}\div\left(\dfrac{m^{-2}n^2}{mn^{-1}}\right)^5\right]=\log_a[(m^5n^{-5})^{-3}\div(m^{-3}n^3)^5]$

$$=\log_a(m^{-15}n^{15}\div m^{-15}n^{15})=\mathrm{tog}_a1=0.$$

3，已知E为圆内两弦AB和CD的交点（图1）。直线$EF\parallel CB$，交AD的延长线于F，FG切圆于G。求证$EF=FG$。

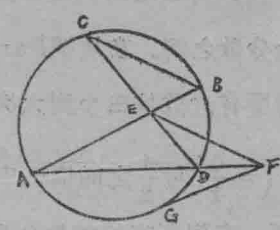


图 1

证：在$\triangle DFE$与$\triangle EFA$中$\angle DFE=\angle EFA$，

$\angle FED=\angle C=\angle A$，

所以　$\triangle DFE\backsim\triangle EFA$。

由此　$\dfrac{FE}{FA}=\dfrac{FD}{FE}$。

进而　$FE^2=FD\cdot FA$。　　(1)

因为FG为圆的切线，FDA为圆的割线，所以

$FG^2=FD\cdot FA$。　　(2)

比较(1)和(2)，得

$FE^2=FG^2$。

因而　$FE=FG$。

4．已知某二次三项式当$x=\dfrac{1}{2}$时取得极值25；这个二次三项式的两根的立方和等于19。求这个二次三项式。

解1：由第一个已知条件得知，这个二次三项式的首项系数不等于0，而且可以写作

$$a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+25.\qquad(1)$$

令它等于0，解得　$x_1=\dfrac{1}{2}+\sqrt{\dfrac{25}{-a}}$，　$x_2=\dfrac{1}{2}-\sqrt{\dfrac{25}{-a}}$。

于是　$x_1+x_2=1$，$x_1x_2=\dfrac{1}{4}+\dfrac{25}{a}$。

所以　$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]=1-3\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{25}{a}\right)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{75}{a}$。

由第二个已知条件，得$\dfrac{1}{4}-\dfrac{75}{a}=19$。

所以　$a=-4$。

代入(1)化简，得　$-4x^2+4x+24$。

因为二次项系数是负的，所以25是极大值。

解2：假设二次三项式是ax^2+bx+c。因为它有极值，所以$a\neq0$。因为，我们知道，$x=\dfrac{-b}{2a}$时它出现极值，所以

$$-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}.$$

即 $\quad b=-a$。 (1)

既然$b=-a$，这二次三项式便可以写作

$$ax^2-ax+c。\qquad (2)$$

因为 $x=\frac{1}{2}$时，它等于25，所以

$$\frac{a}{4}-\frac{a}{2}+c=25,$$

即 $\quad -a+4c=100$。 (3)

从(2)来看，假设它的两根是x_1、x_2，那么

$$x_1+x_2=1, \qquad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

由此 $\quad x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=1-\frac{3c}{a}$。

由第二个已知条件，得 $1-\frac{3c}{a}=19$。

由此解得 $\quad c=-6a$。 (4)

代入(3),求得 $\quad a=-4$。

从(1)和(4)求得 $\quad b=4,\ c=24$。

所以，所求的二次三项式是$-4x^2+4x+24$，而且25是极大值。

高 二 第 二 试

1．假设$\triangle ABC$的$\angle A\geqslant 90°$，靠着$\triangle ABC$的边BC作内接正方形B_1DEC_1（如图2）。在$\triangle AB_1C_1$内靠着B_1C_1再作内接正方形$B_2D_1E_1C_2$。这样继续作任意有限个正方形。证明所有这些正方形的面积的和小于$\triangle ABC$的面积的一半。

证1：先证正方形B_1DEC_1，$B_2D_1E_1C_2$，…的面积各不大于梯形B_1BCC_1，$B_2B_1C_1C_2$，…的面积的一半。例如，在梯形B_1BCC_1中作$B_1C'\parallel AC$交BC于C'（图2），这时

$$\angle BB_1C'=\angle A\geqslant 90°.$$

若以BC'为直径作圆，点B_1应在圆周内或在圆周上，所以

$$B_1D\leqslant\frac{1}{2}BC'.$$

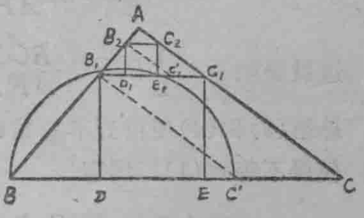


图 2

用B_1D乘这不等式的两端，得

$$B_1DEC_1\text{的面积}\leqslant\triangle B_1BC'\text{的面积},$$

或者说，$\quad \square B_1C'CC_1$的面积$\leqslant\triangle B_1BC'$的面积。

两端同加$\square B_1C'CC_1$的面积，然后除以2，得

$$\square B_1C'CC_1\text{的面积}\leqslant\frac{1}{2}(B_1BCC_1\text{的面积}).$$

所以 $\quad B_1DEC_1$的面积$\leqslant\frac{1}{2}(B_1BCC_1$的面积)；

同理　$B_2D_1E_1C_2$的面积 $\leqslant\frac{1}{2}$($B_2B_1C_1C_2$的面积)．

如果一连作 n 个正方形，便有 n 个这样的不等式，最后一个是$B_nD_{n-1}E_{n-1}C_n$的面积$\leqslant\frac{1}{2}$($B_nB_{n-1}C_{n-1}C_n$的面积)．

把这 n 个不等式的左右两端各相加，便得到

一连 n 个正方形面积的和 $\leqslant$ 一连 n 个梯形面积的和

$=\frac{1}{2}$(B_nBCC_n的面积)

$<\frac{1}{2}$($\triangle ABC$的面积)．

证 2：首先我们证明

正方形DEC_1B_1的面积 $\leqslant\frac{1}{2}$(梯形BB_1C_1C的面积)．　　(1)

为此需要先证明

$\triangle BB_1D$的面积 + $\triangle CC_1E$的面积

$\geqslant$正方形DEC_1B_1的面积．　　(2)

作$AF\perp BC$于F(图3)，则

$\triangle BB_1D$的面积 + $\triangle CC_1E$的面积

$$=\frac{1}{2}B_1D\cdot BD+\frac{1}{2}C_1E\cdot EC$$

$$=\frac{1}{2}B_1D^2\left(\frac{BD}{B_1D}+\frac{EC}{C_1E}\right)$$

$$=\frac{1}{2}B_1D^2\left(\frac{BF}{AF}+\frac{FC}{AF}\right)$$

$$=\frac{1}{2}B_1D^2\left(\frac{BC}{AF}\right).\qquad(3)$$

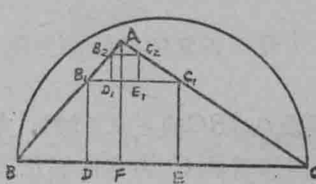


图 3

由于$\angle A\geqslant 90°$，A点应在以BC为直径的圆周内或圆周上，因此

$$AF\leqslant\frac{1}{2}BC\text{或}\frac{BC}{AF}\geqslant 2.$$

这就证明了　$\frac{1}{2}B_1D^2\left(\frac{BC}{AF}\right)\geqslant B_1D^2=$正方形$DEC_1B_1$的面积．　　(4)

总结(3)和(4)便得到不等式(2)．在这个不等式的两端都加正方形DEC_1B_1的面积再除以2，便得不等式(1)．同理

正方形$D_1E_1C_2B_2$的面积 $\leqslant\frac{1}{2}$(梯形$B_1B_2C_2C_1$的面积)．

假设我们按题意作了 n 个正方形，那么

所作 n 个正方形面积之和

$\leqslant\frac{1}{2}$(梯形BB_1C_1C的面积 + 梯形$B_1B_2C_2C_1$的面积 + … + 梯形 $B_{n-1}B_nC_nC_{n-1}$的面积)

$$=\frac{1}{2}(\text{梯形}BB_nC_nC\text{的面积})<\frac{1}{2}(\triangle ABC\text{的面积}).$$

证3：首先我们来证明正方形DEC_1B_1的面积不大于梯形BB_1C_1C的面积的一半，即

$$B_1C_1^2\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{BC+B_1C_1}{2}\cdot B_1D.$$

为此，只须证明 $3B_1C_1\leqslant BC$，

即 $\dfrac{B_1C_1}{BC}\leqslant\dfrac{1}{3}$.

作$AF\perp BC$于F(图3)，则

$$\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{AF-B_1C_1}{AF},$$

因而 $\dfrac{B_1C_1}{BC}=\dfrac{AF}{AF+BC}$.

由于$\angle A\geqslant 90°$，A点应在以BC为直径的圆周内或圆周上，因此

$$BC\geqslant 2AF.$$

从而 $\dfrac{B_1C_1}{BC}=\dfrac{AF}{AF+BC}\leqslant\dfrac{AF}{AF+2AF}=\dfrac{1}{3}$.

这样我们就证明了

$$\text{正方形}DEC_1B_1\text{的面积}\leqslant\frac{1}{2}(\text{梯形}BB_1C_1C\text{的面积});$$

同理

$$\text{正方形}D_1E_1C_2B_2\text{的面积}\leqslant\frac{1}{2}(\text{梯形}B_1B_2C_2C_1\text{的面积}).$$

假设我们按照题意作了n个正方形，那么

所作n个正方形面积之和

$$\leqslant\frac{1}{2}(\text{梯形}BB_1C_1C\text{的面积}+\text{梯形}B_1B_2C_2C_1\text{的面积}+\cdots+\text{梯形}B_{n-1}B_nC_nC_{n-1}\text{的面积})$$

$$=\frac{1}{2}(\text{梯形}BB_nC_nC\text{的面积})<\frac{1}{2}(\triangle ABC\text{的面积}).$$

证4：假定按题意作了n个正方形，设它们的边长依次为a_1，…，a_n，又设$BC=a$。作$AF\perp BC$于F(图3)。设$AF=h$，由于$BC\parallel B_1C_1\parallel B_2C_2$，可知

$$\frac{a_1}{a}=\frac{h-a_1}{h}=\frac{h}{a+h},$$

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{h-a_1-a_2}{h-a_1}=\frac{h-a_1}{h},$$

因此 $\dfrac{a_1}{a}=\dfrac{a_2}{a_1}$.

依此类推，可知 $\dfrac{a_1}{a}=\dfrac{a_2}{a_1}=\cdots=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=k$，$k=\dfrac{h}{a+h}$.

于是 $$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=a^2k^2+a^2k^4+\cdots+a^2k^{2n}$$

$$=\frac{a^2k^2-a^2k^{2n+2}}{1-k^2}<\frac{a^2k^2}{1-k^2}=\frac{a^2h^2}{(a+h)^2-h^2}=\frac{ah^2}{a+2h}.$$

由于$\angle A\geqslant 90°$，A点应在以BC为直径的圆周内或圆周上，因而$2h\leqslant a$；所以，所作n个正方形面积之和

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2<\frac{ah^2}{a+2h}\leqslant\frac{ah^2}{2h+2h}=\frac{1}{4}ah=\frac{1}{2}(\triangle ABC\text{的面积}).$$

2. 四边形$PQRS$的四边PQ，QR，RS，SP上各有一点为A,B,C,D。已知$ABCD$是平行四边形，而且它的对角线和$PQRS$的对角线(共四线)都交于一点O，证明$PQRS$也是平行四边形。

证：用反证法。假若$PQRS$不是平形四边形，它的对角线便不能互相平分，即OP，OR与OQ，OS两对线段之中至少有一对不相等。因为P、R两点，Q、S两点，P、R与Q、S两对点对于O的关系都是对等的，那么不妨假设$OP<OR$，$OQ\leqslant OS$。在线段OR、OS上分别取$OR'=OP$，$OS'=OQ$(图4)。这时$R'S'$与OC的交点C'将要落在$\triangle ORS$的内部，所以$OC'<OC$。不难证明$OC'=OA$，因此

$$OA<OC. \qquad (1)$$

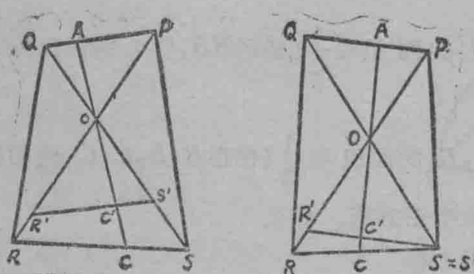


图 4

然而$ABCD$是平行四边形，对角线应当互相平分，所以

$$OA=OC. \qquad (2)$$

(1)，(2)两关系矛盾，说明PR，QS不能不互相平分，因而$PQRS$是平行四边形。

3. 试证：对于任意给定的正整数n，必有唯一的一对整数k和l，$0\leqslant l<k$，使得

$$n=\frac{1}{2}k(k-1)+l.$$

证：当$k=2,3,4,\cdots$时，$\frac{1}{2}k(k-1)$都是正整数，而且组成一个无界递增数列。对于任意正整数n，这数列中只有有限个数不大于n。把这有限个（不大于n的）数中之最大者记作$\frac{1}{2}k(k-1)$，那么

$$\frac{1}{2}k(k-1)\leqslant n<\frac{1}{2}(k+1)k,$$

由此　$0 \leqslant n-\frac{1}{2}k(k-1)$

$$<\frac{1}{2}(k+1)k-\frac{1}{2}k(k-1)=k.$$

令$l=n-\frac{1}{2}k(k-1)$，则$0\leqslant l<k$，而

$$n=\frac{1}{2}k(k-1)+l.$$

可见，合乎要求的整数k和l是存在的。

设有k_1，l_1与k_2，l_2两对整数都合乎要求，假如$k_1<k_2$，那么

$$n=\frac{1}{2}k_1(k_1-1)+l_1<\frac{1}{2}k_1(k_1-1)+k_1=\frac{1}{2}(k_1+1)k_1\leqslant\frac{1}{2}k_2(k_2-1)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}k_2(k_2-1)+l_2=n.$$

这个矛盾说明k_1不会小于k_2。同理，k_2不会小于k_1。于是$k_1=k_2$。由此

$$l_1=n-\frac{1}{2}k_1(k_1-1)=n-\frac{1}{2}k_2(k_2-1)=l_2.$$

这就是说，k_1，l_1及k_2，l_2这两对整数必定完全相同，即合乎要求的整数k，l只有一对。

4. 有纸片n^2张（n是任意正整数）。在每张上用红蓝铅笔各任意写一个不超过n的正整数，但是要使得红字相同的任意两张上所写的蓝色数字都不相同。现在把每张上的两个数相乘，证明这样得到的n^2个乘积之和总是一样的，并且求出这个和。

解：因为不同的蓝色数字最多有n种，所以不论按什么规律写成一套纸片，其中写着同样红字的纸片不能多于n张。不然的话，这些纸片上的蓝色数字势必有相同的，这就和假设矛盾了。

既然写着红1，红2，…，红n的纸片都不多于n张，必然每种恰好有n张。不然的话，一种少于n张，将有另一种多于n张，这是不可能的。

写着同样红字的n个纸片上，所写的n个蓝色数字，既然各不相同，一定是1，2，…，n。

如此说来，不论按什么规律写成一套纸片，一定是n种红字样样都有，每种有n张，每种上写的蓝字分别是1，2，…，n。这就是说，只能写成一套，所以纸片上数字乘积之和总是一样的。

写着红k的n张纸片上的数字乘积之和是

$$k\cdot1+k\cdot2+\cdots+k\cdot n=k\cdot\frac{n(n+1)}{2},$$

所以n^2张上数字乘积的和是

$$(1+2+\cdots+n)\frac{n(n+1)}{2}=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2.$$

高 三 第 一 试

1. 已知$\cos2\theta=\frac{\sqrt{2}}{3}$，求$\sin^4\theta+\cos^4\theta$的值。

解1：$\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta=1-\frac{1}{2}(1-\cos^2 2\theta)$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos^2 2\theta=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9}=\frac{11}{18}.$$

解2：由$\cos 2\theta=\frac{\sqrt{2}}{3}$得

$$1-2\sin^2\theta=\frac{\sqrt{2}}{3},\quad 2\cos^2\theta-1=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

因而　$\sin^2\theta=\frac{3-\sqrt{2}}{6},\quad \cos^2\theta=\frac{3+\sqrt{2}}{6}.$

所以　$\sin^4\theta+\cos^4\theta=\left(\frac{3-\sqrt{2}}{6}\right)^2+\left(\frac{3+\sqrt{2}}{6}\right)^2=\frac{11}{18}.$

2．已知方程

$$x^2-2x+\lg(2a^2-a)=0 \qquad (1)$$

有一个正根和一个负根，求实数a的值的范围．

解　因为(1)的两根符号相反，所以(1)中的常数项应当是负数：

$$\lg(2a^2-a)<0.$$

这便需要　$0<2a^2-a<1.$

由 $0<2a^2-a$ 解得　$a<0$　或　$\frac{1}{2}<a.$　(2)

由$2a^2-a<1$解得　$-\frac{1}{2}<a$　或　$a<1.$　(3)

(2)、(3)归纳为　$-\frac{1}{2}<a<0$　或　$\frac{1}{2}<a<1.$

这就是a应在的范围．

3．已知二面角 $M-AB-N$ 是直二面角（图5），P为棱AB上的一点，PX、PY分别在面M、N内，$\angle XPB=\angle YPB=45°$．求$\angle XPY$的大小．

解：在AB上任取一点Q；在M、N两面内分别作QR、QS垂直于PQ，交PX、PY于R、S；连RS．于是在$\triangle PQR$，$\triangle PQS$，$\triangle RQS$中有

$$\angle PQR=\angle PQS=\angle RQS=90°.$$
$$QR=QP=QS.$$

所以　$\triangle PQR\cong\triangle PQS\cong\triangle RQS.$

因而　$PR=PS=RS.$

可见$\triangle PQR$是正三角形．所以$\angle RPS=60°$．

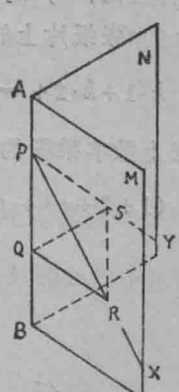


图 5

4．已知某二次三项式当$x=\frac{1}{2}$时取得极值25；这个二次三项式的两根的立方和等于19．求这个二次三项式．

解：与高二第一试第4题相同．