普通高等教育“十五”国家级规划教材

《高等数学》

配套教学参考书

主编：黄江平

航空工业出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材

《高等数学》(同济五版·上册)

配套教学参考书

主　编　黄江平
编　委　马　玲　梁　琼　桂现才
　　　　黄　梅　夏　璇

航空工业出版社

内 容 提 要

本书是同济大学应用数学系主编的《高等教学》(2002 年 7 月第五版,高等教育出版社出版)上册的配套教学参考收。本教学参考书编有《高等数学》教材的各章的《基本内容》,《学习要点》及《习题解答》三部分内容。不少题目还采用了多种解法,以启发读者思路,在解题步骤上,叙述尽量详细具体。

图书在版编目(CIP)数据

《高等数学》配套教学参考书/黄江平主编 .—北京:航空工业出版社,2004.6

ISBN 7-80134-905-9

Ⅰ.函 ... Ⅱ.黄 ...Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.0715.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 057248 号

航空工业出版社出版发行

(北京市安定门外小关东里 14 号 100029)

南昌航空工业院印刷厂印刷　　全国各地新华书店经售

2002 年 3 月第 1 版　　2004 年 6 月第 1 次印刷

开本:787×1092 1/16　　印张:16.5　　字数:411 千字

印数:1—1000　　定价:22 元

前　言

同济大学应用数学系主编的《高等数学》是一套非常优秀并获奖的教材。它具有结构严谨,逻辑清晰,叙述详细,通俗浅显的优点,被全国许多院校作为教科书。

为了在校本科生更好地学习这门课程,为了考研究生的同学更好地复习功课,同时考虑到参加自学考试人员不断增加,广大函授生、夜大生等利用业余时间学习,在既缺乏老师指导,又没有同学磋商的情况下,要独立完成学习任务,确有一定困难,为此,编写了与这本教材配套的教学参考书。

本教学参考书编有教材各章《基本内容》、《学习要点》及《习题解答》三部分内容。《基本内容》是教学大纲内容中的基本概念,基本理论和基本方法。《学习要点》是对教学大纲中不同内容作不同程度的要求。其中,"正确理解"或"熟练掌握"属于一级要求;"理解"或"掌握"属于二级要求;"了解"或"会"则属于三级要求。《习题解答》是对教材中的全部习题作出详细解答,有的题目,还采用了多种方法解答,以启发读者思路。编者由衷地期望读者能深入钻研教材,掌握基本理论,通过独立思考作出习题的解答,在此基础上,再同书上的解答进行比较对照,提高解题能力。

由于求极限的内容几乎各章节都有,微分和积分及级数概念的引进都与极限概念有密切的关系,这些概念引进后,就会反过来用这些知识来充实求极限的方法。因此,我们把求极限方法的总结,放在附录里了。

由于编者水平有限,本书对一些习题的解答可能不是最佳的,错误之处也在所难免,编者衷心希望使用本书的读者提出宝贵的批评和意见。

编　者

2004年6月

目　录

第一章　函数与极限

(一) 基本内容

函数的定义及表示方法，映射与函数，复合函数，初等函数。极限的定义及其运算法则，两个重要极限。无穷小及其有关定理，极限与无穷小的关系。函数连续性的定义，闭区间上连续函数的性质。

(二) 学习要点

1. 正确理解函数的定义，掌握函数的表示方法，理解函数的一般特性。

2. 对于给出分析表达式的函数(包括分段定义的函数)，会求出它的定义域，并能用式子或图形表示出来。

3. 对于较简单的实际问题，会建立其函数关系的分析表达式，并确定自变量取值的有效范围。

4. 熟练掌握基本初等函数的类型及其图形，理解它们的基本特性。

5. 正确理解复合函数与初等函数的概念，会把一般的初等函数拆成几个简单函数。

6. 理解数列极限的 ε-N 定义。了解单调有界数列的的性质。

7. 理解函数极限的 ε-δ(ε-N) 定义。会用定义验证简单函数的极限。如

$$\left[\lim_{x\to 1}(2x-1)=1,\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2,\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{2x-1}=\frac{3}{2}\right]$$

8. 了解左右极限的概念及函数极限存在的充要条件。

9. 理解无穷小与无穷大的概念以及它们之间的关系。

10. 掌握无穷小的性质及比较，理解等价无穷小的概念。理解变量与其极限及无穷小之间的关系。

11. 熟练掌握极限的四则运算法则以及两个重要极限。

12. 理解函数在一点连续的定义。了解函数间断点的类型。了解闭区间上连续函数的最值定理与介值定理。

13. 理解初等函数的连续性，掌握初等函数的极限的求法。

(三) 习题及解答

§1.1　函数

习题1—1　解答

1. 设 $A=(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$，$B=[-10,3)$，写出 $A\cup B$，$A\cap B$，$A\setminus B$ 及 $A\setminus(A\setminus B)$ 的表达式。

解　$A\cup B=(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$

$A\cap B=[-10,-5)$

$A\setminus B=(-\infty,-10)\cup(5,+\infty)$

$A \setminus (A \setminus B) = [-10, -5)$

2. 设 A、B、C 是任意三个集合，证明对偶律：$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

证明 设 $x \in (A \cap B)^c \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin A$ 或 $x \notin B$

$\Rightarrow x \in A^c$ 或 $x \in B^c \Rightarrow x \in A^c \cup B^c$

从而有 $$(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c \quad (1)$$

又设 $x \in A^c \cup B^c \Rightarrow x \in A^c$ 或 $x \in B^c \Rightarrow x \notin A$ 或 $x \notin B \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow x \in (A \cap B)^c$

所以有 $$A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c \quad (2)$$

由(1)、(2) 可得 $$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

3. 设映射 $f: X \to Y, A \subset X, B \subset X$，证明

(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(2) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

证明 (1) 设 $\forall y \in f(A \cup B)$ 且 $y = f(x)$

则有 $x \in A \cup B$，即 $x \in A$ 或 $x \in B$

从而 $f(x) \in f(A)$ 或 $f(x) \in f(B)$

即 $$y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$$

说明 $$f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$$

反过来，设 $\forall y \in f(A) \cup f(B)$，且 $y = f(x)$

则 $y \in f(A)$ 或 $y \in f(B)$，从而 $x \in A$ 或 $x \in B$

即 $x \in A \cup B$，于是 $y = f(x) \in f(A \cup B)$

说明了 $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$，于是 $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(2) 设 $\forall y = f(x) \in f(A \cap B)$，则 $x \in A \cap B$

故 $x \in A$ 且 $x \in B$，从而 $f(x) \in f(A)$ 且 $f(x) \in f(B)$

即 $y = f(x) \in f(A) \cap f(B)$，所以，$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

4. 设映射 $f: X \to Y$，若存在一个映射 $g: Y \to X$，使 $gof = I_X, fog = I_Y$，其中 I_X, I_Y 分别是 X、Y 上的恒等映射，即对于每一个 $x \in X, I_X x = x$，对于每一个 $y \in Y$，有 $I_Y y = y$，证明，f 是双射，且 g 是 f 的逆映射：$g = f^{-1}$。

证明 首先证明 f 是双射

$\forall y \in Y, \exists x \in X$，使得 $x = g(y), f(x) = fog(y) = y$

对于 X 中任意两个元素 $x_1, x_2, x_1 \neq x_2$，要证明 $f(x_1) \neq f(x_2)$，可用反证法，如果 $f(x_1) = f(x_2)$，则 $gof(x_1) = gof(x_2)$，即 $x_1 = x_2$ 矛盾，所以 f 是双射。根据定义 g 是 f 的逆映射，即 $g = f^{-1}$。

5. 设映射 $f: X \to Y, A \subset X$，记 $f(A)$ 的原像为 $f^{-1}(f(A))$，证明

(1) $f^{-1}(f(A)) \supset A$

(2) 当 f 是单射时，有 $f^{-1}(f(A)) = A$

证明 (1) $\forall x \in A$，则 $y = f(x) \in f(A)$，

$f^{-1}(y) = x \in \{f^{-1}(y) \mid y \in f(A)\} = f^{-1}(f(A))$

即 $A \subset f^{-1}(f(A))$

(2) 如果 f 是单射，$\forall x \in f^{-1}(f(A))$

$\exists y \in f(A)$，有 $f^{-1}(y) = x$，即 $f(x) = y$

由 $x' \in A, f(x') = y$，由于是单射，则 $x = x' \in A$

所以 $f^{-1}(f(A)) \subset A$，故 $f^{-1}(f(A)) = A$

6. 求下列函数的自然定义域:

(1) $y = \sqrt{3x+2}$； (2) $y = \dfrac{1}{1-x^2}$；

(3) $y = \dfrac{1}{x} - \sqrt{1-x^2}$； (4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$；

(5) $y = \sin\sqrt{x}$； (6) $y = \tan(x+1)$；

(7) $y = \arcsin(x-3)$； (8) $y = \sqrt{3-x} + \arctan\dfrac{1}{x}$；

(9) $y = ln(x+1)$； (10) $y = e^{\frac{1}{x}}$。

解 (1) 要使函数有定义，只须 $3x+2 \geqslant 0$，即 $x \geqslant -\dfrac{2}{3}$，故所求的函数的定义为:

$$\left[-\frac{2}{3}, +\infty\right)$$

(2) 要使函数有意义，只须 $1-x^2 \neq 0$，即 $x \neq \pm 1$，故所求的定义域为:

$$(-\infty, -1) \cup (-1,1) \cup (1, +\infty)$$

(3) 要使函数有意义，$x \neq 0$，且 $1-x^2 \geqslant 0$，即 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 且 $x \neq 0$，故所求的定义域为:

$$[-1,0) \cup (0,1]$$

(4) 要使函数有意义，需且只须 $4-x^2 > 0$，即 $-2 < x < 2$，故原函数的定义域为 $(-2,2)$

(5) 要使函数有意义，只须 $x \geqslant 0$，故定义域为 $[0, +\infty)$

(6) $x+1 \neq K\pi + \dfrac{\pi}{2}$，即 $x \neq K\pi + \dfrac{\pi}{2} - 1$，$(K = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots)$

(7) $|x-3| \leqslant 1 \quad \therefore \quad 2 \leqslant x \leqslant 4$，所求的定义域为 $[2,4]$

(8) $3-x \geqslant 0$，且 $x \neq 0$，即 $x \leqslant 3$，且 $x \neq 0$

故所求的定义域为 $(-\infty,0) \cup (0,3]$

(9) $x+1 > 0$ 即 $x > -1$，所求的定义域为 $(-1, +\infty)$

(10) 要使函数有意义，需且只须 $x \neq 0$，故所求的定义域为 $(-\infty,0) \cup (0, +\infty)$

7. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同?为什么?

(1) $f(x) = \lg x^2$，$g(x) = 2\lg x$；

解 不同，$\because$ $f(x)$ 定义域为一切非零实数，而 $g(x)$ 的定义域为 $x > 0$

(2) $f(x) = x$，$g(x) = \sqrt{x^2}$

解 不同，因为 $f(x) = x$，而 $g(x) = |x|$，当 x 为负数时，它们的值不等。

(3) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}$，$g(x) = x\sqrt[3]{x-1}$

解 相同，$\because$ $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3} = \sqrt[3]{x^3(x-1)} = x\sqrt[3]{x-1} = g(x)$

(4) $f(x) = 1$，$g(x) = \sec^2 x - \tan^2 x$

解 不同，$\because$ 定义域不相同，$f(x)$ 的定义域为一切实数，而 $g(x)$ 的定义域为 $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\cdots)$

8. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3},\end{cases}$

求 $\varphi(\frac{\pi}{6})$, $\varphi(\frac{\pi}{4})$, $\varphi(-\frac{\pi}{4})$, $\varphi(-2)$,并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的图形。

解 $\varphi(\frac{\pi}{6})=|\sin\frac{\pi}{6}|=\frac{1}{2}$,

$\varphi(\frac{\pi}{4})=|\sin\frac{\pi}{4}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\varphi(-\frac{\pi}{4})=|\sin(-\frac{\pi}{4})|=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\because |-2|>\frac{\pi}{3}$,

$\therefore\ \varphi(-2)=0$

$y=\varphi(x)$ 的图形如图所示(图 1-1-1)

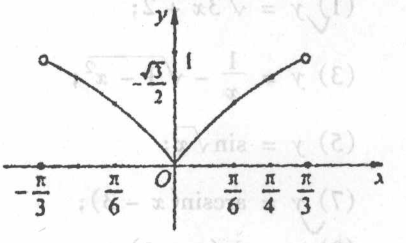

图 1-1-1

9. 试证下列函数在指定区间内的单调性:

(1) $y=\frac{x}{1-x}$, $(-\infty,1)$

证 设 $x_1,x_2\in(-\infty,1)$,且 $x_1<x_2$, $y=\frac{x}{1-x}=\frac{1}{1-x}-1$

$y_1-y_2=\frac{1}{1-x_1}-\frac{1}{1-x_2}=\frac{x_1-x_2}{(1-x_1)(1-x_2)}$

$\because 1-x_1>0,\ 1-x_2>0,\ x_1-x_2<0$

$\therefore y_1-y_2<0$ 即 $y_1<y_2$

所以 $y=\frac{x}{1-x}$ 在$(-\infty,1)$内是单调增加的。

(2) $y=x+\ln x$, $(0,+\infty)$

证 设 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$且 $x_1<x_2$

$$y_1-y_2=x_1-x_2+\ln x_1-\ln x_2=(x_1-x_2)+\ln\frac{x_1}{x_2}$$

$\because x_1<x_2$ 且 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$

$\therefore x_1-x_2<0,\ 0<\frac{x_1}{x_2}<1,\ \ln\frac{x_1}{x_2}<0$

从而 $y_1-y_2<0$,即 $y_1<y_2$

故函数 $y=x+\ln x$ 在$(0,+\infty)$内是单调增加的。

10. 设 $f(x)$ 为定义在$(-l,l)$内的奇函数,若 $f(x)$ 在$(0,l)$内单调增加,证明 $f(x)$ 在$(-l,0)$内也单调增加。

证 设 $x_1>x_2$ 是$(-l,0)$内任两个数,则 $-x_1<-x_2$ 是$(0,l)$内两个数。

按已知条件有 $f(-x_1)<f(-x_2)$

由于 $f(x)$ 是奇函数 $\therefore f(-x_1)=-f(x_1),\ f(-x_2)=-f(x_2)$

由 $f(-x_1)<f(-x_2)$ $\therefore -f(x_1)<-f(x_2)$

$\therefore$ $f(x_1)>f(x_2)$,故 $f(x)$ 在$(-l,0)$内也单调增加。

11. 设下面所考虑的函数都是定义在对称区间$(-l,l)$上的,证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数,两个奇函数的和是奇函数;

证　设 $f(x)$, $g(x)$ 是偶函数, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 是奇函数。

则
$$f(-x)=f(x),\ g(-x)=g(x)$$
$$\varphi(-x)=-\varphi(x),\ \psi(-x)=-\psi(x)$$

令 $M(x)=f(x)+g(x)$,则
$$M(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=M(x)$$

∴　两个偶函数之和是偶函数。

又令 $N(x)=\varphi(x)+\psi(x)$

则
$$N(-x)=\varphi(-x)+\psi(-x)=-\varphi(x)-\psi(x)=-N(x)$$

∴　两个奇函数之和为奇函数

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数,两个奇函数的乘积是偶函数,偶函数与奇函数的乘积是奇函数。

证　设 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 是偶函数, $f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$
$$f(-x)=f_1(-x)\cdot f_2(-x)=f_1(x)\cdot f_2(x)=f(x)$$

∴　两个偶函数的乘积是偶函数。

又设 $g_1(x)$, $g_2(x)$ 是奇函数, $g(x)=g_1(x)\cdot g_2(x)$

则 $g(-x)=g_1(-x)\cdot g_2(-x)=[-g_1(x)]\cdot[-g_2(x)]=g_1(x)\cdot g_2(x)=g(x)$

∴　两个奇函数的乘积是偶函数。

又设 $M(x)=f_1(x)\cdot g_1(x)$
$$M(-x)=f_1(-x)\cdot g_2(-x)=f_1(x)\cdot[-g_1(x)]=-f_1(x)g_1(x)=-M(x)$$

∴　偶函数与奇函数的乘积是奇函数。

12. 下列函数中哪些是偶函数,哪些是奇函数,哪些既非奇函数又非偶函数?

(1) $y=x^2(1-x^2)$

解　$y(-x)=(-x)^2[1-(-x)^2]=x^2(1-x^2)=y(x)$

∴　$y=x^2(1-x^2)$ 是偶函数

(2) $y=3x^2-x^3$

解　$y(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3$

∴　$y(-x)\neq y(x)$ 且 $y(-x)\neq -y(x)$

∴　$y=3x^2-x^3$ 是非奇非偶函数。

(3) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

解　∵　$y(-x)=\dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=y(x)$

∴　$y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ 是偶函数。

(4) $y=x(x-1)(x+1)$

解　$y(-x)=(-x)(-x-1)(-x+1)=-x(x+1)(x-1)=-y(x)$

∴　原函数是奇函数。

(5) $y=\sin x-\cos x+1$

解　$y(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1$

$\because \quad y(-x) \neq y(x)$ 且 $y(-x) \neq -y(x)$

$\therefore$ 原函数是非奇非偶函数。

(6) $y = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$

解 $y(-x) = \dfrac{a^{-x} + a^x}{2} = y(x)$

$\therefore$ 原函数是偶函数。

13. 下列函数中哪些是周期函数?对于周期函数,指出其周期:

(1) $y = \cos(x-2)$ 周期为 $T = 2\pi$

(2) $y = \cos 4x$ 周期为 $T = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$

(3) $y = 1 + \sin \pi x$ 周期为 $T = \dfrac{2\pi}{\pi} = 2$

(4) $y = x\cos x$ 非周期函数

(5) $y = \sin^2 x$ 周期 $T = \pi$ $\left(\because y = \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}\right.$,故周期 $\left.T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi\right)$

14. 求下列函数的反函数:

(1) $y = \sqrt[3]{x+1}$; (2) $y = \dfrac{1-x}{1+x}$

(3) $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad - bc \neq 0)$ (4) $y = 2\sin 3x\left(-\dfrac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{6}\right)$;

(5) $y = 1 + \ln(x+2)$; (6) $y = \dfrac{2^x}{2^x+1}$。

解 (1) 由 $y = \sqrt[3]{x+1}$ 解得 $x = y^3 - 1$,

反函数为 $y = x^3 - 1$

(2) 由 $y = \dfrac{1-x}{1+x}$ 解得 $1 - x = y + xy$

即 $x(y+1) = 1 - y$ $\quad\therefore\quad x = \dfrac{1-y}{1+y}$

反函数为 $y = \dfrac{1-x}{1+x}$

(3) 由 $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$,有 $ax + b = cxy + dy$

$$x(a - cy) = dy - b,\ x = \frac{dy-b}{a-cy}$$

故反函数为 $y = \dfrac{dx-b}{a-cx}$

(4) 由 $y = 2\sin 3x$, $3x = \arcsin\dfrac{y}{2}$, $x = \dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{y}{2}$

反函数为 $y = \dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}$

(5) 由 $y = 1 + \ln(x+2)$, $\ln(x+2) = y - 1$

$$x + 2 = e^{y-1},\ x = e^{y-1} - 2$$

故反函数为 $y = e^{x-1} - 2$

(6) 由 $y = \dfrac{2^x}{2^x+1}$, $(2^x+1)y = 2^x$

$2^x(y-1)=-y,\ 2^x=\dfrac{y}{1-y}$

$\therefore\quad x=\log_2\dfrac{y}{1-y}\qquad\therefore\quad$ 反函数为 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$

15. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义,试证:函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界。

证　必要性(以后用"$\Rightarrow$"表示必要性)

设 $f(x)$ 在 X 上有界,即存在正数 $M>0$,使

$|f(x)|\leqslant M(x\in X),\ \therefore\quad -M\leqslant f(x)\leqslant M$

此式说明 $f(x)$ 在 X 有下界 $-M$ 与上界 M。

充分性:(以后用"$\Leftarrow$"表示充分性)

设 $f(x)$ 在 X 上有下界 m 与上界 M,即

$$m\leqslant f(x)\leqslant M,\ x\in X\qquad \text{取}\quad K=\max\{|m|,|M|\}$$

则有　$-K\leqslant m\leqslant f(x)\leqslant M\leqslant K$,从而 $|f(x)|\leqslant K,\ x\in X$,这就证明了 $f(x)$ 在 X 上有界。

16. 在下列各题中,求由所给函数构成的复合函数,并求这函数分别对应于给定自变量 x_1 和 x_2 的函数值:

(1) $y=u^2,\ u=\sin x,\ x_1=\dfrac{\pi}{6},\ x_2=\dfrac{\pi}{3}$

解　$y=\sin^2x,\ y(x_1)=\sin^2\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{4}$

$y(x_2)=\sin^2\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3}{4}$

(2) $y=\sin u,\ u=2x,\ x_1=\dfrac{\pi}{8},\ x_2=\dfrac{\pi}{4}$

解　$y=\sin2x,\ y(x_1)=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt2}{2},\ y(x_2)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$

(3) $y=\sqrt{u},\ u=1+x^2,\ x_1=1,\ x_2=2$

解　$y=\sqrt{1+x^2},\ y(x_1)=\sqrt{1+1}=\sqrt2,\ y(x_2)=\sqrt{1+4}=\sqrt5$

(4) $y=e^u,\ u=x^2,\ x_1=0,\ x_2=1$

解　$y=e^{x^2},\ y(x_1)=e^0=1,\ y(x_2)=e^1=e$

(5) $y=u^2,\ u=e^x,\ x_1=1,\ x_2=-1$

解　$y=e^{2x},\ y(x_1)=e^2,\ y(x_2)=e^{-2}$

17. 设 $f(x)$ 的定义域 $D=[0,1]$,求下列各函数的定义域:

(1) $f(x^2)$;　　(2) $f(\sin x)$;

(3) $f(x+a)\ (a>0)$;　　(4) $f(x+a)+f(x-a)\ (a>0)$

解　(1) 由 $0\leqslant x^2\leqslant1,\ \therefore\ |x|<1$,即 $-1\leqslant x\leqslant1$

$\therefore\quad f(x^2)$ 的定义域是 $[-1,1]$。

(2) 由 $0\leqslant\sin x\leqslant1,\ \therefore\ x\in[2n\pi,2n\pi+\pi]$,$n$ 为整数,

$f(\sin x)$ 的定义域为 $[2n\pi,(2n+1)\pi]$,n 为整数。

(3) 由 $0\leqslant x+a\leqslant1,\ -a\leqslant x\leqslant1-a$

$\therefore$ 定义域为$[-a, 1-a]$

(4) 由$0 \leqslant x+a \leqslant 1$, $\therefore -a \leqslant x \leqslant 1-a$

由$0 \leqslant x-a \leqslant 1$, $\therefore a \leqslant x \leqslant 1+a$

从而 $a \leqslant x \leqslant 1-a$

$\therefore 1-a \geqslant a$, $a \leqslant \dfrac{1}{2}$

$\therefore$ 当$0 < a \leqslant \dfrac{1}{2}$时,函数的定义域为$[a, 1-a]$

$\therefore$ 当$a > \dfrac{1}{2}$时,函数的定义域为空集。

18. 设$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| = 1 \\ -1, & |x| > 1 \end{cases}$, $g(x) = e^x$,求$f[g(x)]$和$g[f(x)]$,并作出这两个函数的图形。

解 $\because g(x) = e^x$, $\therefore$ 当$x > 0$, $e^x > 1$, $x = 0$时, $e^x = 1$, $x < 0$, $e^x < 1$。

$\therefore f[g(x)] = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}$

$g[f(x)] = \begin{cases} e, & |x| < 1 \\ 1, & |x| = 1 \\ \dfrac{1}{e}, & |x| > 1 \end{cases}$

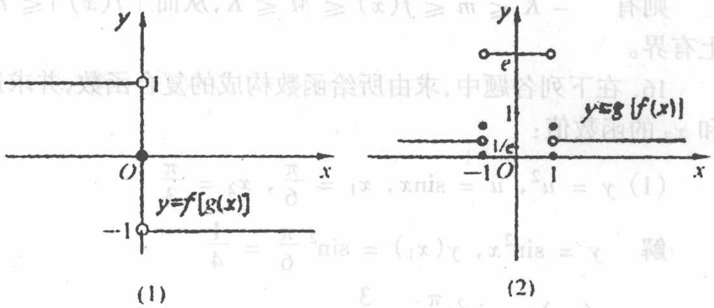

图 1-1-2

19. 已知水渠的横断面为等腰梯形,斜角$\varphi = 40°$(图1-1-3)。当过水断面$ABCD$面积为定值S_0时,求湿周$L(L = AB + BC + CD)$与水深h之间的函数关系式,并指明其定义域。

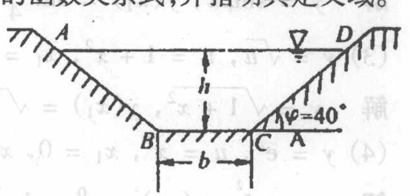

图 1-1-3

解 $S_0 = \dfrac{1}{2}(AD + BC)h$

$= \dfrac{1}{2}(2b + 2h\cot 40°)h = (b + h\cot 40°)h$

$\therefore \quad b = \dfrac{S_0}{h} - h\cot 40°$

$AB = CD = \dfrac{h}{\sin 40°}$

$\therefore \quad L = \dfrac{2h}{\sin 40°} + \dfrac{S_0}{h} - h\cot 40° = \dfrac{S_0}{h} + \dfrac{2 - \cos 40°}{\sin 40°}h$。

$\because \quad h > 0$, $b > 0$ $\therefore \dfrac{S_0}{h} > h\cot 40°$ $\quad h^2 < S_0\tan 40°$

$\therefore \quad 0 < h < \sqrt{S_0\tan 40°}$

故其定义域为$(0, \sqrt{S_0\tan 40°})$。

20. 收音机每台售价为90元,成本为60元,厂方为鼓励销售商大量采购,决定凡是订购量超过100台的,每多订购1台,售价就降低1分,但最低价为每台75元。

(1) 将每台的实际售价p表示为订购量x的函数;

(2) 将厂方所获的利润 P 表示成订购量 x 的函数；

(3) 某一商行订购了 1000 台，厂方可获利润多少？

解 (1) 由于最低价为每台 75 元，故当订购量大于 100 台后，订购量 x 应满足下式：

$$90-(x-100)\cdot 0.01 \leqslant 75 \qquad \text{解之得} \quad x \geqslant 1\,600$$

$$p=\begin{cases} 90 & 0 \leqslant x \leqslant 100 \\ 90-(x-100)0.01 & 100 < x < 1\,600 \\ 75 & x \geqslant 1\,600 \end{cases}$$

(2)
$$P=(p-60)x=\begin{cases} 30x & 0 \leqslant x \leqslant 100 \\ 31x-0.01x^2 & 100 < x < 1\,600 \\ 15x & x \geqslant 1\,600 \end{cases}$$

(3) 当订购 1000 台时，按(2) 的结论，厂方可获得

$$\begin{aligned} P &= 31x-0.01x^2=[31\times 1\,000-0.01\times 1\,000^2]\text{元} \\ &= 21\,000\text{元} \end{aligned}$$

§ 1.2 数列的极限

习题 1—2 解答

1. 观察一般项 x_n 如下的数列 $\{x_n\}$ 的变化趋势，写出它们的极限：

(1) $x_n=\dfrac{1}{2^n}$； (2) $x_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$；

(3) $x_n=2+\dfrac{1}{n^2}$； (4) $x_n=\dfrac{n-1}{n+1}$；

(5) $x_n=n(-1)^n$

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}=0$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)=2$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{1}{n}}=1$

(5) 极限不存在。

2. 设数列 $\{x_n\}$ 的一般项 $x_n=\dfrac{\cos\dfrac{n\pi}{2}}{n}$。问 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=?$，求出 N，使当 $n>N$ 时，x_n 与其极限之差的绝对值小于正数 ε。当 $\varepsilon=0.001$ 时，求出数 N。

解 显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

要 $|x_n-0|<\varepsilon$，即 $\left|\dfrac{\cos\dfrac{n\pi}{2}}{n}\right|<\varepsilon$，$\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，$n>\dfrac{1}{\varepsilon}$

$\therefore \quad N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$。

当 $\varepsilon = 0.001$ 时,可以取 $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] = 10^3 = 1\,000$,当然取 N 为大于 1 000 的数也可以。

3. 根据数列极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2} = 0$

证 $\forall \varepsilon > 0$

要 $\left|\dfrac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon$,即 $\dfrac{1}{n^2} < \varepsilon$, $n^2 > \dfrac{1}{\varepsilon}$, $n > \sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}}$。

取 $N = \left[\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}}\right]$,则 $n > N$ 时,有 $\left|\dfrac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon$ $\quad\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2} = 0$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1} = \dfrac{3}{2}$

证 要使 $\left|\dfrac{3n+1}{2n+1} - \dfrac{3}{2}\right| < \varepsilon$

即 $\left|\dfrac{6n+2-6n-3}{2(2n+1)}\right| = \dfrac{1}{2(2n+1)} < \dfrac{1}{4n} < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$

$\therefore \quad n > \dfrac{1}{\varepsilon}$

对 $\forall \varepsilon > 0$,取 $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$,则当 $n > N$ 时,有

$$\left|\frac{3n+1}{2n+1} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon$$

$\therefore \quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1} = \dfrac{3}{2}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n} = 1$

证 任给 $\varepsilon < 0$,要使 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n} - 1\right| < \varepsilon$

但 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n} - 1\right| = \dfrac{\sqrt{n^2+a^2} - n}{n} = \dfrac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)} < \dfrac{a^2}{n} < \varepsilon$

$n > \dfrac{a^2}{\varepsilon}$,取 $N = \left[\dfrac{a^2}{\varepsilon}\right]$,则当 $n > N$ 时,必有 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n} - 1\right| < \varepsilon$

$\therefore \quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n} = 1$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n个} = 1$

证 $|0.999\cdots9 - 1| = 0.00\cdots1 = 10^{-n} < \dfrac{1}{n}$

$\forall \varepsilon > 0$,要使 $|0.99\cdots9 - 1| < \varepsilon$,只要 $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$

即 $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$,于是取 $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$,当 $n > N$ 时,便总有 $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$,从而

$$|0.999\cdots9 - 1| < \varepsilon$$

$\therefore \quad \lim\limits_{n\to\infty}0.999\cdots9 = 1$

4. 若$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$，并举例说明：如果数列$\{|x_n|\}$有极限，但数列$\{x_n\}$未必有极限。

证　任给$\varepsilon>0$，$\because\ \lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，$\therefore$ 存在N，当$n>N$时，有$|u_n-a|<\varepsilon$

$\big||u_n|-|a|\big|\leqslant|u_n-a|<\varepsilon$，$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$

例如：$u_n=(-1)^n$，显然有$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=1$

而u_n极限不存在。

5. 设数列$\{x_n\}$有界，又$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$。

证　$\because\ \{x_n\}$有界，故存在$M>0$，对一切n有$|x_n|<M$。

又$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，故$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$n>N$时，$|y_n|<\dfrac{\varepsilon}{M}$

$\therefore$ 当$n>N$时，$|x_ny_n|=|x_n||y_n|<M\dfrac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$

$\therefore\quad\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$。

6. 对于数列$\{x_n\}$若$x_{2k-1}\to a(k\to\infty)$，$x_{2k}\to a(k\to\infty)$，证明：$x_n\to a(n\to\infty)$。

证　任给$\varepsilon>0$，$\because\ x_{2k-1}\to a$，$(k\to\infty)$，故$\exists k_1$，当$k>k_1$，$|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$

又$\because\ x_{2k+1}\to a$，$(k\to\infty)$，故$\exists k_2$，当$k>k_2$，$|x_{2k+1}-a|<\varepsilon$

取$N=2(k_1+k_2)$，则当$n>N$时，有

$$|x_n-a|<\varepsilon,\ \therefore\ x_n\to a\ (n\to\infty)$$

§1.3　函数的极限

习题1—3　解答

1. 根据函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to3}(3x-1)=8$

证　要$|3x-1-8|<\varepsilon$，即$|3x-9|=3|x-3|<\varepsilon$，

只须，$|x-3|<\dfrac{\varepsilon}{3}$，

$\therefore\quad\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$，则当$0<|x-3|<\delta$时，有$|3x-1-8|<\varepsilon$

$\therefore\quad\lim\limits_{x\to3}(3x-1)=8$

(2) $\lim\limits_{x\to2}(5x+2)=12$

证　要使$|5x+2-12|<\varepsilon$

即　$5|x-2|<\varepsilon$，$|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{5}$

$\therefore\quad\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}$，

当$0<|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{5}$时，有$|5x+2-12|<\varepsilon$

$\therefore\quad\lim\limits_{x\to2}(5x+2)=12$