北京市成人高等院校统编试用教材

# 线性代数与线性规划

## 学习指导

● 《经济应用数学基础》编写组 ●

同心出版社

北京市成人高等院校统编试用教材

# 线性代数与
# 线性规划学习指导

《经济应用数学基础》编写组

同心出版社

（京）新登字 214 号

图书在版编目（CIP）数据

线性代数与线性规划学习指导/《经济应用数学基础》编写组编. —北京：同心出版社，1995. 6
ISBN 7-80593-134-8

Ⅰ. 线… Ⅱ. 经… Ⅲ. ①线性代数-成人教育：高等教育-教学参考资料②线性规划-成人教育：高等教育-教学参考资料 Ⅳ. ①0151. 2②0212. 1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（95）第 03378 号

同心出版社出版、发行
（100734 北京市东单西裱褙胡同 34 号）
北苑印刷厂印刷印刷 新华书店经销
1995 年 8 月第 1 版 1995 年 8 月第 1 次印刷
850×1168 毫米 32 开本 9.75 印张
字数：253 千字 印数：1—12300 册
定价：9.50 元

# 前 言

为配合北京市成人高校统编试用教材《经济应用数学基础》的学习，我们特组织中国职工教育数学学会北京分会的部分教师编写了这套学习指导书。这套用书共分《〈微积分〉学习指导》、《〈线性代数与线性规划〉学习指导》、《〈概率论与数理统计〉学习指导》三册。

我们力图针对广大成人学员的实际需要，编写出内容充实、全面、实用性强、便于自学的辅导教材。编者把教材中的重点、难点逐一进行分析讲解。对典型例题、习题进行归纳，着重析清解题思路、方法及其规律，使广大学员掌握用数学方法分析经济现象，以提高解决实际问题的能力。

由于编者水平有限，时间仓促，书中定有不当之处，望广大教师与学员在使用中不吝指正，万分感谢。

本套教材由于仲云副教授任主编，由王培根、张学忠、何嗣玫三位副教授任副主编，刘德荫副教授、励金华教授、林士中教授主审。

本书由王黎、宋琪、张秋芝、郎蕴琳、徐军京、董力编著。

**北京市成人高等院校统编试用教材**

**《经济应用数学基础》编写组**

# 目　　录

# 第一章　矩　　阵

## 教学要求

一、确理解矩阵的概念,熟练掌握矩阵加法、数乘、矩阵乘法的运算法则及其性质.

二、了解单位矩阵、数量矩阵、阶梯形矩阵、行简化阶梯形矩阵.

三、熟练掌握矩阵初等变换的方法.会求矩阵的秩、向量组的极大无关组.会解矩阵方程.

四、正确理解可逆矩阵和逆矩阵的概念,掌握求逆矩阵的方法.

五、了解分块矩阵的原则,掌握分块矩阵的运算.

六、正确理解 $n$ 维向量、向量的线性组合、线性相关、线性无关和向量组的秩等概念,了解它们的相互关系.

七、熟练掌握用初等变换将矩阵化为阶梯形和行简化阶梯形的方法.

## 内容提要

### 一、矩阵的概念

(一) 矩阵的定义

(二) 几种特殊的矩阵:

1. 行矩阵:只有一行的矩阵称为行矩阵.如:

$$A_{1\times 5}=(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$$

2. 列矩阵:只有一列的矩阵称为列矩阵.如:

$$A_{4\times 1}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\4\end{pmatrix}$$

3. $n$ 阶方阵：当矩阵的行数与列数相等，即 $m=n$ 时，称该矩阵为 $n$ 阶方阵，记作 $A_n$. 如：

$$A_n=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

4. 对角矩阵：若在 $n$ 阶方阵中，主对角线以外的元素均为 0，则称为 $n$ 阶对角矩阵.

即：

$$A_n=\begin{pmatrix}a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}\end{pmatrix}$$

这种表示法表示没有注明的元素均为零.

5. 数量矩阵：若 $n$ 阶对角矩阵中，主对角线上的元素均相等，即 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=a$ 时，称为 $n$ 阶数量矩阵.

即：

$$A_n=\begin{pmatrix}a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a\end{pmatrix}_{n\times n}$$

6. 单位矩阵：若 $n$ 阶数量矩阵中，主对角线上的元素均为 1，即 $a=1$ 时，则称为单位矩阵.

即：

$$E_n=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}_{n\times n}$$

有的书上也将单位矩阵记为 $I_n$.

7. 三角形矩阵：

(1) 上三角形矩阵：若 $n$ 阶矩阵中，主对角线以下的元素均为零，则称为上三角形矩阵.

即：

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ & & & a_{nn}\end{pmatrix}$$

(2) 下三角形矩阵：若 $n$ 阶矩阵中，主对角线以上的元素均为零，则称为下三角形矩阵.

即：

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

8. 零矩阵：所有元素均为零的矩阵称为零矩阵. 记作 $O_{m\times n}$或简记为 $O$.

即：

$$O=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}_{m\times n}$$

9. 对称矩阵：

如：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 5 & 7 \end{pmatrix}、\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 9 & 8 \\ 0 & 9 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

均为对称矩阵.

显然，对称矩阵 $A$ 的元素关于主对角线对称.

（三）分块矩阵：将一个矩阵分成若干块（称为子块或子矩阵），以子矩阵为元素的矩阵称为分块矩阵.

如：

$$A=\left(\begin{array}{c:ccc} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 8 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & E_3 \\ & \\ A_2 & O \end{pmatrix}$$

其中 $A_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_2=(8)_2$

结构变得简单而清晰.

## 二、矩阵的运算

（一）矩阵的相等

（二）矩阵的加法

说明：

1. 只有行数与列数都相等的两个矩阵才能相加.
2. 两个 $m$ 行 $n$ 列矩阵相加的和仍然是一个 $m$ 行 $n$ 列的矩阵.
3. 加法的法则是对应元素相加.

（三）矩阵的减法

说明：

1. 只有行数与列数都相等的两个矩阵才能相减.
2. 减法的法则是对应元素相减.

（四）数与矩阵的乘法

说明：一个常数与一个矩阵相乘，法则是用常数乘以矩阵的每一个元素.

（五）矩阵的加（减）法与数乘运算的规则

1. $A+B=B+A$

2. $(A+B)+C=A+(B+C)$

3. $A+O=O+A=A$

4. $A+(-A)=O$

5. $k(A+B)=kA+kB$

6. $(k+l)A=kA+lA$

7. $(kl)A=k(lA)=l(kA)$

8. $1\cdot A=A\cdot 1=A$

其中 $A$、$B$、$C$、$O$ 为 $m\times n$ 矩阵，$k$、$l$ 为任意常数.

（六）矩阵的乘法

说明：

1. 只有当左边矩阵的列数等于右边矩阵的行数时，两矩阵才能相乘.

2. 乘积 $C$ 的行数等于左边矩阵 $A$ 的行数，列数等于右边矩阵 $B$ 的列数.

（七）矩阵乘法的运算规则

1. $(AB)C=A(BC)$

2. $A(B+C)=AB+AC$

3. $(B+C)A=BA+CA$

4. $k(AB)=(kA)B=A(kB)$

5. $EA=AE=A$

（八）方阵的幂：如果 $A$ 为 $n$ 阶方阵，$k$ 为自然数， 则：$A^k=\underbrace{A\cdot A\cdots\cdots A}_{k\text{个}}$，称为方阵 $A$ 的 $k$ 次幂.

（九）方阵幂的性质：

1. $A^k \cdot A^l = A^{k+l}$

2. $(A^k)^l = A^{kl}$

(十) 转置矩阵

(十一) 转置矩阵的运算性质

1. $(A^T)^T = A$

2. $(A+B)^T = A^T + B^T$

3. $(kA)^T = kA^T$($k$ 是常数)

4. $(AB)^T = B^T A^T$

(十二) 分块矩阵的运算

1. 加减法:在进行两个矩阵相加减时,必须注意两个矩阵的分块方法保持一致.即:

1°. 两个矩阵的行块数与列块数必须相同;

2°. 两个矩阵对应位置的子块中的行数与列数必须对应相等.

2. 乘法:在进行两个矩阵的乘法时,分块时必须使左矩阵的列分法与右矩阵的行分法保持一致.即:

1°. 左矩阵的列组数等于右矩阵的行组数;

2°. 左矩阵的每个列组所含列数等于右矩阵的相应行组所含行数.

## 三、矩阵的初等变换

(一) 矩阵的初等变换

1. 初等行变换.

2. 初等列变换.

3. 初等变换.

(二) 矩阵的几种形式

1. 阶梯形矩阵:

(1) 矩阵的零行:所有元素全为零的行.

(2) 首非零元:非零行第一个不为零的元素.

(3) 阶梯形矩阵:阶梯形矩阵必须满足以下两个条件:

1°. 矩阵的零行全在矩阵的下方；

2°. 首非零元的列标随着行标的递增而严格增大.

利用矩阵的初等变换可以把矩阵化为阶梯形.

2. 行简化阶梯形矩阵：

1°. 阶梯形矩阵；

2°. 各非零行的首非零元都是 1；

3°. 每个首非零元所在列的其余元素都是零.

**四、$n$ 维向量及其线性相关性**

（一）$n$ 维向量空间

1. $n$ 维向量.

2. 零向量：所有分量均为零的向量称为零向量，记作 $O$.

即：$$O=(0,0,\cdots,0)$$

3. 向量的相等.

4. 向量的运算：

设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots b_n)$，$k,l$ 为常数，则：

(1) $\alpha$ 与 $\beta$ 的和

$$\alpha+\beta=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$$

(2) $\alpha$ 与 $\beta$ 的差

$$\alpha-\beta=(a_1-b_1,a_2-b_2,\cdots,a_n-b_n)$$

(3) $k$ 与 $\alpha$ 的数乘

$$k\alpha=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$$

5. 向量的运算法则：

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

(3) $\alpha+O=O+\alpha=\alpha$

(4) $\alpha+(-\alpha)=O$

(5) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

(6) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

(7) $(kl)\alpha=k(l\alpha)=l(k\alpha)$

(8) $1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha$

6. $n$ 维向量空间.

(二) 线性组合与线性表出

1. 线性组合.

对于给定的向量 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$，如果存在一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，使关系式 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$ 成立，则称 $\beta$ 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的线性组合，或称向量 $\beta$ 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表出. 其中 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 称为这个线性组合的系数.

2. 线性表出：

如果向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 中任一向量都是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的线性组合，则称向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表出.

(三) 线性相关与线性无关

1. 定义　对于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s (s \geqslant 1)$，如果存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，使得关系式

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0 \qquad (*)$$

成立，则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关.

如果关系式($*$)仅当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$ 时成立，则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关.

2. 定理 6　向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s (s \geqslant 2)$ 线性相关的充分必要条件是：其中至少有一个向量可以由其余 $s-1$ 个向量线性表出.

3. 推论　向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s (s \geqslant 2)$ 线性无关的充分必要条件是：其中每一个向量都不能用其余 $s-1$ 个向量线性表出.

(四) 向量组的秩

1. 极大无关组：

若向量组的一个部分组本身是线性无关的，并且在这向量组中任意添加一个向量(如果还有的话)，所得的向量组都线性相关，则称这个部分组为向量组的一个极大无关组.

注意：

(1) 一个向量组的极大无关组不是唯一的；

(2) 向量组的极大无关组所含向量的个数是唯一的.

2. 向量组的秩：

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的极大无关组所含向量的个数称为向量组的秩.

**五、矩阵的秩**

1. 定义　矩阵的行秩或列秩,统称为矩阵的秩. 记作 $r(A)$

2. 定理

(1) 矩阵的行秩等于列秩.

(2) 矩阵的初等变换不改变矩阵的秩.

3. 推论　阶梯形矩阵的秩等于它的非零行的行数.

**六、逆矩阵**

1. 逆矩阵的定义

2. 定理 1　矩阵 $A$ 可逆的充分必要条件是 $A$ 满秩.

3. 定理 1 的推论可逆矩阵 $A$ 经过一系列初等行变换必可化为单位矩阵 $E$.

4. 定理 2　如果用一系列初等行变换将矩阵 $A$ 化为单位矩阵 $E$,则用同样的初等行变换作用于 $E$,就能将 $E$ 化为 $A$ 的逆矩阵 $A^{-1}$.

5. 解矩阵方程：

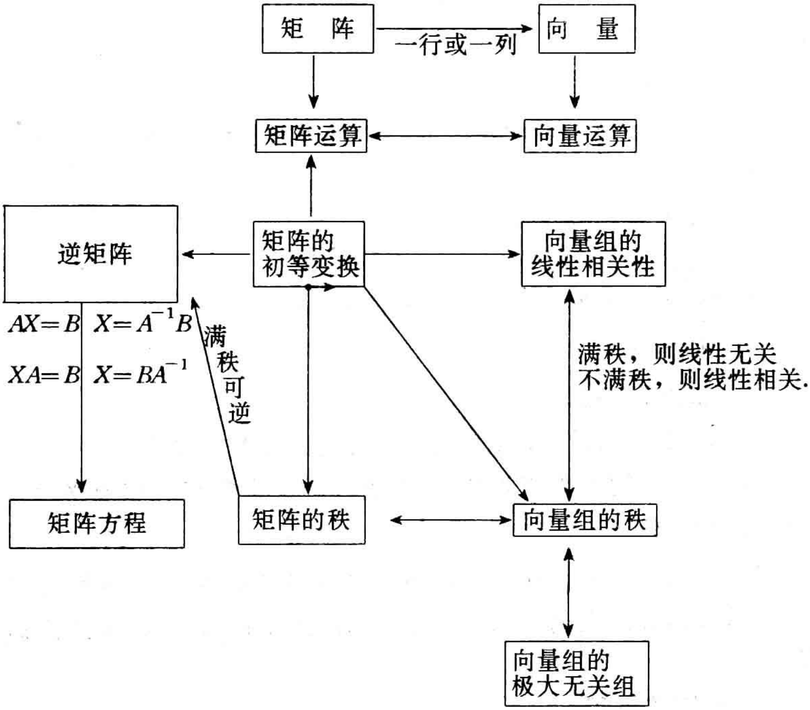
(1) 若 $AX=B$,则 $X=A^{-1}B$　($A$ 可逆)

(2) 若 $XA=B$, 则 $X=BA^{-1}$　($A$ 可逆)

(3) 若 $AXB=C$,则 $X=A^{-1}CB^{-1}$($A$、$B$ 可逆)

# 知识结构

## 一、结构图示




## 二、结构说明

（一）矩阵与向量

1. 向量是矩阵的特例：

只有一行的矩阵称为行矩阵，也可视为行向量.

只有一列的矩阵称为列矩阵，也可视为列向量.

2. 矩阵与向量的线性运算相同.

矩阵和向量都有加法、减法以及数乘运算，统称为线性运算.

1°. 加减法：

矩阵的加减法要求只有行列数都相同的两个矩阵才可加减.

向量的加减法要求只有维数相同的两个向量才可进行加减.

加减法的法则都是对应元素相加减.

2°. 数乘：

矩阵或向量与数的乘法法则一致，都是用数乘以每一个元素.

3. 矩阵与向量组的秩：

1°. 矩阵的秩是一个重要的概念，求向量组的秩要以每一个向量作为矩阵的一行或一列，通过求矩阵的秩求出向量组的秩.

2°. 当向量组满秩时，此组向量线性无关；当向量组不满秩时，此向量组线性相关.

3°. 通过向量组的秩，还可求出一个向量组的极大线性无关组. 当向量组满秩时，极大线性无关组就是这个向量组本身. 当向量组不满秩时，其极大线性无关组中向量的个数与其秩数相同. 一个向量组的极大线性无关组中所含向量的个数是唯一的，因为向量组的秩数是唯一的. 但一个向量组的极大线性无关组由哪几个向量组成，并不唯一.

4°. 应用矩阵的秩还可以判断一个方阵是否可逆，只有满秩矩阵才存在逆矩阵. 不满秩的矩阵不可逆.

（二）逆矩阵与解矩阵方程

在解矩阵方程 $AX=B$ 或 $XA=B$ 时，若矩阵 $A$ 可逆，可通过逆矩阵和矩阵的乘法求出未知矩阵 $X$. 即若 $AX=B$，则 $X=A^{-1}B$；若 $XA=B$，则 $X=BA^{-1}$.

（三）矩阵的初等变换

矩阵的初等变换是线性代数中一个极其重要的方法. 应用矩阵的初等变换，可以将一个矩阵化为阶梯形和行简化阶梯形，应用

矩阵的初等变换可以确定矩阵和向量组的秩;从而判断一个方阵是否可逆,以及一个向量组是否线性相关;应用矩阵的初等变换可以求出一个可逆矩阵的逆矩阵,也可以确定一个向量组的极大线性无关组.应用矩阵的初等变换,还可以求出向量间的线性组合以及在后续课中求解线性方程组以及解决线性规划问题等等.因此,要学好《线性代数与线性规划》这门课,必须准确、熟练地掌握初等变换这一方法.

(四) 分块矩阵

分块矩阵是矩阵运算的一种技巧,按矩阵的结构分块可使矩阵的结构简明清晰.对高阶矩阵进行分块,可将高阶矩阵降为较低阶的矩阵进行运算.

总之,应用分块矩阵,可使运算过程简化,提高运算的速度与准确率.

## 范例分析

**例1** 已知矩阵:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 7\\ 0 & -1 & 5\\ 8 & 2 & 9\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}7 & 4 & 3\\ 1 & 0 & 2\\ 4 & 6 & 1\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 0 & 1\\ 2 & 5\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 0 & 5\\ 1 & 8\end{pmatrix}$$

求 (1) $4A+B$; (2) $C-2D$

(3) $B-D$; (4) 若 $X+D=C$,求 $X$.

**解**

(1) $$4A+B=\begin{pmatrix}4\times1 & 4\times0 & 4\times7\\ 4\times0 & 4\times(-1) & 4\times5\\ 4\times8 & 4\times2 & 4\times9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7 & 4 & 3\\ 1 & 0 & 2\\ 4 & 6 & 1\end{pmatrix}$$