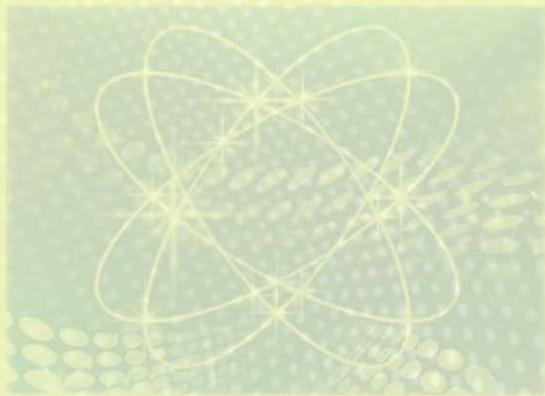


# 高等数学

## 高频题型及解题方法

同方教育 主编



东南大学出版社

# 高等数学

高频题型及解题方法

同方教育 主编



东南大学出版社  
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

· 南京 ·

# 目 录

第一部分 重要公式	1
一、求极限的相关公式	1
二、导数的相关公式	1
三、积分的相关公式	3
四、微分方程相关公式与定理	7
五、向量的运算公式	7
六、空间平面方程与直线方程	8
七、级数相关定理与公式	10
八、二重积分	11
第二部分 高频题型解法要点	13
一、选择题、填空题高频题型解法要点	13
1. 利用重要极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} [1 + u(x)]^{\frac{1}{u(x)}} = e$ (其中 $u(x) \rightarrow 0$ ) ( $x \rightarrow \infty$ )	
求幂指函数的“ $1^\infty$ ”型极限	13
2. 确定函数 $f(x)$ 的间断点类型	13
3. 比较两无穷小的阶	14
4. 求待定常数类型	14
5. 求曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线和垂直渐近线	16
6. 利用导数定义求极限	16
7. 求曲线 $y = f(x)$ 的切线方程	16

8. 求函数 $y=f(x)$ 的单调区间、极值及在 $[a, b]$ 上的最值 .....	17
9. 求曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间、拐点 .....	17
10. 原函数与不定积分的概念题 .....	17
11. 求积分上限函数的导数 .....	18
12. 求定积分的值 .....	18
13. 判断无穷区间上的广义积分(反常积分)的敛散性或计算广义积分 .....	18
14. 求解一阶微分方程 .....	19
15. 向量运算题 .....	19
16. 求二元函数 $z=f(x, y)$ 的全微分 $dz$ 或 $dz \Big _{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$ .....	20
17. 求二元隐函数的偏导数 .....	21
18. 交换二次积分的积分次序 .....	21
19. 将直角坐标系下的二次积分化成极坐标系下的二次积分 .....	22
20. 判定级数的敛散性 .....	22
21. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的绝对收敛性、条件收敛性 .....	24
22. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域 .....	25
二、计算题高频题型解法要点 .....	25
1. 利用洛必达法则求未定式的极限 .....	25
2. 求函数的导数 .....	26
3. 求不定积分 .....	28
4. 计算定积分 .....	29
5. 求空间平面方程 .....	29
6. 求空间直线方程 .....	30

7. 求含抽象函数的二元复合函数 $z = f[u(x, y), v(x, y)]$ 的二阶偏导数 .....	30
8. 计算二重积分 .....	30
9. 求二阶常系数线性非齐次微分方程 $ay'' + by' + cy = p_n(x)e^{ax}$ 的通解 .....	31
三、证明题高频题型证法要点 .....	31
1. 证明函数不等式 .....	31
2. 证明方程 $f(x) = \varphi(x)$ 在区间 $(a, b)$ 内有且仅有一个实根 .....	32
3. 证明函数 $f(x)$ 在一点 $x = x_0$ 处的连续性和可导性 .....	32
4. 证明含有 $\xi$ 的等式: 证明至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ , 使 $f(\xi) = \varphi(\xi)$ .....	33
5. 证明定积分等式 .....	33
四、综合题高频题型解法要点 .....	34
1. 求平面图形 $D$ 的面积及旋转体体积 .....	34
2. 求函数 $y = f(x)$ 的单调区间、极值及在 $[a, b]$ 上的最值; 求曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间、拐点 .....	37
3. 求解微分方程的几何应用问题 .....	37
4. 对题目已知条件中出现的积分方程(方程中含有积分上限函数)的处理方法 .....	37
附录: 一些重要概念的数学表达形式 .....	38

# 第一部分 重要公式

## 一、求极限的相关公式

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} 0, & m < n \\ \frac{a_0}{b_0}, & m = n \\ \infty, & m > n \end{cases}$$

$$2. \text{重要极限} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} [1 + u(x)]^{\frac{1}{u(x)}} = e \quad [\text{其中 } u(x) \rightarrow 0]$$

$$3. \text{洛必达法则} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\substack{“\frac{0}{0}” \text{ 或 } “\frac{\infty}{\infty}”}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

### 4. 常用的等价无穷小

当  $u(x) \rightarrow 0$  时,

$$u(x) \sim \sin u(x) \sim \tan u(x) \sim \ln [1 + u(x)] \sim e^{u(x)} - 1 \\ \sim \arcsin u(x) \sim \arctan u(x)$$

$$1 - \cos u(x) \sim \frac{1}{2} [u(x)]^2$$

$$\sqrt[n]{1 + u(x)} - 1 \sim \frac{1}{n} u(x), \text{ 特别地有 } \sqrt{1 + u(x)} - 1 \\ \sim \frac{1}{2} u(x)$$

## 二、导数的相关公式

### 1. 导数的定义

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ 或}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

2. 可以直接使用的结果

当 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导时,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha\Delta x) - f(x_0 + \beta\Delta x)}{\Delta x} = (\alpha - \beta)f'(x_0)$$

3. 常用的导数公式

(1)  $(c)' = 0$  ( $c$  为常数)

(2)  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$  ( $\alpha$  为常数)

(3)  $(\sin x)' = \cos x$

(4)  $(\cos x)' = -\sin x$

(5)  $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

(6)  $(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$

(7)  $(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$

(8)  $(\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$

(9)  $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

(10)  $(e^x)' = e^x$

(11)  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$  ( $a > 0, a \neq 1$ )

(12)  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

(13)  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(14)  $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

(15)  $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$$(16) (\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

#### 4. 函数和、差、积、商的求导法则

设  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  都是可导函数, 则

$$(1) (u \pm v)' = u' \pm v' \quad (2) (cu)' = cu' (c \text{ 为常数})$$

$$(3) (uv)' = u'v + uv' \quad (4) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} (v \neq 0)$$

#### 5. 复合函数求导法则

设  $y = f(u)$ , 而  $u = \varphi(x)$ , 且  $f(u)$  及  $\varphi(x)$  都可导, 则复合函数  $y = f[\varphi(x)]$  的导数为  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$  或  $y'(x) = f'(u) \varphi'(x)$

### 三、积分的相关公式

#### 1. 常用的积分公式 ( $C$ 为常数)

$$(1) \int k dx = kx + C (k \text{ 为常数})$$

$$(2) \int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$$

$$(3) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$(4) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$(5) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$(6) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$(7) \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$(8) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$(9) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$(10) \int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$

$$(11) \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$

$$(12) \int e^x dx = e^x + C$$

$$(13) \int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$$

$$(14) \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$(15) \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$(16) \int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$(17) \int \cot x dx = \ln |\sin x| + C$$

## 2. 常用的凑微分公式

$$(1) dx = \frac{1}{a} d(ax + b)$$

$$(2) x^a dx = \frac{1}{a+1} dx^{a+1} \text{ (常数 } a \neq -1)$$

$$\text{特别地} \begin{cases} x dx = \frac{1}{2} dx^2 \\ x^2 dx = \frac{1}{3} dx^3 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2d\sqrt{x} \end{cases}$$

$$(3) \frac{1}{x} dx = d \ln x$$

$$(4) \sin x dx = -d \cos x$$

$$(5) \cos x dx = d \sin x$$

$$(6) \frac{1}{\cos^2 x} dx = \sec^2 x dx = d \tan x$$

$$(7) \frac{1}{\sin^2 x} dx = \csc^2 x dx = - d \cot x$$

$$(8) e^x dx = d e^x$$

$$(9) \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{darctan} x = \overset{\text{或}}{-} \operatorname{darccot} x$$

$$(10) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{darsin} x = \overset{\text{或}}{-} \operatorname{darccos} x$$

### 3. 分部积分公式

$$\int u dv = uv - \int v du$$

### 4. 积分上限函数的求导法则

$$(1) \left[ \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt \right]' = f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)$$

$$(2) \left[ \int_{g(x)}^b f(t) dt \right]' = -f[g(x)] \cdot g'(x)$$

$$(3) \left[ \int_{g(x)}^{\varphi(x)} f(t) dt \right]' = f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) - f[g(x)]$$

•  $g'(x)$

### 5. 对称区间上奇偶函数的积分性质

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{当 } f(x) \text{ 为奇函数} \\ 2 \int_0^a f(x) dx & \text{当 } f(x) \text{ 为偶函数} \end{cases}$$

6. 当  $f(x) \geq 0$  时, 定积分  $\int_a^b f(x) dx$  的值等于由曲线  $y = f(x)$ , 直线  $x = a, x = b$  及  $x$  轴所围成平面图形的面积.

### 7. 定积分的换元积分法

对于  $\int_a^b f(x) dx$ , 若令  $x = \varphi(t)$ , 则有  $\int_a^b f(x) dx$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] d\varphi(t)$$

其中  $\alpha$  是由  $\alpha = \varphi(t)$  解得的  $t = \alpha$ ,  $\beta$  是由  $b = \varphi(t)$  解得的  $t = \beta$

8. 无穷区间上广义积分(反常积分)的定义

$$(1) \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$(2) \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$(3) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) dx$$

9. 平面图形面积计算公式

方法 1(用定积分求)

$$\text{平面图形 } D \text{ 的面积 } S_D = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)] dx$$

其中积分区间  $[a, b]$  是与所求面积有关的  $x$  的取值范围.  
 $y = f(x)$  是围成平面图形  $D$  的上方曲线方程,  $y = \varphi(x)$  是围成平面图形  $D$  的下方曲线方程.

方法 2(用二重积分求)

$$\text{平面图形 } D \text{ 的面积 } S_D = \iint_D dx dy$$

10. 旋转体体积计算公式

(1) 平面封闭图形  $D$  绕  $x$  轴旋转一周所形成的旋转体体积

$$\text{公式 } V_x = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$

其中  $[a, b]$  是与所求体积有关的  $x$  的取值范围.  $f(x)$  是  $[a, b]$  内任一点  $x$  处平面图形  $D$  的上方曲线  $y = f(x)$  中  $y$  的表达式.

**【注意: 此计算公式只适用于平面图形  $D$  与  $x$  轴全部紧贴的情形】**

(2) 平面封闭图形  $D$  绕  $y$  轴旋转一周所形成的旋转体体积

$$\text{公式 } V_y = \int_c^d \pi [\varphi(y)]^2 dy$$

其中  $[c, d]$  是与所求体积有关的  $y$  的取值范围.  $\varphi(y)$  是  $[c, d]$  内任意一点  $y$  处平面图形  $D$  的右方曲线  $x = \varphi(y)$  中  $x$  的表达式.

【注意: 此计算公式只适用于平面图形  $D$  与  $y$  轴全部紧贴的情形】

#### 四、微分方程相关公式与定理

1. 一阶线性微分方程  $y' + p(x)y = q(x)$  的通解

一阶线性微分方程的通解为  $y = e^{-\int p(x) dx} \left[ \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx + C \right]$

常用恒等式:  $e^{k \ln a} = a^k$

2. 二阶常系数线性齐次方程  $ay'' + by' + cy = 0$  的通解

特征根

微分方程的通解

两个不等实根  $r_1 \neq r_2$

$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

两个相等实根  $r_1 = r_2$

$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$

一对复根  $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$

$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

3. 二阶常系数线性非齐次方程  $ay'' + by' + cy = f(x)$  解的结构定理

定理 1. 设  $\bar{y}$  是微分方程  $ay'' + by' + cy = f(x)$  对应齐次方程  $ay'' + by' + cy = 0$  的通解,  $y^*$  是原方程的一个特解, 则微分方程  $ay'' + by' + cy = f(x)$  的通解为  $y = \bar{y} + y^*$ .

定理 2. 设  $y_1^*, y_2^*$  分别是微分方程  $ay'' + by' + cy = f_1(x)$  和  $ay'' + by' + cy = f_2(x)$  的一个特解, 则  $y_1^* + y_2^*$  是微分方程  $ay'' + by' + cy = f_1(x) + f_2(x)$  的一个特解.

#### 五、向量的运算公式

设  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ , 则有

(1)  $k\mathbf{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$  ( $k$  是常数)

(2)  $\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3)$

(3)  $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

(4) 两向量的点积  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

(i) 定义:  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$

由定义可知:  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$$

$$\cos(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$$

(ii) 坐标表达式下点积的计算公式

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

(5) 两向量的叉积  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

(i) 定义:  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  是一个向量  $\mathbf{c}$ , 其方向为  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b}$ , 且  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  和  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  构成右手系.

其大小  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$

由定义可知  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$  等于以  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  为邻边的平行四边形面积,

以  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  为边的三角形面积等于  $\frac{1}{2} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ .

(ii) 坐标表达式下  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  的计算公式

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

注意:  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$

## 六、空间平面方程与直线方程

1. 空间平面方程的两种形式

$x, y, z$  的一次方程在空间表示平面

(1) 空间平面的点法式方程

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

其法向量为  $\mathbf{n} = (A, B, C)$ ,  $M(x_0, y_0, z_0)$  是平面上已知点的坐标.

(2) 空间平面的一般方程

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

其中法向量为  $\mathbf{n} = (A, B, C)$

2. 空间直线方程的三种形式

(1) 空间直线的对称式方程

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

其方向向量  $\mathbf{s} = (m, n, p)$ ,  $(x_0, y_0, z_0)$  是直线上已知点的坐标.

注: 分母上可以出现 0

(2) 空间直线的参数式方程

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

其方向向量  $\mathbf{s} = (m, n, p)$ ,  $(x_0, y_0, z_0)$  是直线上已知点的坐标.

(3) 空间直线的面交式方程

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

其方向向量  $\mathbf{s} = (A_1, B_1, C_1) \times (A_2, B_2, C_2)$

为求得直线上已知点的坐标, 可令  $z = 0$ , 由

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + D_2 = 0 \end{cases} \text{ 解出 } x = x_0, y = y_0, \text{ 则 } (x_0, y_0, 0) \text{ 即为直线上}$$

已知点的坐标(也可令  $y = 0$  或  $x = 0$ ).

## 七、级数相关定理与公式

### 1. 级数收敛的必要条件

若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 则必有  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

2. 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} k u_n$  ( $k$  为非零常数) 与  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  具有相同的敛散性.

3. 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  都收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$  收敛.

注: 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  发散, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$  发散.

4.  $p$  级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ , 当  $p > 1$  时收敛, 当  $p \leq 1$  时发散.

5. 等比级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a q^{n-1}$ , 当  $|q| < 1$  时收敛, 当  $|q| \geq 1$  时发散.

### 6. 正项级数的比较判别法

设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  都是正项级数, 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$  ( $0 < l < +\infty$ ), 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  有相同的敛散性.

### 7. 正项级数的比值判别法

设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  是正项级数,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$ , 则当  $\rho < 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛;

当  $\rho > 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散;

当  $\rho = 1$  时, 比值判别法失效.

### 8. 莱布尼茨定理

如果交错级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$  ( $u_n \geq 0$ ) 满足条件: (1)  $u_n \geq u_{n+1}$ ; (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$  收敛.

### 9. 绝对收敛与条件收敛

绝对收敛: 如果  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  绝对收敛.

条件收敛: 如果  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  发散, 而  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  本身收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  条件收敛.

### 10. 基本展开式

$$(1) e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$(2) \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1 < x < 1)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (-1 < x < 1)$$

$$(3) \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (-1 < x \leq 1)$$

$$(4) \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

## 八、二重积分

1.  $\iint_D f(x, y) dx dy$  的值等于积分区域  $D$  的面积.

## 2. 直角坐标与极坐标的转换关系

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} (x^2 + y^2 = r^2)$$

$$dx dy = r dr d\theta$$

## 3. 对称区域上二重积分的性质

(1) 如果积分区域  $D$  对称于  $x$  轴, 则

当  $f(x, y)$  关于  $y$  为奇函数, 即  $f(x, -y) = -f(x, y)$  时,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = 0$$

当  $f(x, y)$  关于  $y$  为偶函数, 即  $f(x, -y) = f(x, y)$  时,  $\iint_D f(x,$

$y) dx dy = 2 \iint_{D_1} f(x, y) dx dy$ , 其中  $D_1$  是  $D$  位于  $x$  轴上方的部分

(2) 如果积分区域  $D$  对称于  $y$  轴, 则

当  $f(x, y)$  关于  $x$  为奇函数, 即  $f(-x, y) = -f(x, y)$  时,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = 0$$

当  $f(x, y)$  关于  $x$  为偶函数, 即  $f(-x, y) = f(x, y)$  时,  $\iint_D f(x,$

$y) dx dy = 2 \iint_{D_1} f(x, y) dx dy$ , 其中  $D_1$  是  $D$  位于  $y$  轴右方的部分