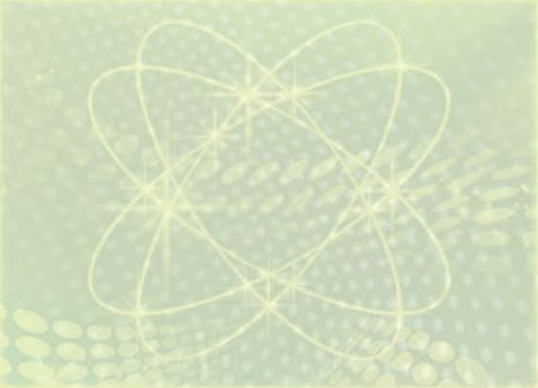
高等数学
高频题型及解题方法

同方教育　主编



东南大学出版社

高 等 数 学

高频题型及解题方法

同方教育　主编

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS
·南京·

目　录

第一部分　重要公式

一、求极限的相关公式

1. $$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}0, & m<n\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & m=n\\ \infty, & m>n\end{cases}$$

2. 重要极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}[1+u(x)]^{\frac{1}{u(x)}}=\mathrm{e}$ [其中 $u(x)\to 0$]

3. 洛必达法则 $$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{\text{“}\frac{0}{0}\text{”或“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}}{=}\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$

4. 常用的等价无穷小

当 $u(x)\to 0$ 时，

$u(x)\sim\sin u(x)\sim\tan u(x)\sim\ln[1+u(x)]\sim\mathrm{e}^{u(x)}-1\sim\arcsin u(x)\sim\arctan u(x)$

$1-\cos u(x)\sim\dfrac{1}{2}[u(x)]^2$

$\sqrt[n]{1+u(x)}-1\sim\dfrac{1}{n}u(x)$，特别地有 $\sqrt{1+u(x)}-1\sim\dfrac{1}{2}u(x)$

二、导数的相关公式

1. 导数的定义

$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 或

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

2. 可以直接使用的结果

当$f(x)$在$x=x_0$处可导时，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\alpha\Delta x)-f(x_0+\beta\Delta x)}{\Delta x}=(\alpha-\beta)f'(x_0)$$

3. 常用的导数公式

(1) $(c)'=0$(c为常数)

(2) $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$($\alpha$为常数)

(3) $(\sin x)'=\cos x$

(4) $(\cos x)'=-\sin x$

(5) $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$

(6) $(\cot x)'=\dfrac{-1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$

(7) $(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$

(8) $(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x$

(9) $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$

(10) $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$

(11) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}(a>0,a\neq 1)$

(12) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

(13) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(14) $(\arccos x)'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

(15) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

(16) $(\operatorname{arccot} x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$

4. 函数和、差、积、商的求导法则

设 $u = u(x)$，$v = v(x)$ 都是可导函数，则

(1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$　(2) $(cu)' = cu'$(c 为常数)

(3) $(uv)' = u'v + uv'$　(4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$($v \neq 0$)

5. 复合函数求导法则

设 $y = f(u)$，而 $u = \varphi(x)$，且 $f(u)$ 及 $\varphi(x)$ 都可导，则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的导数为 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ 或 $y'(x) = f'(u)\varphi'(x)$

三、积分的相关公式

1. 常用的积分公式(C 为常数)

(1) $\int k\,dx = kx + C$(k 为常数)

(2) $\int x^\alpha dx = \dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$($\alpha \neq -1$)

(3) $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

(4) $\int \dfrac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$

(5) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$

(6) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

(7) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

(8) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}dx = \int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$

(9) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$

(10) $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$

(11) $\int \csc x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$

(12) $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$

(13) $\int a^x\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}a^x + C$

(14) $\int \frac{1}{a^2 + x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan \frac{x}{a} + C$

(15) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin \frac{x}{a} + C$

(16) $\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$

(17) $\int \cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$

2. 常用的凑微分公式

(1) $\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{d}(ax + b)$

(2) $x^a\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}\mathrm{d}x^{a+1}$（常数 $a \neq -1$）

$$\text{特别地}\begin{cases} x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}x^2 \\ x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{d}x^3 \\ \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}\sqrt{x} \end{cases}$$

(3) $\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}\ln x$

(4) $\sin x\mathrm{d}x = -\mathrm{d}\cos x$

(5) $\cos x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\sin x$

(6) $\dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \sec^2 x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\tan x$

(7) $\dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = \csc^2 x\mathrm{d}x = -\mathrm{d}\cot x$

(8) $\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\mathrm{e}^x$

(9) $\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{d}\arctan x \overset{\text{或}}{=} -\mathrm{d}\operatorname{arccot} x$

(10) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \mathrm{d}\arcsin x \overset{\text{或}}{=} -\mathrm{d}\arccos x$

3. 分部积分公式

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$

4. 积分上限函数的求导法则

(1) $\left[\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right]' = f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$

(2) $\left[\int_{g(x)}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t\right]' = -f[g(x)]\cdot g'(x)$

(3) $\left[\int_{g(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right]' = f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x) - f[g(x)]\cdot g'(x)$

5. 对称区间上奇偶函数的积分性质

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{当} f(x) \text{为奇函数} \\ 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x & \text{当} f(x) \text{为偶函数} \end{cases}$$

6. 当 $f(x) \geqslant 0$ 时,定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 的值等于由曲线 $y = f(x)$,直线 $x = a$,$x = b$ 及 x 轴所围成平面图形的面积.

7. 定积分的换元积分法

对于 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$,若令 $x = \varphi(t)$,则有 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\mathrm{d}\varphi(t)$$

其中 α 是由 $a=\varphi(t)$ 解得的 $t=\alpha$，β 是由 $b=\varphi(t)$ 解得的 $t=\beta$

8. 无穷区间上广义积分(反常积分)的定义

(1) $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim\limits_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$

9. 平面图形面积计算公式

方法1(用定积分求)

平面图形 D 的面积 $S_D = \int_{a}^{b}[f(x) - \varphi(x)]\mathrm{d}x$

其中积分区间 $[a,b]$ 是与所求面积有关的 x 的取值范围. $y=f(x)$ 是围成平面图形 D 的上方曲线方程，$y=\varphi(x)$ 是围成平面图形 D 的下方曲线方程.

方法2(用二重积分求)

平面图形 D 的面积 $S_D = \iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

10. 旋转体体积计算公式

(1) 平面封闭图形 D 绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体体积公式 $V_x = \int_{a}^{b}\pi[f(x)]^2\mathrm{d}x$

其中 $[a,b]$ 是与所求体积有关的 x 的取值范围. $f(x)$ 是 $[a,b]$ 内任一点 x 处平面图形 D 的上方曲线 $y=f(x)$ 中 y 的表达式.

【注意:此计算公式只适用于平面图形 D 与 x 轴全部紧贴的情形】

(2) 平面封闭图形 D 绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体体积

公式 $V_y=\int_c^d \pi[\varphi(y)]^2\mathrm{d}y$

其中 $[c,d]$ 是与所求体积有关的 y 的取值范围. $\varphi(y)$ 是 $[c,d]$ 内任意一点 y 处平面图形 D 的右方曲线 $x=\varphi(y)$ 中 x 的表达式.

【注意: 此计算公式只适用于平面图形 D 与 y 轴全部紧贴的情形】

四、微分方程相关公式与定理

1. 一阶线性微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的通解

一阶线性微分方程的通解为 $y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$

常用恒等式: $\mathrm{e}^{k\ln a}=a^k$

2. 二阶常系数线性齐次方程 $ay''+by'+cy=0$ 的通解

特征根	微分方程的通解
两个不等实根 $r_1\neq r_2$	$y=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}$
两个相等实根 $r_1=r_2$	$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{r_1x}$
一对复根 $r_{1,2}=\alpha\pm\beta\mathrm{i}$	$y=\mathrm{e}^{\alpha}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

3. 二阶常系数线性非齐次方程 $ay''+by'+cy=f(x)$ 解的结构定理

定理 1. 设 $\bar{y}$ 是微分方程 $ay''+by'+cy=f(x)$ 对应齐次方程 $ay''+by'+cy=0$ 的通解, y^* 是原方程的一个特解,则微分方程 $ay''+by'+cy=f(x)$ 的通解为 $y=\bar{y}+y^*$.

定理 2. 设 y_1^*, y_2^* 分别是微分方程 $ay''+by'+cy=f_1(x)$ 和 $ay''+by'+cy=f_2(x)$ 的一个特解,则 $y_1^*+y_2^*$ 是微分方程 $ay''+by'+cy=f_1(x)+f_2(x)$ 的一个特解.

五、向量的运算公式

设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$,则有

(1) $k\boldsymbol{a}=(ka_1,ka_2,ka_3)$（$k$ 是常数）

(2) $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,a_3\pm b_3)$

(3) $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

(4) 两向量的点积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$

(ⅰ) 定义: $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})$

由定义可知: $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$$

$$\cos(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$$

(ⅱ) 坐标表达式下点积的计算公式

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

(5) 两向量的叉积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$

(ⅰ) 定义: $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是一个向量 $\boldsymbol{c}$,其方向为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{b}$,且 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 构成右手系.

其大小 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})$

由定义可知 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 等于以 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形面积,以 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 为边的三角形面积等于 $\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.

(ⅱ) 坐标表达式下 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的计算公式

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

注意: $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$

六、空间平面方程与直线方程

1. 空间平面方程的两种形式

z,y,z 的一次方程在空间表示平面

(1) 空间平面的点法式方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

其法向量为$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，$M(x_0,y_0,z_0)$是平面上一已知点的坐标.

(2) 空间平面的一般方程

$$Ax+By+Cz+D=0$$

其中法向量为$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$

2. 空间直线方程的三种形式

(1) 空间直线的对称式方程

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

其方向向量$\boldsymbol{s}=(m,n,p)$，(x_0,y_0,z_0)是直线上一已知点的坐标.

注: 分母上可以出现0

(2) 空间直线的参数式方程

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$$

其方向向量$\boldsymbol{s}=(m,n,p)$，(x_0,y_0,z_0)是直线上一已知点的坐标.

(3) 空间直线的面交式方程

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

其方向向量$\boldsymbol{s}=(A_1,B_1,C_1)\times(A_2,B_2,C_2)$

为求得直线上一已知点的坐标，可令$z=0$，由$\begin{cases} A_1x+B_1y+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+D_2=0 \end{cases}$解出$x=x_0,y=y_0$，则$(x_0,y_0,0)$即为直线上一已知点的坐标(也可令$y=0$或$x=0$).

七、级数相关定理与公式

1. 级数收敛的必要条件

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则必有 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$(k 为非零常数) 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 具有相同的敛散性.

3. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 收敛.

注: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 发散.

4. p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$,当 $p > 1$ 时收敛,当 $p \leqslant 1$ 时发散.

5. 等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$,当 $|q| < 1$ 时收敛,当 $|q| \geqslant 1$ 时发散.

6. 正项级数的比较判别法

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数, 若 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l(0 < l < +\infty)$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 有相同的敛散性.

7. 正项级数的比值判别法

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数,$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$,则当 $\rho < 1$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

当 $\rho > 1$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;

当 $\rho = 1$ 时,比值判别法失效.

8. 莱布尼茨定理

如果交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(u_n \geqslant 0)$ 满足条件:(1) $u_n \geqslant u_{n+1}$;(2) $\lim_{n\to\infty}u_n = 0$,则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛.

9. 绝对收敛与条件收敛

绝对收敛: 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛.

条件收敛: 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散,而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 本身收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛.

10. 基本展开式

(1) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad (-\infty < x < +\infty)$

(2) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad (-1 < x < 1)$

$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (-1 < x < 1)$

(3) $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (-1 < x \leqslant 1)$

(4) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (-\infty < x < +\infty)$

$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (-\infty < x < +\infty)$

八、二重积分

1. $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ 的值等于积分区域 D 的面积.

2. 直角坐标与极坐标的转换关系

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} (x^2 + y^2 = r^2)$$

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

3. 对称区域上二重积分的性质

(1) 如果积分区域 D 对称于 x 轴,则

当 $f(x,y)$ 关于 y 为奇函数,即 $f(x,-y) = -f(x,y)$ 时,$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$

当 $f(x,y)$ 关于 y 为偶函数,即 $f(x,-y) = f(x,y)$ 时,$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D_1 是 D 位于 x 轴上方的部分

(2) 如果积分区域 D 对称于 y 轴,则

当 $f(x,y)$ 关于 x 为奇函数,即 $f(-x,y) = -f(x,y)$ 时,$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$

当 $f(x,y)$ 关于 x 为偶函数,即 $f(-x,y) = f(x,y)$ 时,$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D_1 是 D 位于 y 轴右方的部分