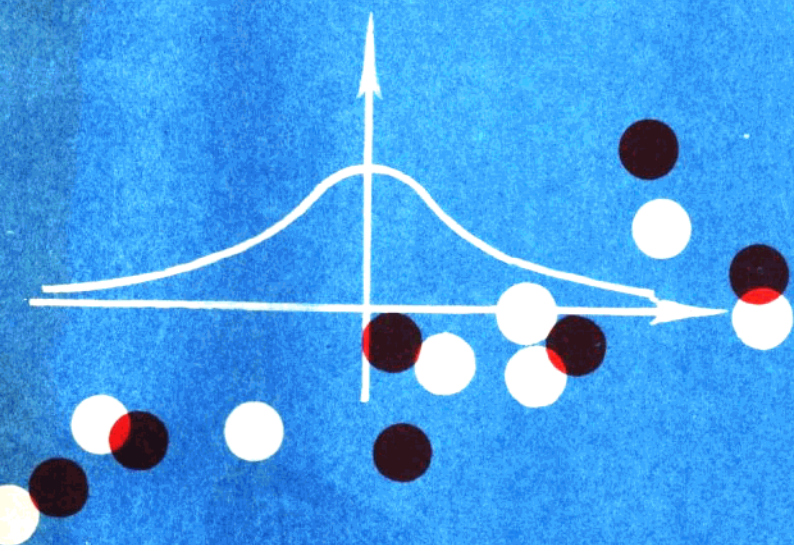


概率论与数理统计

(上)



中国人民解放军炮兵指挥学院

概率论与数理统计

(上册)

蒋 晔 编 著

炮兵指挥学院训练部

概率论与数理统计

(下册)

蒋 晔 编 著

炮兵指挥学院训练部

6-21

概率论与数理统计

上、下册

☆

炮兵指挥学院印刷厂 印刷

☆

787×1092毫米 1/32开本 印张23 字数49.1万

1988年5月第1版 1988年6月第1次印刷

册数：1—1500册 定价：7.90元

编写说明

本教材是以高等数学为基础，并吸取我院多期地炮射击理论班的施训经验而编写出来的。

本教材主要是为地炮射击理论服务的，因此，重点选择了与地炮射击有关的内容，同时也照顾到概率与统计本身的系统性和严密性。全书共分七章。前四章是概率论的基本理论，主要介绍有关概率的基本概念及运算，随机变量和随机变量函数的分布及其数字特征等内容。后三章是数理统计的原理和方法，主要介绍参数估计、假设检验以及线性回归分析等内容。最后一部分是附录一和二，着重介绍了本教材中有关公式的数学论证方法，其中除大多数是经典论证方法外，还有些是我们自己研究的成果。

在编写时，我们力求用简明扼要、通俗易懂的语言，并结合地炮射击实践来阐述概率与统计的基本概念和原理。教材中所选用的大量例题和各章习题，大多数都与地炮射击有关。因此，本教材可作为掌握一般微积分知识的地炮培训班学员学习射击理论的基本教材，也可为三年制排长队之用，同时可作为部队炮兵指挥员的自学用书，用以指导射击实践，也许颇为有益。对具有高等数学坚实基础的同学，请参阅本书的附录部分，从中可进一步获得必要的概率与统计知识。

根据当前学员的实际水平以及施训时间，教材中凡打•号的内容，只供学员学习时参考。

本教材由蒋晔同志编著。蒋晔同志多年来从事地面炮兵射击学的概率论与数理统计的教学与研究工作，在学术上有较深的造诣，又有丰富的教学经验，在离休之后，集多年的教学经验之精华编写了此书，在此深表谢意。

本教材在编写过程中，受到我院各级领导的关怀和支持，对此我们表示深切感谢。

在编写过程中，由于我们水平有限，缺点和错误在所难免，敬请读者批评指正。

出版者 1987年11月。

概 述

概率论与数理统计都是数学学科的分支，它们从数量方面研究和揭示大量随机现象的统计规律性。其中概率论主要研究这些统计规律的一般理论，而数理统计则是通过试验数据，对统计规律进行分析、估计和推断。

我们知道，在自然界和人类社会中发生的现象是多种多样的。有一类现象，在一定条件下必然发生（或必然不发生）。比如，向上抛掷一石子必然下落，同性电荷必不相互吸引，在标准大气压下的纯水加热到 100°C 时必然沸腾等等。这类现象称为**确定性现象**。过去我们学过的初等数学、微积分学和线性代数等，就是研究这类现象的数学工具。

然而，在自然现象和社会现象中，也还广泛地存在着与确定性现象有着本质区别的另一类现象。比如，在相同条件下抛掷一枚硬币，其结果可能是正面（国徽面）朝上，也可能是反面（币值面）朝上，并且不论怎样控制抛掷条件，在每次抛掷前无法肯定抛掷的结果是什么。又如，用同一门火炮以相同的开始诸元发射一群炮弹，每发炮弹落点的位置不可能相同，并且不论怎样控制射击条件，在发射前也无法预测每发炮弹落点的确切位置。再如，用同一仪器多次测量某段距离，每次所得结果彼此总会有些差异，并且不论怎样控制测量条件，在每次测量前也无法预知确切的测量结果。这类现象可归结为：在相同条件下进行一系列试验，每次试验的可能结果不止一个，而且事先无法预知确切的结果。或

者说，对于个别的试验，它时而会出现这种结果，时而会出现那种结果，呈现出一种偶然性。这类现象就称为**不确定性现象**，或称**随机现象**。

人们在长期实践过程中，发现这类现象虽然就每次试验结果来说，它具有不确定性，但在大量重复试验时，它的结果却呈现出某种规律性。比如，多次重复抛掷一枚硬币，得到正面朝上大致有半数。用同一门火炮以相同诸元发射一群炮弹，炮弹落点的分布也具有一定的规律性，这就是大家所熟悉的射弹散布规律，并且可以用散布率^①从数量方面把它表示出来。同样，多次重复测量一段距离，每次测量结果将分布在距离真值的周围。这种在大量重复试验中所呈现出的事物本身的固有规律性，就称为**统计规律性**。正如恩格斯所指出的：“在表面上是偶然性在起作用的地方，这种偶然性始终是受内部的隐蔽着的规律支配的，而问题只是在于发现这些规律^②”。

概率论与数理统计是由自然科学和社会科学的迫切需要而发展起来的。概率统计的理论与方法在应用上是很广泛的，目前它们已几乎遍及所有科学技术领域、工农业生产和国民经济的各个部门之中。比如，使用概率统计方法可以进行气象预报，水文预报，地震预报，以及产品的抽样验收；在试验设计、器件和装置的使用可靠性及其平均寿命的估

① 关于射弹散布的概念及射弹散布率请参阅地面炮兵《射击教程》有关章节。

② 恩格斯：《路德维希·费尔巴哈和德国古典哲学的终结》，人民出版社，1972年，第38页。

计，在自动控制、通讯工程以及军事科学技术中，都要用到概率统计的理论和方法。

地面炮兵在射击准备过程中，不可避免地要碰到一系列的偶然误差；在射击实施过程中，还要受到许多偶然因素的干扰和影响。因此，无论在进行误差分析，研究射击规则，或者判定射击效果等方面，往往都要用概率统计的理论和方法，为研究炮兵射击学提供必要的数量分析的依据。因此，为了学好射击理论和在射击实施中正确地运用射击法则，必须首先学好概率统计的理论和方法。

目 录

概 述

第一章 概率论的基本概念和基本定理…………… (1)

- 第一节 随机事件…………… (1)
- 第二节 频率与概率…………… (13)
- 第三节 概率加法定理…………… (25)
- 第四节 概率乘法定理…………… (31)
- 第五节 独立试验序列…………… (55)
- 第六节 全概率和试验后的假定概率…………… (70)
- 习题…………… (86)

第二章 随机变量及其分布…………… (98)

- 第一节 随机变量…………… (98)
- 第二节 离散型随机变量的概率分布…………… (102)
- 第三节 随机变量的分布函数…………… (117)
- 第四节 连续型随机变量的概率密度…………… (131)
- 第五节 均匀分布和正态分布…………… (137)
- 第六节 随机变量的函数及其分布…………… (150)
- 习题二…………… (162)

第三章 随机变量的数字特征(数值表征)… (171)

- 第一节 随机变量的数学期望(均值)…………… (172)

第二节	随机变量的方差和均方差·····	(181)
第三节	几个重要随机变量的数字特征···	(194)
第四节	正态分布的应用·····	(209)
第五节	随机变量函数的数字特征·····	(228)
第六节	随机变量函数的数字特征的 近似求法·····	(248)
习题三	·····	(256)
第四章	随机向量 ·····	(268)
第一节	二维随机变量的分布·····	(268)
第二节	随机变量之和的分布·····	(290)
第三节	二维随机向量的数字特征·····	(305)
第四节	平面上的正态分布·····	(438)
第五节	平面上正态分布的合成·····	(355)
*第六节	大数定律和中心极限定理·····	(374)
习题四	·····	(385)

目 录

第五章 参数估计 (统计估值)	(403)
第一节 数理统计的基本概念	(403)
第二节 数学期望的点估计	(413)
第三节 方差(均方差、中间误差)的点 估计	(424)
第四节 试验结果的平面整理	(446)
第五节 参数的区间估计	(463)
习题五	(477)
*第六章 假设检验	(483)
第一节 假设检验的概念和基本思想	(485)
第二节 数学期望的假设检验	(488)
第三节 方差的假设检验	(504)
第四节 总体分布的假设检验	(518)
第五节 反常结果的判定和处理	(535)
第六节 对两种错误概率的分析	(543)
习题六	(549)
*第七章 回归分析方法	(555)
第一节 一元线性回归	(556)
第二节 多元线性回归	(582)

习题七.....	(592)
附录一 关于概率论中若干公式的证明.....	(594)
附录二 关于数理统计中若干公式的证明...	(623)
习题答案.....	(689)

第五章 参数估计（统计估值）

第一节 数理统计的基本概念

本书前四章阐述了概率论的基本内容，从本章起将介绍一些数理统计的基本知识和一些常用的数理统计的原理和方法。

数理统计是具有广泛应用的一个数学分支，它以概率论为理论基础，其任务之一是根据试验或观察得到的数据，对所研究的对象的客观规律性作出种种合理的估计和推断。

比如，为了掌握某地区气温变化的规律性，就需要收集和积累该地区的气温变化的实际资料，利用统计方法，进行分析和推断；又如，为了掌握某种方法决定诸元散布中心对目标偏差量的分布状况，也需要根据多次射击的实际偏差量来进行分析和推断；再如，为了确定某批灯泡的质量，也需要根据实测资料对其使用寿命进行分析和推断等等。

我们知道，随机现象的规律性只有通过大量的试验或观察才能呈现出来，但是，客观上又只允许我们对随机现象进行次数不多的试验，当收集资料需要耗费大量的人力、物力和时间时，尤其是对一些破坏性的试验，就更应力求使试验

次数降低到最少的限度，并且能够很好地解决我们所提出来的问题。

在数理统计中，解决这个问题方法，就是所谓**随机抽样法**。这个方法的基本思想是：从所要研究的对象的全体中抽取一小部分来进行观察和研究，从而对整体进行推断。比如，对10000只同类型的灯泡进行质量检验，我们只能从其中抽取一小部分来进行检查，根据这部分灯泡使用寿命的分布状况，来推断该批灯泡的使用寿命的分布状况。

这种随机抽样法是一种从局部推断整体的方法。因为局部是整体的一部分，所以局部的特性在某种程度上能反映整体的特性。但是，它又不能完全精确无误地反映整体的特性。这就给我们提出了下面两个重要问题：一是**抽样方案**问题，解决抽多少和怎样抽的问题；二是研究如何对抽查的结果（一批数据）进行合理的分析，作出科学的推断，这就是**数据处理**即所谓**统计推断**问题。数理统计学着重研究这两方面的问题。本节只简要地讨论前一个问题，而后一个问题将在以后各节中再作介绍。

下面先介绍数理统计中几个重要的概念。

一、总体与个体

在数理统计中，我们把研究对象的全体称为**总体**，而把组成总体的每个基本单位称为**个体**。比如，一批10000只灯泡的全体是一个总体，而其中每只灯泡就是一个个体。

在实践中，我们主要关心的并不是每个个体的特殊的具体性能，而是总体的某个数量指标 X 。比如，对一批灯泡的

质量，我们可用使用寿命这个指标来衡量它。如果规定：把寿命不超过1000小时的灯泡作为次品，那么整批灯泡的次品率就是我们所关心的问题。如果我们求得灯泡寿命 X 这个随机变量的分布函数 $F(x)$ ，那么， $P(X \leq 1000) = F(1000)$ 就是所要求的次品率。

对总体的研究，实际上就是对总体的某个数量指标 X 的研究，它是一个随机变量。因此，总体通常是指某个随机变量 X 取值的全体，其中每个个体都是一个实数。这就表明每个总体都可用某个随机变量 X 来代表。如果研究的数量指标不止一个，那么可分为几个总体来研究。由此可见，如果表征总体的随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$ ，那么我们就干脆说成总体 X 的分布函数为 $F(x)$ 。上面这段话的意思，告诉我们要善于把所研究的对象看成一个随机变量。

总体的类型随研究的问题而定。比如，研究某灯泡厂10月份生产的某种灯泡的次品率，总体是有限的，其中个体的数目就是10月份所生产的这种灯泡的总数。但是，如果我们研究的是这种灯泡寿命 X 的分布，我们就把相同条件下所有可能生产的灯泡的寿命全体，看成是一个无限总体，则灯泡寿命 X 就是一个连续型随机变量。这时，我们可抽取部分灯泡作寿命试验，根据试验结果来推断该连续型总体 X 服从何种分布，也可估计该总体的均值和方差等。又如，我们用器材测量某段距离，实际上只能得到有限总体，但若设想我们能无限次地测量下去，则所有可能的测量结果形成一个无限总体，而表征该总体的随机变量（测量距离或测量误差）就成为连续型的。此时，我们可根据实测数据对该连续型总体作出各种推断，比如判断总体是否服从正态分布，以及估计

总体的均值和方差等等。

二、样本与样本观察值

在一个总体 X 中，我们随机地抽取 n 个个体 $X_1, X_2, \dots, X_n$ ，这 n 个个体称为总体 X 的一个容量为 n 的**样本**（或叫**子样**）。

由于 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是从总体中随机地抽取出来的可能结果，可以看成是 n 个随机变量。但是，在一次抽定以后，它们都是具体的数值，记作 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，称为**样本观察值**。显然，在不同次（每次取 n 个）的抽取中所得到的样本观察值一般是不相同的。

为统一起见，今后，我们把容量为 n 的样本用大写字母 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 来表示，并且看成是 n 个随机变量，也可看成 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 。而用小写字母 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 来表示某次具体抽取后的样本观察值。

我们的任务就是根据样本观察值 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的性质，来对总体 X 的某些数量特性进行估计和推断。因此，要求样本观察值尽可能地有代表性，这就对随机抽样法提出了如下的要求：样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 应当是相互独立的，而且与总体 X 具有相同的分布。我们把满足上述要求的样本叫做**简单随机样本**。怎样才能得到简单随机样本呢？办法很简单，只要独立地、重复地随机抽样就能得到。比如，测量一段距离，测量值是一个随机变量，如果进行 n 次重复独立测量，得到的样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 就是简单随机样本。又如，对10000只灯泡这个总体 X ，从中随机地有放回地抽取