趣味数学

四百题

江苏人民出版社

[illegible]数学四百题

何似龙　刘蕴华　编译

江苏人民出版社

一九八〇年·南京

趣味数学四百题

何似龙　刘蕴华　编译

江苏人民出版社出版
江苏省新华书店发行
淮阴新华印刷厂印刷

1980年2月第1版　1980年2月第1次印刷
印数：1—350,000
书号：13100·037　定价：1.32元

编译者的话

为了鼓励青少年学好数学，努力攀登科学高峰，我们从国外出版的一些趣味数学书中，选译了一批有趣的习题和数学竞赛试题，加上少量富有技巧的国内数学竞赛和高考试题，连同各题的解答，编译了这本《趣味数学四百题》。为适应读者不同的需要，书中所选的习题，有难有易，同时在一部分习题的解答中，还使用了一些高等数学的原理和方法。

本书编译的习题，主要选自俄文版《趣味习题》、《匈牙利数学竞赛》、《莫斯科数学竞赛习题集》、《初等数学难题集》等书。本书编题的次序为：第 1—200 题，趣味习题；第 201—280 题，平面几何与三角；第 281—350 题，初等代数；第 351—400 题，整除性以及与整数有关的问题。

本书可作中学生的课外读物，也可作中学教师和业余数学爱好者的参考读物。

南京大学外文系刘法芳和项淑娟同志参加了本书部分资料的翻译工作，特此表示谢意。

何似龙　刘蕴华

一九八〇年二月

一、题　目

1. 池塘里睡莲的面积每天长大一倍，若经 17 天就可长满整个池塘，问需多少天，这些睡莲能长满半个池塘？

2. 今有一根竹竿和一条绳子，绳子比竹竿长 4 米，绳子对折后比竹竿短 2 米，问竹竿与绳子各长多少米？

3. 一个均匀的硬币，在连续投掷九次都出现正面的情况下，问第十次投掷出现反面的概率等于多少？

4. n 个运动员进行乒乓球单打比赛，如果规定每个运动员在输掉第一局后就退出比赛，问必须经过多少局比赛才能得出优胜者？ n-1局

5. 两个木桶，分别盛放 10 公升酒和 10 公升水，先从酒桶中取出 1 公升酒倒入水桶，搅匀后再取出 1 公升倒回酒桶。问这时候，酒中含水与水中含酒的比哪一个高？ 一样高

6. 把 11 个齿轮放在同一平面上，使第一个齿轮紧衔住第二个齿轮，第二个紧衔住第三个，……最后，第 11 个又紧衔住第一个。问这个齿轮系中的齿轮能转动吗？

7. 某一套丛书（共七册）各册出版间隔时间是七年，当它出完第七册后，这套书每一册出版年代的总和为 13594 。问它第一册书是何年出版？

8. 三根互相交织着的绳子系在（钉进）木板 A 的三颗钉子上（图 1·1）。要求用三根新绳子分别拴在它们的自由端，而新绳子（允许它们互相交织）的另一端应该系在（钉进）木板 B 的三颗钉子上。当 A, B 两块木板对拉开后，三

处于平行状态。怎样做才能达到这个目的？

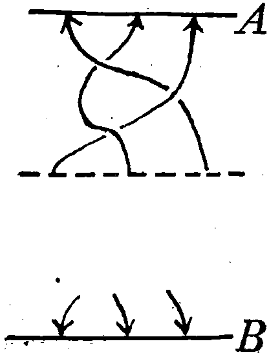


图 1·1

9．某正三角形与一正六边形的周长相等，求它们的面积之比。

10．某地气象站的记录表明，在某一时间周期内，这里经常出现早雨晚晴或早晴晚雨的多雨天气。如果这样的日子有 9 天，而且在这周期内有 6 个傍晚和 7 个早晨天气晴朗。问这时间周期的总计天数是多少？

11．某试卷由 26 个问题组成，答对一题得 8 分，答错一题扣去 5 分。今有一考生虽然回答了全部 26 个问题，但所得总分为零。问他正确解答多少题？

12．(1) 把图（图1·2）剪成其形状与大小完全一样的四小块；

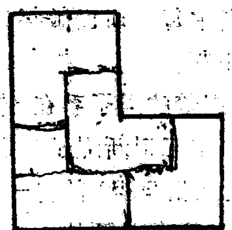


图 1·2

（2）用五条直线把图（图 1·3）分成六块，使分成的各块能拼成一个正六边形。

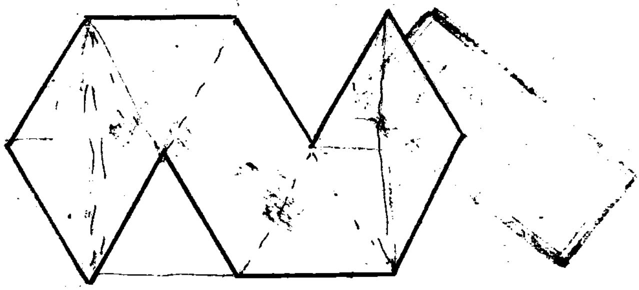


图 1·3

13. 母羊、小羊共 140 只，总计剪得羊毛 160 斤，若每只母羊可剪毛 1 斤 2 两，每只小羊可剪毛 8 两，问母羊、小羊各若干？

14. 猎人要把一只狼、一头羊和一篮白菜从河的左岸带到右岸，但他的渡船太小，一次只能带一样。因为狼要吃羊，羊会吃白菜，所以狼和羊，羊和白菜不能在无人监视的情况下相处。问猎人怎样才能达到目的？

15. 200 个学生排成 10 行、20 列的长方形队伍，在每一列中选出最矮者（如这样的人有几个，则任选其中一人），然后在所选出的 20 人中挑出最高者；再在每一行中选出最高者，又从所选出的10人中挑出最矮者。试问在这两个被挑选出来的人中，谁高些？

16. 下面简单的式子，是由 1 到 9 的九个不同数字组成。试在空白处填上其它几个数字（有两种可能的解答）。

$$\begin{array}{r} 9\ \bullet\ \bullet \\ -\ \bullet\ 4\ \bullet \\ \hline \bullet\ \bullet\ 1 \end{array}$$

17. 张三、李四和王二三个棋迷，他们定期去工人文化宫下棋。张三每隔5天去一次(如果他第一次是三月一日去，那么第二次便是三月六日去)；李四每隔6天去一次；王二每隔9天去一次。如果十月三日这一天他们正好都到了文化宫，问下一次他们三人正好都去文化宫是几月几日？

18. (1) 求二数，使它们的差和商都等于5。

(2) 求一正数，使它的$\frac{1}{5}$与它的$\frac{1}{7}$相乘正好等于自身。

19. 搭火柴棒：

(1) 用6根等长的火柴棒搭成4个同样大小的三角形。

(2) 用10根火柴棒摆成图1·4，问最少要移动几根火柴，才能使它变成图1·5的样子？

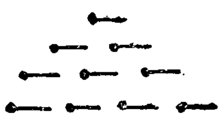


图 1·4

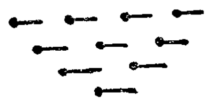


图 1·5

(3) 图1·6是由火柴棒摆成的图形，请从图1·6取出一根加入图1·7，并摆成新图形，使得图1·6的面积仍是图1·7的3倍。

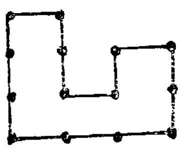


图 1·6

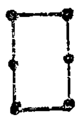


图 1·7

(4) 用3根火柴棒摆成一个大于3而小于4的数。

注：在各题中都不允许把火柴棒弯成弧形和折断。

20．$0.\dot{9}$ 比 1 小吗？

21．10盒金属零件，每盒装 10 个，同盒内各零件重量相同。但因分批生产，原料不同，因而有一盒与其他盒不同。如果知道其他 9 盒内每个零件重 10 克，而这一盒内每个零件重 9 克，如何用天平（允许用法码）称一次就能把这一盒找出来。

22．图 1·8 表示一个正多边形的三条边，问此多边形总共有几条边？

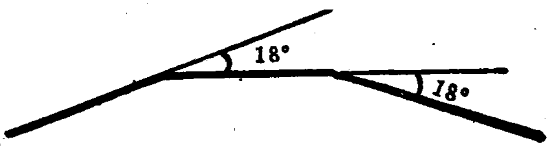


图 1·8

23．(1) 图 1·9 是某城市一角的街道示意图，各街道的长度如图所示，试计算从 X 到 Y 的最短路程。

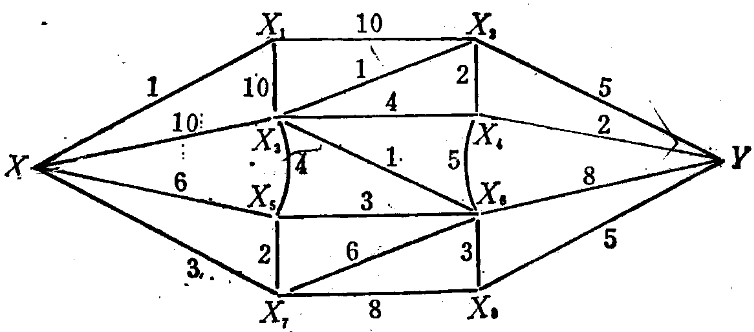


图 1·9

(2) 图 1·10 是一个迷阵模型，黑线代表篱笆，空隙代表人行通道。有人位于 A 端，他应怎样走，才能顺着通道经过

迷阵到达 B 端？

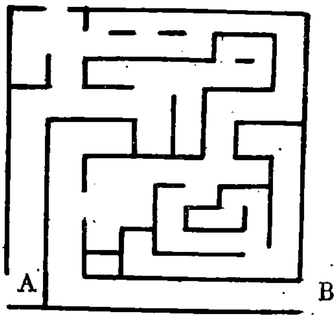


图 1·10

24.（1）口算从 1 到 300 的正整数的常用对数乘积.

（2）口算 85^2.

25. 谁都知道，人们在见面或分别时，经常喜欢用握手来表示友谊或礼貌. 请你证明，不论在什么时候，世界上凡握过奇数次手的人数一定是偶数.

26. 求四个相邻奇数，使它们的平方和，比夹在它们之间的偶数平方和大 48.

27. 如图 1·11，半径分别为 15 和 20 的圆周相交成直角，考察两个圆在除去公共部分后所得的两个区域，它们的面积差是多少？

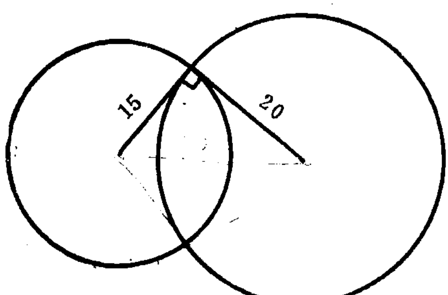


图 1·11

28．不查表计算：

$$\lg\operatorname{tg}1^\circ+\lg\operatorname{tg}2^\circ+\lg\operatorname{tg}3^\circ+\cdots+\lg\operatorname{tg}89^\circ$$

29．今有半径相等的球若干，一次放成正方形，一次放成正三角形，已知正方形每边的球数比三角形每边的球数少2个。求球的个数。

30．试比较$13^{13}\cdot 11^{11}$与$13^{11}\cdot 11^{13}$的大小。

31．证明：当$n>2$时，在任何直角三角形中，斜边的n次幂一定大于二直角边的n次幂之和。

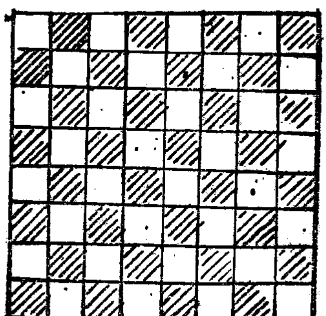
32．求出下述分数在表达为小数时，小数点后的第一、二、三位数字。

$$\frac{0.1234\cdots5051}{0.51504948\cdots321}$$

33．用几何方法证明：两个正数a和b的几何平均，等于这两个数的算术平均和调和平均的比例中项。

34．在用黑白相间、大小一样共8×8个方格组成的方形棋盘上，任意剪去二个方格，得到一张剪残的棋盘。又有31张纸牌，每张可以遮盖棋盘的二个相邻方格。试证明：

被剪去的二个方格具有同一种颜色（或者全黑，或者全白）时，剪残的棋盘一定不能被纸牌所遮盖；



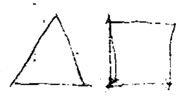


图 1·12

被剪去的二个方格正好一黑一白时，剪残的棋盘一定可用纸牌遮盖。

其中，我们约定，在遮盖过程中，每张纸牌不允许被剪成小块。

35。二数之比为 5 ： 6，如果由第一个数的 0.7 倍减去第二个数的0.26倍，所得之差为 76。求这两个数。

36。十人抬五杆，如果规定每杆用四人，且一人同时抬两杆，如何抬法？

37。若 $a^2+b^2=1$，$c^2+d^2=1$，$ac+bd=0$。则 $ab+cd$ 应取何值？

38。把 1600 颗花生，分给 100 只猴子.证明：不管怎样分，至少有 4 只猴子得到一样多的花生。并设计一种分法，使得不会有 5 只猴子得到一样多的花生。

39。确定分别满足下述条件的凸多边形边数：

（1）对角线数为边数的 1.5 倍；

（2）对角线数与边数之和等于 10。

40。分母有理化：

（1）$\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}$

（2）$\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$

41。中学三年级一个班级共有男学生 31 名，请数学教师为他们编排一个乒乓球单打比赛程序表，要求每个学生恰好都参加 3 场比赛.数学教师略加思考后笑了起来，回答说：“你们提出了一个无法实现的主张”。真是这样吗？请你证明。

42。计算：

（1）$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{3638}$

(2) $\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{30}+\left(\frac{i+1}{i-1}\right)^{20}$

(3) $\frac{15i^{-24}-5\sqrt{2}\,i^{31}}{(3+\sqrt{2}\,i^{21})(\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i^{-33})}$

(4) $\frac{27+8i}{3+2i^{3}}$

43. (1) 在圆周上给定 n 点，作出联接这 n 点的所有直线，假定其中任何三条直线不在圆内相交于同一点。试求出由这些直线所确定的、顶点全部落在圆周内部的三角形个数。

(2) 在凸多边形中，我们把联接任何两个不相邻顶点的线段称为对角线。如果有一个凸 n 边形，它的任何三条对角线都不在凸 n 边形内部相交于同一点。试求这些对角线彼此在凸 n 边形内部的交点总数。

44. 证明：如果线段 a、b、c 组成一个三角形，那么线段 $\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$、$\sqrt{c}$ 同样可以组成一个三角形。

45. 某公司由 20 个部门组成，为欢度节日，全公司准备放映 15 场电影（假定在分配时，各部门不计较电影场次的不同），如何分配才能满足下述条件？

(1) 每场电影恰好由四个部门观看；

(2) 每个部门看三场电影；

(3) 每两个不同部门同看一场电影的次数不多于一。

46. 确定下式中 $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ 的值：

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\right)=\alpha$$

47. 假定某轮船公司较长时间以来，每天中午有一只轮船从哈佛开往纽约，并且在每天的同一时间也有一只轮船从

纽约开往哈佛。轮船在途中所花的时间，来去都是七昼夜。问今天中午从哈佛开出的轮船，在整个航运途中，将会遇到几只同一公司的轮船从对面开来？

48．在直径等于1厘米的圆周内部任意安放着二百万个已知点。问是否存在这样的直线，在它的两侧恰好各安放了一百万个已知点？

49．有纸片 n^2 张（n 是任意正整数），在每张纸片上用红蓝铅笔各任意写上一个不超过 n 的正整数，但要使红字相同的任意两张上所写的蓝色数字都不相同。现在把每张上的两个数相乘，证明这样得到的 n^2 个乘积之和总是一样的，并求出这个和。

50．学过几何的人都知道，三角形中若有二边的中线（或高）相等，即为等腰三角形．如果把中线换成角平分线，那又怎么样呢？请你证明：二内角平分线相等的三角形是等腰三角形。

51．（1）计算根式：

$$\left(\frac{1\cdot2\cdot4+2\cdot4\cdot8+3\cdot6\cdot12+\cdots}{1\cdot3\cdot9+2\cdot6\cdot18+3\cdot9\cdot27+\cdots}\right)^{\frac{1}{3}}$$

（2）化简乘积：

$$(3^{2^0}+1)(3^{2^1}+1)(3^{2^2}+1)\cdots(3^{2^n}+1)$$

（3）解方程：

$$\frac{1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3}{2^3+4^3+6^3+\cdots+(2n)^3}=\frac{199}{242}$$

52．在波平如镜的湖面上，有一朵美丽的红莲，它高出水面3尺，一阵大风吹过，红莲被吹至一边，花朵齐及水面，如果知道红莲移动的水平距离为6尺，问这里水深多少？

53．甲、乙、丙三村，甲村在丙村之南，乙村在丙村之

东。一人自甲至丙，步行六小时到达，返回时，绕道乙村，经十小时而归。如果此人每小时步行 5 公里。问甲乙二村相距若干？

54。(1) 若 a、b 均是正有理数，而$\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$是无理数，问$\sqrt{a}+\sqrt{b}$是否是无理数，为什么？

(2) 设 a、b、c 为整数且不同时为零，证明：

$$a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}\neq 0$$

(3) 设一次函数 $y=ax+b$(其中 $a\neq 0$)有一组对应值 $x=\sqrt{2}$、$y=0$，试证明 $y=ax+b$ 不能有二组以上有理数的对应值。

55。甲记住一个位于 1 和1000之间的正整数，由乙来猜，如果对于乙的猜测，甲只能回答“是”或“不是”，问怎样以最少的次数猜测后，就一定能猜中？

56。是否存在这样的正多边形，它的一条对角线等于另二条对角线之和？

57。在十进制中，试证明：

(1) 任何两位数以上的完全平方数，不能由同一个数字所组成；

(2) 任何完全平方数，不可能恰好由五个不同的同时为偶或奇的数字所组成。

58。两位数 BC 取何值时，有

(1)
$$\begin{array}{r} BC \\ \times\, BC \\ \hline ABC \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{r} BC \\ \times\, BC \\ \hline ABBC \end{array}$$

式中 $A\neq 0$。

在解(2)时，不要“硬凑”。可利用第 57 题先缩小范围，再行求解

59．（1）能否找到这样的三个数：它们既是等差数列，又是等比数列？

（2）是否可以从数列 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，…，$\frac{1}{2^n}$，…中选出无穷等比数列，使其和等于$\frac{1}{7}$？又能否在其中找出无穷等比数列，使其和等于$\frac{1}{5}$。

60．图 1·13 是三个并列而放、大小一样的正方形，试证明：

$$\angle AHB+\angle AGB+\angle ADB=\frac{\pi}{2}$$

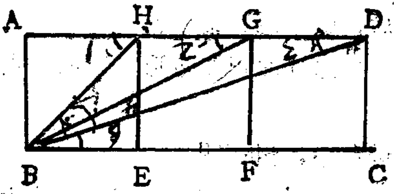


图 1·13

61．试把图 1·14 所示的一张图折成其八分之一大小（如图 1·15），并使数码保持 1 到 8 的次序。

1	8	7	4
2	3	6	5

图 1·14

图 1·15

62. 如果有人说$\frac{1}{2}=-1$，或者钝角等于锐角，你一定感到可笑。但是知道显明的数学事实同真正掌握和应用它，并在数学推导和论证时不犯这样那样的错误，往往还有很长一段距离。例如谁都晓得，零不能做除数，但是在复杂的代数运算中，人们往往忽视这一点，以致引起许多似是而非、莫名其妙的错误。又如在几何中，图形的直观可以启发人们找到解题的途径，但是图形的正确性又经常不被许多人所重视，这同样可以导致各种错误。

下面列出几段错误的推导和论证，请找出产生这些错误的原因。

(1) 设 $\frac{x}{y+z}=\frac{y}{z+x}=\frac{z}{x+y}$，则有

$$\frac{x}{y+z}=\frac{y}{z+x}=\frac{z}{x+y}$$

$$=\frac{x+y+z}{(y+z)+(z+x)+(x+y)}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{y+z}=\frac{y}{z+x}=\frac{x-y}{(y+z)-(z+x)}=-1$$

所以，$\frac{1}{2}=-1$

(2) 因为 $10^{\lg x}=x$，$-10^{\lg(-x)}=x$，所以

$$10^{\lg x}=-10^{\lg(-x)}$$

(3) 任作线段AB，过端点A作线段AC，使它与AB垂直，过B作线段$BD=AC$，使D与C在AB同侧，且

$$\angle ABD=\frac{\pi}{2}+\alpha, \qquad \alpha>0$$