高中数学教案

本社编

代数·第三册

北京师范大学出版社

高中数学教案

代数第三册

本 社 编

北京师范大学出版社

责任编辑：潘淑琴

高中数学教案

代数第三册

本社编

*

北京师范大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
中国科学院印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张　8.75　字数：183 千
1987 年 11 月第一版　　1987 年 11 月第 1 次印刷
印数：1—20 000

ISBN 7-303-00030-5/G·28

统一书号：7243·554　　定价：1.90 元

前　言

1984年我社编辑出版了《中学数学教材研究与教案选》(共六册)，旨在将广大中学数学教师多年来积累的教学经验在全国范围内进行交流和推广．实践证明，这种做法得到全国各地广大中学数学教师的欢迎．它对于开展中学数学教学研究，提高教学质量起到了促进作用．

教育正改革，教学方法也在发展，同时不少中学数学教师使用《中学数学教材研究与教案选》中也给我们提出了很好的意见和建议．这些促使我们进行修订．这次修订改名为《初中数学教案》(包括代数一——四册、平面几何一、二册)和《高中数学教案》(包括代数一、二、三册、立体几何、平面解析几何及微积分初步)．这次修订仍然保持原书的优点，同时在以下三方面加以完善和补充．首先，力图使大多数教案在深度和份量方面对大多数学校的教学是切实可行的；其次，在教案中尽可能体现开发学生智力和培养学生的能力；第三，增加教案的数量，每章末配有复习课教案．

本书的特点是：(1) 教案的作者仍然是全国范围内部分有经验的数学教师，其中有不少特级教师．(2) 本书依据国家颁布的中学数学教学大纲的教学体系，结合现行中学数学教材编写．(3) 本书的目的在于研究如何通过课堂教学，使学生掌握基础知识、基本技能技巧以及发展学生思维、开发学生智力、培养学生能力．(4) 本书每章开头有一篇教材分析

或教学经验方面的文章，概括本章主要内容及其在中学数学中的地位和作用，教学目的和要求，重点和难点．并且提出教学建议和课时安排．(5) 教案中一般是由教学目的和要求、教学重点和难点、教学过程(包括新课引入、新课、小结、作业)等组成．多数教案比较详尽，从中可以看到作者课堂教学的全过程．少数教案较略，但言简意明、脉络清楚、重点突出，有的同一教学内容附有两个不同特色的教案．

本册由北京市海淀区教师进修学校数学组赵大悌同志组织定稿．

感谢北京师范大学数学系曹才翰先生对本书编辑出版的关心和支持．

对本书有什么意见和要求，希望广大读者来信告诉我们．

编　者

目　录

一元多项式和高次方程

教材分析和教法建议

现行六年制重点高中数学课本代数第三册第一章《一元多项式和高次方程》是作为选学教材提出来的．全章教材分两大节．第一大节是一元多项式，包含一元n次多项式的概念、综合除法、余数定理、因式定理及其在多项式因式分解中的应用；第二大节是高次方程，包含高次方程的概念、复系数一元n次方程在复数集中有且仅有n个根的定理和整系数一元n次方程有理根的求法、一元n次方程根与系数的关系、实系数方程虚根成对定理．这些内容是初中代数中整式除法、因式分解、一元一次和一元二次方程的延续和发展．在初中阶段，学生学习因式分解和一元二次方程解法只能在实数集内进行；学了复数以后，在复数集内一元二次方程永远有解，一元二次三项式总能分解为两个一次因式与一个非零的常数因子之积．这使学生们感到别有洞天，自然产生寻求更高次方程一般解法的欲望．但复数教材中仅介绍了二次方程的一般解法，对高于二次的方程的解法却没有作进一步的介绍．因此，在学过复数以后，对重点中学学生再安排这一章的学习，向学生介绍一些前人的研究成果，提供一些切实可行的办法，揭示尚待探究的课题，使中学生在毕业前对一元n次多项式和一元n次方程的理论有一个较全面的了解，这对于提高学

生的学习能力和启迪学生的开拓精神都是必要的. 本文将对本章教材逐节进行一些分析并提出一些教法建议.

一、一元多项式

本章教材把"一元多项式"部分放在突出的位置，作为学习"一元 n 次方程"的基础. 教材在介绍了一元 n 次多项式的一般概念之后，紧接着把综合除法提前讲授，这样安排有利于对余数定理、因式定理的学习. 最后，深入研究了一元多项式在复数集中的因式分解问题. 在处理这个问题时，教材提前将代数基本定理和因式分解唯一性定理合并在一起，直接给出结论而不加证明. 不象六十年代的高中代数课本那样，在讲高次方程之前，先给出代数基本定理(未证明)，再来证"一元 n 次方程有且只有 n 个根"的定理. 这样做就避开了难点，精简了内容，节省了教学时间，便于集中精力学好最基本的知识.

本节的重点是综合除法、因式定理和一元 n 次多项式因式分解唯一性定理. 本节的难点是整系数多项式在有理数集中因式分解的方法. 学好本节的关键是正确理解余数定理、熟练掌握综合除法和它的应用.

1.1 一元 n 次多项式 (约 1 课时)

(1) 本节课是开始课，要根据循序渐进原则，先引导学生回忆初中学过的整式定义:

由自变量与数所组成的，仅经加法和乘法运算所得到的表达式，叫做有理整式或多项式. 这里要注意:

① 自变量通常用字母 x, y, z 表示，作为系数的字母通常用小写英文字母 a, b, c 表示.

② 用非零数去除的除法可以看作用倒数去乘. 例如，

$$x,\ (x-y)^2,\ x^2+2ax+a^2,\ x+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}.$$

都是多项式。

$\frac{1}{x-y}$, $\frac{x+y-2}{x}+x^2+y^2$ 不是多项式。

2^x+2^{-x}, $\sin x+\operatorname{tg} y$, $e^x+\lg(x+1)$ 含有变量的超越运算，也不是多项式.

(2) 教学一元 n 次多项式的定义时，难点是各项系数从 a, b, c, d 过度到 a_n, a_{n-1}, $\cdots$, a_0 的表示方法. 要向学生指出：26 个英文字母不足以表示任意多项，启发学生用改变下标的办法，采用 a_n, a_{n-1}, $\cdots$, a_0 等来表示各项系数，并注意 a_n 中的下标与 x^n 中的指数的关系，以掌握一元 n 次多项式的标准形式的书写规则. 再指出这种从特殊到一般的形式定义方法叫做归纳定义方法. 这样讲能使学生理解到用变动字母下标的表示法的优越性，有利于培养学生在学习中发挥主观能动作用和创造精神.

(3) 多项式的性质与给定的数集有密切关系，因此对多项式的研究要先明确给定的数集. 例如，在有理数集内，多项式 x^4-4 只能分解为两个有理系数因式 x^2-2 与 x^2+2 之积；在实数集内却能分解为三个实系数因式 $x-\sqrt{2}$、$x+\sqrt{2}$ 与 x^2+2 之积；在复数集内则能分解为四个复系数因式 $x-\sqrt{2}$、$x+\sqrt{2}$、$x+\sqrt{2}i$ 与 $x-\sqrt{2}i$ 之积. 这也说明同一多项式可以在不同的数集上来研究. 例如，假定在多项式里，除了自变量外，只含有有理系数，那么当我们在有理数集内研究给定的多项式时，自变量可以取任何有理数值. 又因为有理数集是实数集(或复数集)的子集，所以也可以说

这个多项式是在实数集(或复数集)内研究的。因此，多项式 $\frac{x+y}{2}$，$\frac{x^2-y^2}{3}$ 可以在有理数集内、实数集内、复数集内研究。多项式 $x^2+\sqrt{2}xy+y^2$ 可以在实数集内和复数集内研究。多项式 x^2+iy^2 只能在复数集内研究。在此基础上给出复系数一元 n 次多项式、实系数一元 n 次多项式、有理系数一元 n 次多项式、整系数一元 n 次多项式的定义。同时指出，本章中如果没有特别说明，所提到的多项式都是复系数多项式，都在复数集内研究的。

(4) 一元 n 次多项式中，系数不是零的次数最高的项的次数就是这个一元 n 次多项式的次数。单独一个非零的数，记作 a_0，可以看成零次单项式。系数都是零的多项式叫做零多项式。零多项式没有确定的项数与次数，它的值恒等于零。由此可见零次多项式与零多项式的区别是：① 零次多项式的次数是零，它只有一项；零多项式没有确定的项数与次数；② 零次多项式的值是一个非零的数，零多项式的值恒等于零。因此，数零是零多项式的特殊情况。由于现行教材不介绍两个多项式恒等的条件，在后面讲一元 n 次方程根与系数关系时是用零多项式的定义处理的，因此要重视对零多项式定义的教学。

(5) 一元 n 次多项式可以看作复数集上的函数，并用函数符号 $f(x)$、$g(x)$ 等表示。应特别重视"当 $x=a+bi$ 时，$f(x)$ 的值是 $f(a+bi)$"的教学。例如，设 $f(x)=x^2-5x+7$，求

$$f\left(-\frac{i}{5}\right) \text{ 和 } f\left(\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

建议由

$$f\left(\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=0$$

介绍一元 n 次多项式的根的概念。即"如果 $f(a+bi)=0$，那么 $x=a+bi$ 就叫做一元 n 次多项式 $f(x)$ 的根或零点。将来可以看到：一元 n 次多项式 $f(x)$ 的根或零点就是一元 n 次方程 $f(x)=0$ 的根。这样处理有利于一元 n 次方程的教学，学生在学习二次三项式和一元二次方程的关系时是有过经验的。

1.2　综合除法（约 2 课时）

(1) 这节教材是学好本章的关键，有两个重点：① 带余除法恒等式

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x)$$

是本章的理论基础；② 综合除法是一元 n 次多项式除以一元一次二项式的简便方法，在余数定理和因式定理中有重要应用。

(2) 在教学带余除法的恒等式时，建议选讲以下例题：

例 1　计算 $(5x^2-2x^3+6x^4-18)\div(2x^2+1)$。在复习除法的基础上，把被除式、除式、商式和余式的关系写成

$$f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x)$$

的形式。其中 $r(x)$ 的次数小于 $g(x)$ 的次数或者等于零。当 $r(x)=0$ 时就说 $f(x)$ 能被 $g(x)$ 整除。可向学生介绍 $g(x)|f(x)$ 的符号。

例 2　一个多项式 $f(x)$ 除以 $2x^2+3x-5$，得商式 $3x-5$，余式是 -7，求被除式 $f(x)$。

注意两点：

① 在讲带余除法恒等式时，除结合例题指出被除式和除

式都要按降幂排列以及缺项补零外，要注意防止把余式写成 $\frac{r(x)}{q(x)}$ 的错误。至于 $q(x)$ 和 $r(x)$ 存在的唯一性都不必补充。

② 结合例 2 复习多项式运算法则时，可概括指出一元多项式相加、相乘的结果仍是一元多项式，并且加、乘运算满足交换律、结合律以及乘法对加法的分配律.

(3) 综合除法是一元多项式除以一元一次二项式的简便算法，它来源于长除法. 教材以一个三次多项式为例，利用长除法找出商式系数及余数的构成规律，再分离系数并用列表的形式简化计算过程，以便于应用.这是符合循序渐进和量力性原则的。其中系数虽用字母表示，高三学生是能够接受的，不一定再举数字系数的例子去说明方法来源，以节省时间来多做练习.

注意三点:

① 被除式和除式都要按降幂排列，缺项系数应补零.

② 用综合除法时，除式是 $x-b$ 的形式，其中 $b\in \mathbf{C}$. 若除式是 $x+b$ 应先写成 $x-(-b)$ 的形式再做运算. 讲到"移下第一个系数，乘以 b，加上第二个系数，依次进行"时，要强调"加上"二字，与长除法运算时"从被除式减去除式与商的积中的"减去"不一样，防止学生出现习惯性的错误.

③ 对于除式是 $px\pm q$ 的情况，可用例题

$$(6x^4-5x^3-3x^2-x+4)\div(2x+1)$$

启发学生把除式变为 $2\left(x+\frac{1}{2}\right)$，先将被除式除以 $x+\frac{1}{2}$ 得出商式 $6x^3-8x^2+x-\frac{3}{2}$ 和余数，再写成

$$
\begin{aligned}
&6x^4-5x^3-3x^2-x+4\\
&=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(6x^3-8x^2+x-\frac{3}{2}\right)+\frac{19}{4}\\
&=2\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(6x^3-8x^2+x-\frac{3}{2}\right)+\frac{19}{4}\\
&=(2x+1)\left(3x^3-4x^2+\frac{x}{2}-\frac{3}{4}\right)+\frac{19}{4}.
\end{aligned}
$$

着重指出：多项式 $f(x)$ 除以 $px\pm q$，可先将 $f(x)$ 除以 $x\pm\dfrac{q}{p}$，再把商式除以 p 才是所求的商式，而所得余数没有改变，它就是所求的余数。注意防止学生把余数也除以 p 的错误。书写格式建议写成下面的形式：

$$
\begin{array}{r|rrrr|l}
 & 6 & -5 & -3 & -1 & +4 \;\; \big| -\frac{1}{2} \\
 & & -3 & +4 & -\frac{1}{2} & \\
\hline
2 & 6 & -8 & +1 & -\frac{3}{2} & +\frac{19}{4} \\
\hline
 & 3 & -4 & +\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} &
\end{array}
$$

商式 $q(x)=3x^3-4x^2+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{4}$，余数 $r=\dfrac{19}{4}$.

上述方法的理论推证如下：

设被除式 $f(x)$ 除以 $x\pm\dfrac{q}{p}$ 所得商式为 $Q(x)$，余数为 r，则有

$$f(x)=\left(x\pm\frac{q}{p}\right)Q(x)+r$$

$$=(px\pm q)\cdot\frac{Q(x)}{p}+r.$$

所以，只要把 $Q(x)$ 除以 p 即得所求的商式 $\frac{Q(x)}{p}$，余数不变。

(4) 综合除法可应用于二元、三元齐次式除以二元、三元一次齐次式。可选用

$$(4x^3+2x^2y-8xy^2-12y^3)\div(2x+3y)$$

在课堂上练习，发现问题及时帮助学生完成。留

$$(a^3+b^3+c^3-3abc)\div(a+b+c)$$

作为课后思考题，以培养学生的开拓精神和发散思维能力。

附录：解释综合除法来源的数字系数的例题，供参考。

用长除法求 $2x^4+14x+4-7x^3$ 除以 $x-2$ 的商式和余数。

首先要按降幂排列，再进行计算。

$$\begin{array}{l|l}
2x^4-7x^3+0+14x+4 & x-2 \\ \cline{2-2}
\underline{2x^4-4x^3} & 2x^3-3x^2-6x+2 \\
\quad -3x^3+0 & \\
\quad \underline{-3x^3+6x^2} & \\
\qquad -6x^2+14x & \\
\qquad \underline{-6x^2+12x} & \\
\qquad\qquad 2x+4 & \\
\qquad\qquad \underline{2x-4} & \\
\qquad\qquad\quad 8 &
\end{array}$$

$\therefore$ 商式 $Q(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 2$,

余式 $R = 8$.

把上列算式中的字母 x 省去，依次写出各项的系数，由数字所在位置不同就知道它是哪一项的系数．即

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2 & -7 & +0 & +14 & +4 & 1-2 \\ \cline{6-6}
2 & -4 & & & & 2-3-6+2 \\ \cline{1-2}
 & -3 & +0 & & & \\
 & -3 & +6 & & & \\ \cline{2-3}
 & & -6 & +14 & & \\
 & & -6 & +12 & & \\ \cline{3-4}
 & & & 2 & +4 & \\
 & & & 2 & -4 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 8 &
\end{array}$$

$\therefore$ $Q(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 2$, $R = 8$.

这种处理方法叫做分离系数除法.

进一步考虑，上式中还有很多重复部分，为了简便可把它们省去，得

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2 & -7 & +0 & +14 & +4 & 1-2 \\ \cline{6-6}
 & -4 & & & & 2-3-6+2 \\ \cline{2-2}
 & -3 & & & & \\
 & & +6 & & & \\ \cline{3-3}
 & & -6 & & & \\
 & & & +12 & & \\ \cline{4-4}
 & & & 2 & & \\
 & & & & -4 & \\ \cline{5-5}
 & & & & 8 &
\end{array}$$

上式中 $-6=0-6$，$2=14-12$，$8=4-(-4)$．要注意把位置对齐．其中，被减式的系数与减式的系数相隔较远，如果把它们靠拢一些，就得

$$\begin{array}{l|l}
2-7+0+14+4 & 1-2 \\ \cline{2-2}
\quad -4+6+12-4 & 2-3-6+2 \\ \cline{1-1}
\quad -3-6+\ 2+8 &
\end{array}$$

又因除式的第一项系数是 1，各项系数除以 1 仍商原数，所以除式的第一项系数 1 可以省去．商式的第一项系数总与被除式的第一项系数相同，商式的第二项系数就是第一余式的第一项系数，商式的第三项系数就是第二余式的第一项系数，商式的常数项就是第三余式的第一项系数．如果把被除式的第一项系数 2 写出来放在 -3 前面，就是商式的第一项系数．这样就可把商式各项系数也都写出来了．因此，除式下面的商式各项系数也可以省去，得到

$$\begin{array}{l|l}
2-7+0+14+4 & -2 \\ \cline{2-2}
\quad -4+6+12-4 & \\ \cline{1-1}
2-3-6+\ 2+8 &
\end{array}$$

再把除式的 -2 改为 2，用加法代替原来的减法，就得到了综合除法的简便格式

$$\begin{array}{l|l}
2-7+0+14+4 & 2 \\ \cline{2-2}
\quad +4-6-12+4 & \\ \cline{1-1}
2-3-6+\ 2+8 &
\end{array}$$

∴　商式 $Q(x)=2x^3-3x^2-6x+2$，$R=8$．

这样讲法要费一点时间，但对启发学生的创造精神有重要意义，也是值得的．