

《高等数学习题集》

# 习题解答

(上册)

北京邮电学院数学教研室

一九七九年

## 编 印 说 明

编印本习题解答是为了供本院学生学习参考之用,题目取自同济大学数学教研组所编“高等数学习题集”(1965年修订本)。大部分解答采用了上海科技大学的油印稿,由本教研室集体校阅。由于时间仓促,题解中会有不少错误,请参考者及时指出,以便更正。

数学教研组

一九七九年五月

# 上册目录

## 第一编 解析几何

第一章	平面上的直角坐标、曲线及其方程.....	1
	平面上点的直角坐标, 坐标变换(1) 两点间的距离, 线段的定比分 点(5) 曲线及其方程(13) 杂题(18) 曲线的参数方程(20)	
第二章	直线.....	23
	杂题(34)	
第三章	二次曲线.....	47
	圆(47) 椭圆(51) 双曲线(56) 抛物线(61) 一般二次方程的 简化(64) 椭圆及双曲线的准线(73) 杂题(76)	
第四章	极坐标.....	83
第五章	行列式及线性方程组.....	90
第六章	空间直角坐标、矢量代数初步.....	107
	空间点的直角坐标(107) 矢量代数(112)	
第七章	曲面方程与空间曲线方程.....	131
第八章	平面与空间直线方程.....	141
	平面方程(141) 空间的直线方程(153) 杂题(166)	
第九章	二次曲面.....	179

## 第二编 数学分析

第十章	函数.....	186
	绝对值的运算(186) 函数值的求法(188) 函数值的定义域(190) 建立函数关系(195) 函数性质的讨论(200) 函数图形(205) 双曲函数(213)	
第十一章	极限.....	216
	数列的极限(216) 函数的极限(219) 无穷大, 无穷小(221) 极 限的求法(225) 无穷小的比较, 等价无穷小(235) 杂题(237)	

第十二章	函数的连续性·····	246
第十三章	导数及微分·····	253
	导数概念(253) 求函数的导数(257) 杂题(277) 导数的应用 (286) 微分及其应用(297) 高阶导数(304) 参变量方程的导 数(314)	
第十四章	中值定理, 导数在函数研究上的应用·····	319
	中值定理(319) 罗彼塔法则(324) 台劳公式(333) 函数的单调 性(341) 函数的极值(350) 最大值和最小值应用杂题(362) 曲 线的凹性和拐点(374) 渐近线(380) 函数研究及其图形的描 绘(385) 平面曲线的曲率(404) 方程的近似解(409)	

## 下册目录

第十五章	不定积分	417
	简单不定积分(419) 换元积分法(422) 分部积分法(436) 换元积分法和分部积分法杂题(434) 分式有理函数的积分(447) 三角函数有理式的积分(455) 简单代数无理式的积分(458) 杂题(466)	
第十六章	定积分	482
	定积分概念(482) 定积分的性质(485) 上限(或下限)为变量的定积分(487) 计算定积分(应用牛顿—莱布尼兹公式)(489) 杂题(502) 计算定积分(应用近似积分公式)(510) 广义积分(514)	
第十七章	定积分的应用	523
	平面图形的面积(523) 体积(535) 平面曲线的弧长(544) 定积分在力学及物理学上的应用(549)	
第十八章	级数	559
第十九章	富里哀级数	600
第二十章	多元函数的微分法及其应用	621
	多元函数(621) 偏导数(627) 全微分及其应用(633) 复合函数的微分法(637) 高阶偏导数(642) 隐函数的微分法(656) 空间曲线的切线及法平面(667) 曲面的切平面及法线(673) 台劳公式(679) 多元函数的极值(686)	
第二十一章	微分方程	708
	基本概念(708) 一阶微分方程(713) 高阶微分方程(753) 线性微分方程(762) 级数解法(784)	
第二十二章	重积分	790
	二重积分(790) 三重积分(808) 曲面面积(813) 重积分在物理学上的应用(816)	
第二十三章	曲线积分与曲面积分	828
	曲线积分(828) 曲面积分(849)	

注意：本书在题目号码右上角加记号“\*”时，表示较难之题；在题目号码右上角加记号“▲”时，表示超出大纲之题。



Z012147

## 第十五章 不定积分

15.1 一曲线过原点, 且在每一点的切线的斜率等于  $2x$ , 试求这曲线的方程。

解 由题意  $y' = 2x$ , 故  $y = \int 2x dx = x^2 + C$

又因  $y(0) = 0$ ;  $\therefore 0 = 0^2 + C$ , 即  $C = 0$

故曲线为  $y = x^2$

15.2 在积分曲线族  $y = \int 5x^2 dx$  中, 求一通过点  $(\sqrt{3}, 5\sqrt{3})$  的曲线。

解  $\because y = \int 5x^2 dx = \frac{5}{3}x^3 + C$ , 又  $y(\sqrt{3}) = 5\sqrt{3}$ ,

$\therefore 5\sqrt{3} = \frac{5}{3}(\sqrt{3})^3 + C$ , 即  $C = 0$

故过点  $(\sqrt{3}, 5\sqrt{3})$  的曲线为:

$$y = \frac{5}{3}x^3.$$

15.3 试证函数  $y_1 = \ln(ax)$  和  $y_2 = \ln x$  是同一函数的原函数。

证  $\because y'_1 = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}$ ;  $y'_2 = \frac{1}{x}$ ,  $\therefore y'_1 = y'_2$ 。

即  $y_1$  及  $y_2$  都是函数  $\frac{1}{x}$  的原函数。

事实上,  $y_1 = \ln ax = \ln a + \ln x = y_2 + \ln a$ , 是相差一个常数项的。

15.4 试证函数  $y_1 = (e^x + e^{-x})^2$  和  $y_2 = (e^x - e^{-x})^2$  是同一函数的原函数。

证  $\because y'_1 = 2(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})$ ;

$$y'_2 = 2(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})$$

$\therefore y_1$  和  $y_2$  都是函数  $2(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})$  的原函数。

15.5 验证函数  $\frac{1}{2}e^{2x}$ ,  $e^x \operatorname{sh} x$  和  $e^x \operatorname{ch} x$  各差一个常数。并证明所给的每个函数都是

$\frac{e^x}{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}$  的原函数。

$$\text{证 } \textcircled{1} \because e^x \operatorname{sh} x = e^x \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2};$$

$$e^x \operatorname{ch} x = e^x \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{2};$$

$$e^x \operatorname{sh} x = e^x \operatorname{ch} x - 1$$

∴  $\frac{1}{2}e^{2x}$ ,  $e^x \operatorname{sh} x$  和  $e^x \operatorname{ch} x$  各差一个常数。

$$\textcircled{2} \quad \because \int \frac{e^{-x}}{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x} dx = \int \frac{e^{-x}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2}} dx = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C.$$

∴  $\frac{1}{2}e^{2x}$  是  $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$  的一个原函数。

∴  $e^x \operatorname{sh} x$  和  $e^x \operatorname{ch} x$  和  $\frac{1}{2}e^{2x}$  都只相差一项常数, 故也是  $\frac{e^x}{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}$  的原函数, 证毕。

15.6 一质点作直线运动, 已知其速度为  $v = \sin \omega t$ , 而且  $S|_{t=0} = S_0$ , 求时间  $t$  时物体和原点间的距离  $S$ 。

$$\text{解} \quad \because S' = v, \text{ 故 } S = \int v dt = \int \sin \omega t dt = -\frac{1}{\omega} \cos \omega t + C.$$

$$\because S|_{t=0} = S_0, \quad \therefore S_0 = -\frac{1}{\omega} \cdot 1 + C,$$

$$\text{故 } C = S_0 + \frac{1}{\omega},$$

$$\therefore S = S_0 + \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega} \cos \omega t = S_0 + \frac{1}{\omega} (1 - \cos \omega t).$$

15.7 一质点作直线运动, 已知其加速度为  $a = 12t^2 - 3 \sin t$ , 如果  $v_0 = 5$ ,  $S_0 = -3$  求:

(a)  $v$  和  $t$  间的函数关系, (b)  $S$  和  $t$  间的函数关系。

解 (a) ∴  $a = v'$ .

$$\therefore v = \int a dt = \int (12t^2 - 3 \sin t) dt = 4t^3 + 3 \cos t + C.$$

$$\text{而 } v_0 = 5, \quad \therefore 5 = C + 3, \text{ 即 } C = 2$$

$$\text{故 } v = 4t^3 + 3 \cos t + 2$$

(b) ∴  $v = S'$

$$\therefore S = \int v dt = \int (4t^3 + 3 \cos t + 2) dt = t^4 + 3 \sin t + 2t + C$$

$$\text{而 } S_0 = -3, \quad \therefore -3 = C, \text{ 即 } C = -3$$

$$\text{故 } S = t^4 + 3 \sin t + 2t - 3$$

15.8 在平面上有一运动着的质点。如果它在  $x$  轴方向和  $y$  轴方向的分速度分别为

$$v_x = 5 \sin t, \quad v_y = 2 \cos t,$$

又  $x|_{t=0} = 5$ ,  $y|_{t=0} = C$  求:

(a) 时间为  $t$  时质点所在位置;

(b) 质点的运动方程。

(a) ∴  $v_x = \dot{x}$ ,

$$\therefore x = \int v_x dx = \int 5 \sin t dt = -5 \cos t + C_1,$$

$$\because x|_{t=0} = 5, \text{ 即 } 5 = -5 + C_1, \quad \therefore C_1 = 10$$

故  $x = 10 - 5 \cos t$

$\therefore v_y = \dot{y}$

$\therefore y = \int v_y dt = \int 2 \cos t dt = 2 \sin t + C_2$

$\therefore y|_{t=0} = 0, \therefore 0 = 2 \cdot 0 + C_2, \therefore C_2 = 0$

即  $y = 2 \sin t$

故在时刻  $t$  时质点的位置是  $(10 - 5 \cos t, 2 \sin t)$

(b)  $\therefore \cos t = \frac{10-x}{5}, \quad \sin t = \frac{y}{2}$

$\therefore \left(\frac{10-x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$

或  $4(x-10)^2 + 25y^2 = 100$

这就是运动方程，——是个以  $(10, 0)$  为中心的椭圆。

## 简单不定积分

15.9  $\int \frac{1}{x^3} dx$

解  $\int \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2x^2} + C$

15.10  $\int x\sqrt{x} dx$

解  $\int x\sqrt{x} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C$

15.11  $\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}}$

解  $\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}} = \int \frac{1}{\sqrt{2g}} h^{-\frac{1}{2}} dh = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{\frac{2h}{g}} + C$

15.12  $\int \sqrt[m]{y^n} dy$

解  $\int \sqrt[m]{y^n} dy = \int y^{\frac{n}{m}} dy = \frac{1}{\frac{n}{m} + 1} y^{\frac{n}{m} + 1} + C = \frac{m}{m+n} y^{\frac{m+n}{m}} + C$

15.13  $\int (3x^{0.4} - 5x^{-0.7} + 1) dx$

解  $\int (3x^{0.4} - 5x^{-0.7} + 1) dx = 3 \frac{1}{0.4+1} x^{1.4} - 5 \frac{1}{-0.7+1} x^{0.3} + x + C$   
 $= \frac{3}{1.4} x^{1.4} - \frac{5}{0.3} x^{0.3} + x + C =$



$$= \frac{15}{7} x^{1.4} - \frac{50}{3} x^{0.7} + x + C$$

$$15.14 \int (a - bx^2)^3 dx$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int (a - bx^2)^3 dx &= \int (a^3 - 3a^2bx^2 + 3ab^2x^4 - b^3x^6) dx \\ &= a^3x - b^2bx^3 + \frac{3}{5} ab^2x^5 - \frac{1}{7} b^3x^7 + C. \end{aligned}$$

$$15.15 \int \frac{(1-x)^2}{\sqrt[3]{x}} dx$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int \frac{(1-x)^2}{\sqrt[3]{x}} dx &= \int \frac{1-2x+x^2}{\sqrt[3]{x}} dx = \int (x^{-1/3} - 2x^{2/3} + x^{5/3}) dx \\ &= \frac{3}{2} x^{2/3} - \frac{6}{5} x^{5/3} + \frac{3}{8} x^{8/3} + C \end{aligned}$$

$$15.16 \int (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x^3} - \sqrt{x} + 1) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } I &= \int (x^2 - x + \sqrt{x} + \sqrt{x^3} - \sqrt{x} + 1) dx \\ &= \int (x^2 + x^{3/2} - x + 1) dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{5} x^{5/2} - \frac{1}{2} x^2 + x + C \end{aligned}$$

$$15.17 \int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt{x}} dx$$

$$\text{解 } I = \int (x^{1/4} - 2x^{5/12} + x^{-1/4}) dx = \frac{4}{5} x^{5/4} - \frac{24}{17} x^{17/12} + \frac{4}{3} x^{3/4} + C$$

$$15.18 \int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^4}{x^3} dx$$

$$\text{解 } I = \int (x^{-5/2} - e^x + x^{-1}) dx = -\frac{2}{3} x^{-3/2} - e^x + \ln|x| + C$$

$$15.19 \int \frac{x^3 - 27}{x - 3} dx$$

$$\text{解 } I = \int (x^2 + 3x + 9) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 9x + C$$

$$15.20 \int \frac{x^2 - 2\sqrt{2}x + 2}{x - \sqrt{2}} dx$$

$$\text{解 } I = \int \frac{(x - \sqrt{2})^2}{x - \sqrt{2}} dx = \int (x - \sqrt{2}) dx = \frac{x^2}{2} - \sqrt{2}x + C$$

$$15.21 \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

$$\text{解 } I = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$15.22 \int \frac{3x^2}{1+x^2} dx$$

$$\text{解 } I = 3 \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = 3 \int \left( 1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = 3[x - \arctan x] + C = 3x - 3\arctan x + C$$

$$15.23 \int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx$$

$$\begin{aligned} \text{解 } I &= \int \frac{2(1+x^2)-1}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{2dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^2(1+x^2)} \\ &= 2 \int \frac{dx}{x^2} - \left( \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{x^2+1} \right) = \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{1}{x} + \arctan x + C \end{aligned}$$

$$15.24 \int 3^x dx$$

$$\text{解 } I = 3^x / \ln 3 + C$$

$$15.25 \int 3^x e^x dx$$

$$\text{解 } I = \int (3e)^x dx = \frac{(3e)^x}{\ln(3e)} + C = \frac{3^x e^x}{1 + \ln 3} + C$$

$$15.26 \int \frac{2 \cdot 3^x - 5 \cdot 2^x}{3^x} dx$$

$$\begin{aligned} \text{解 } I &= \int \left( 2 - 5 \left( \frac{2}{3} \right)^x \right) dx = 2x - 5 \left( \frac{2}{3} \right)^x \cdot \frac{1}{\ln \frac{2}{3}} + C \\ &= 2x + \frac{5 \left( \frac{2}{3} \right)^x}{\ln 3 - \ln 2} + C \end{aligned}$$

$$15.27 \int \operatorname{tg}^2 x dx$$

$$\text{解 } I = \int (-1 + \sec^2 x) dx = -x + \operatorname{tg} x + C$$

$$15.28 \int 2 \sin^2 \frac{x}{2} dx$$

$$\text{解 } I = \int (1 - \cos x) dx = x - \sin x + C$$

$$15.29 \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$$

$$\text{解 } I = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \csc^2 x dx - \int \sec^2 x dx = -\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C$$

$$15.30 \int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$$

$$\text{解 } I = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} dx = \int (\cos x + \sin x) dx = \sin x - \cos x + C$$

$$15.31 \int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx$$

$$\text{解 } I = \int \frac{1 + \cos^2 x}{2 \cos^2 x} dx = \int \frac{\sec^2 x}{2} dx + \int \frac{dx}{2} = \frac{1}{2} \tan x + \frac{x}{2} + C$$

## 换元积分法

$$15.32 \int (2x-3)^{100} dx$$

$$\text{解 } I \stackrel{\text{令 } 2x-3=t}{\left(x=\frac{t+3}{2}\right)} \int t^{100} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{101} t^{101} + C = \frac{1}{202} (2x-3)^{101} + C$$

$$15.33 \int \frac{3}{(1-2x)^2} dx$$

$$\begin{aligned} \text{解 } I &\stackrel{\text{令 } 1-2x=t}{\left(x=\frac{1-t}{2}\right)} \int \frac{3}{t^2} \cdot \left(-\frac{dt}{2}\right) = -\frac{3}{2} \int \frac{dt}{t^2} \\ &= -\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{t}\right) + C = \frac{3}{2t} + C = \frac{3}{2(1-2x)} + C \end{aligned}$$

$$15.34 \int \frac{dx}{\sqrt[3]{3-2x}}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } I &\stackrel{\text{令 } t=3-2x}{\left(x=\frac{-t+3}{2}\right)} \int t^{-\frac{1}{3}} \left(-\frac{dt}{2}\right) = -\frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{3}} dt \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} t^{\frac{2}{3}} + C = -\frac{3}{4} \sqrt[3]{(3-2x)^2} + C \end{aligned}$$

$$15.35 \int \frac{dx}{3x-5}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } I &\stackrel{\text{令 } 3x-5=t}{\left(x=\frac{t+5}{3}\right)} \int \frac{1}{t} \left(\frac{dt}{3}\right) = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3} \ln |t| + C \\ &= \frac{1}{3} \ln |3x-5| + C \end{aligned}$$

$$15.36 \int (a+bx)^k dx, b \neq 0.$$

$$\text{解 } I \stackrel{\text{令 } a+bx=t}{\left(\text{即 } x=\frac{t-a}{b}\right)} \int t^k \left(\frac{dt}{b}\right) = \frac{1}{b} \int t^k dt$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{k+1} t^{k+1} + C = \frac{(a+bx)^{k+1}}{(k+1)b} + C, & \text{当 } k \neq -1, \\ \frac{1}{b} \ln|t| + C = \frac{1}{b} \ln|a+bx| + C & \text{当 } k = -1. \end{cases}$$

15.37  $\int \sin 3x dx$

解  $I \frac{\overset{\Delta}{\text{令}} 3x = t}{3dx = dt} \int \sin t \left( \frac{dt}{3} \right) = \frac{1}{3} \int \sin t dt = -\frac{1}{3} \cos t + C = -\frac{1}{3} \cos 3x + C,$

15.38  $\int \cos(\alpha - \beta x) dx, (\beta \neq 0).$

解  $I \frac{\overset{\Delta}{\text{令}} \alpha - \beta x = t}{-\beta dx = dt} \int \cos t \left( \frac{dt}{-\beta} \right) = -\frac{1}{\beta} \int \cos t dt$   
 $= -\frac{1}{\beta} \sin t + C = -\frac{1}{\beta} \sin(\alpha - \beta x) + C$

15.39  $\int \operatorname{tg} 5x dx$

解  $I \frac{\overset{\Delta}{\text{令}} 5x = t}{5dx = dt} \int \operatorname{tg} t \left( \frac{dt}{5} \right) = \frac{1}{5} \int \operatorname{tg} t dt$   
 $= \frac{1}{5} \int \frac{\sin t}{\cos t} dt \quad \overset{\Delta}{\text{令}} \cos t = u \quad -\sin t dt = du \quad -\frac{1}{5} \int \frac{du}{u}$   
 $= -\frac{1}{5} \ln|u| + C = -\frac{1}{5} \ln|\cos t| + C = -\frac{1}{5} \ln|\cos 5x| + C$

15.40  $\int e^{-3x} dx$

解  $I \frac{\overset{\Delta}{\text{令}} t = -3x}{dt = -3dx} \int e^t \left( \frac{dt}{-3} \right) = \int \frac{1}{-3} e^t dt = -\frac{1}{3} e^t + C = -\frac{1}{3} e^{-3x} + C$

15.41  $\int 10^{2x} dx$

解  $I \frac{\overset{\Delta}{\text{令}} t = 2x}{dt = 2dx} \int 10^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int 10^t dt = \frac{1}{2} \cdot 10^t \cdot \frac{1}{\ln 10} + C = \frac{10^{2x}}{2 \ln 10} + C$

15.42  $\int a^{mx+n} dx, m \neq 0.$

解  $I \frac{\overset{\Delta}{\text{令}} mx+n = t}{mdx = dt} \int a^t \left( \frac{dt}{m} \right) = \frac{1}{m} \int a^t dt = \frac{a^t}{m \ln a} + C = \frac{a^{mx+n}}{m \ln a} + C$

15.43  $\int \operatorname{sh} 3x dx$

解  $I \frac{\overset{\Delta}{\text{令}} 3x = t}{3dx = dt} \int \operatorname{sh} t \cdot \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \int \operatorname{sh} t dt = \frac{1}{3} \operatorname{ch} t + C = \frac{1}{3} \operatorname{ch} 3x + C$

15.44  $\int \operatorname{ch}(2x-5) dx$

$$\begin{aligned} \text{解 } I & \stackrel{\text{令 } 2x-5=t}{2dx=dt} \int \operatorname{ch} t \left( \frac{dt}{2} \right) = \frac{1}{2} \int \operatorname{ch} t dt \\ & = \frac{1}{2} \operatorname{sh} t + C = \frac{1}{2} \operatorname{sh}(2x-5) + C \end{aligned}$$

$$15.45 \int \frac{dx}{\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } I & \stackrel{\text{令 } 2x + \frac{\pi}{4} = t}{2dx = dt} \int \frac{dt}{\sin^2 t} = \frac{1}{2} \int \operatorname{csc}^2 t dt \\ & = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} t + C = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + C \end{aligned}$$

$$15.46 \int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$$

$$\text{解 } I \stackrel{\text{令 } 5x=t}{5dx=dt} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{5} \operatorname{arcsin} t + C = \frac{1}{5} \operatorname{arcsin} 5x + C,$$

$$15.47 \int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$$

$$\text{解 } I \stackrel{\text{令 } \frac{3}{2}x=t}{\frac{3}{2}dx=dt} \int \frac{\frac{2}{3}dt}{2\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{3} \operatorname{arcsin} t + C = \frac{1}{3} \operatorname{arcsin} \frac{3x}{2} + C$$

$$15.48 \int \frac{1}{1+9x^2} dx$$

$$\text{解 } I \stackrel{\text{令 } 3x=t}{3dx=dt} \int \frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} 3x + C$$

$$15.49 \int \frac{1}{2x^2+9} dx$$

$$\begin{aligned} \text{解 } I & \stackrel{\text{令 } \frac{\sqrt{2}}{3}x=t}{\frac{\sqrt{2}}{3}dx=dt} \int \frac{1}{9(t^2+1)} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{(t^2+1)} \\ & = \frac{\sqrt{2}}{6} \operatorname{arctg} t + C = \frac{\sqrt{2}}{6} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}x}{3} + C \end{aligned}$$

$$15.50 \int \frac{dx}{\sqrt{1+16x^2}}$$

$$\text{解 } I \stackrel{\text{令 } 4x=t}{4dx=dt} \int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{4} = \frac{1}{4} \operatorname{arsh} t + C$$

$$= \frac{1}{4} \ln(t + \sqrt{1+t^2}) + C = \frac{1}{4} \ln(3x + \sqrt{1+9x^2}) + C$$

$$15.51 \int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$$

$$\text{解} \quad \begin{cases} \text{令} \frac{3}{2}x = t \\ \frac{3}{2}dx = dt \end{cases} \int \frac{\frac{2}{3}dt}{2\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{3} \operatorname{arsh} t + C$$

$$= \frac{1}{3} \ln(t + \sqrt{1+t^2}) + C = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{3}{2}x + \sqrt{1 + \frac{9}{4}x^2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{3} \ln(3x + \sqrt{4+9x^2}) + C$$

$$15.52 \int \frac{(2x-3)dx}{x^2-3x+8}$$

$$\text{解} \quad \int \frac{\text{令} x^2-3x+8=t}{(2x-3)dx=dt} \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x^2-3x+8| + C$$

$$15.53 \int \frac{x dx}{x^2+1}$$

$$\text{解} \quad \int \frac{\text{令} x^2+1=t}{2x dx=dt} \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2} \ln|t| + C = \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + C$$

$$15.54 \int \frac{x^2 dx}{x^3+1}$$

$$\text{解} \quad \int \frac{\text{令} x^3+1=t}{3x^2 dx=dt} \frac{dt}{3t} = \frac{1}{3} \ln|t| + C = \frac{1}{3} \ln|x^3+1| + C$$

$$15.55 \int x\sqrt{1-x^2} dx$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{\text{令} 1-x^2=t}{-2x dx=dt} t^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{dt}{-2} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C \\ &= -\frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

$$15.56 \int 2x\sqrt{x^2+1} dx$$

$$\text{解} \quad \int \frac{\text{令} x^2+1=t}{2x dx=dt} t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} (x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$15.57 \int x^2 \sqrt{x^3+2} dx$$

$$\text{解} \quad \int \frac{\text{令} x^3+2=t}{3x^2 dx=dt} t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} t^{\frac{5}{2}} + C = \frac{5}{18} (x^3+2)^{\frac{5}{2}} + C$$

$$15.58 \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\text{解 } I \stackrel{\text{令 } x^2+1=t}{2x dx = dt} \int t^{-\frac{1}{2}} \frac{dt}{2} = t^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{x^2+1} + C$$

$$15.59 \int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$$

$$\text{解 } I \stackrel{\text{令 } x^4+1=t}{4x^3 dx = dt} \int t^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{dt}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} t^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{8} (x^4+1)^{\frac{2}{3}} + C$$

$$15.60 \int \frac{x^2 dx}{x^6+4}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } I &\stackrel{\text{令 } x^3=u}{3x^2 dx = du} \int \frac{du}{3(u^2+4)} \stackrel{\text{令 } \frac{u}{2}=t}{\frac{1}{2} du = dt} \int \frac{2dx}{3(t^2+1)4} \\ &= \frac{1}{6} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \left( \frac{u}{2} \right) + C = \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{x^3}{2} + C \end{aligned}$$

$$15.61 \int \frac{x dx}{\sqrt{4-x^4}}$$

$$\text{解 } I \stackrel{\text{令 } \frac{x^2}{2}=t}{x dx = dt} \int \frac{dt}{2\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2} \arcsin t + C = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{2} + C$$

$$15.62 \int e^x (\sin e^x) dx$$

$$\text{解 } I \stackrel{\text{令 } e^x=u}{e^x dx = du} \int \sin u du = -\cos u + C = -\cos e^x + C$$

$$15.63 \int e^{x^2} x dx$$

$$\text{解 } I \stackrel{\text{令 } x^2=u}{2x dx = du} \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

$$15.64 \int e^{-x^3} \cdot x^2 dx$$

$$\text{解 } I \stackrel{\text{令 } -x^3=u}{-3x^2 dx = du} \int e^u \cdot \frac{du}{-3} = -\frac{1}{3} e^u + C = -\frac{1}{3} e^{-x^3} + C$$

$$15.65 \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$$

$$\text{解 } I \stackrel{\text{令 } \ln x=u}{\frac{1}{x} dx = du} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} (\ln x)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$15.66 \int \frac{dx}{x \ln x}$$

$$\text{解 } I = \int \frac{\ln x}{x} dx = \int \frac{\ln u}{u} du = \ln |u| + C = \ln |\ln x| + C$$

$$15.67 \int \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\sqrt{\sin \theta}} d\theta$$

$$\text{解 } I = \int \frac{\cos \theta}{\cos \theta d\theta} = \int u^{-\frac{1}{2}} du = -2u^{-\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{\sqrt{\sin \theta}} + C$$

$$15.68 \int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x}}$$

$$\text{解 } I = \int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x dx} = \int u^{-\frac{1}{2}} du = 2u^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{\operatorname{tg} x} + C$$

$$15.69 \int \frac{(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^2}{1+x^2} dx$$

$$\text{解 } I = \int \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{1+x^2} dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{3} (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^3 + C$$

$$15.70 \int \frac{dx}{(\operatorname{arc} \sin x)^2 \sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{解 } I = \int \frac{\operatorname{arc} \sin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int u^{-2} du = -u^{-1} + C = -\frac{1}{\operatorname{arc} \sin x} + C$$

$$15.71 \int \cos^2 x dx$$

$$\text{解 } I = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

$$15.72 \int \sin^4 x dx$$

$$\begin{aligned} \text{解 } I &= \int \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx \\ &= \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} + C \\ &= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C \end{aligned}$$

$$15.73 \int \cos^2 x \sin^2 x dx$$

$$\text{解 } I = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx = \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32} \sin 4x + C$$

$$15.74 \int \sin 3x \sin 5x dx$$

$$\text{解 } I = \int \frac{-1}{2} (\cos 8x - \cos 2x) dx = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x + C$$

$$15.75 \int \cos^3 x dx$$



$$\begin{aligned} \text{解 } I &= \int \cos x (1 - \sin^2 x) dx \stackrel{\substack{\text{令 } \sin x = u \\ \cos x dx = du}}{\quad} = \int (1 - u^2) du = u - \frac{u^3}{3} + C \\ &= \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C \end{aligned}$$

$$15.76 \int \sin^2 x \cos^5 x dx$$

$$\begin{aligned} \text{解 } I &= \int \sin^2 x (1 - \cos^2 x) \cos^4 x dx \stackrel{\substack{\text{令 } \cos x = u \\ -\sin x dx = du}}{\quad} = - \int (1 - u^2) u^4 du \\ &= \frac{1}{8} \cos^7 x - \frac{1}{6} \cos^5 x + C \end{aligned}$$

$$15.77 \int \sec^4 x dx$$

$$\text{解 } I = \int \sec^2 x d(\tan x) = \int [1 + \tan^2 x] d(\tan x) = \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x + C$$

$$15.78 \int \tan^4 x dx$$

$$\begin{aligned} \text{解 } I &= \int (\sec^2 x - 1)^2 dx = \int (\sec^4 x - 2 \sec^2 x + 1) dx = x + \int (\sec^2 x - 2) \sec^2 x dx \\ &= x + \int (1 + \tan^2 x - 2) d(\tan x) = -\frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x + C \end{aligned}$$

$$15.79 \int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } I &\stackrel{\text{令 } x = \sin t}{dx = \cos t dt} \int \frac{\cos t dt}{\cos^3 t} = \int (\cos t)^{-2} dt \\ &= \int \sec^2 t dt = \tan t + C = \frac{x}{1-x^2} + C \end{aligned}$$

$$15.80 \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } I &\stackrel{\text{令 } x = a \sin t}{dx = a \cos t dt} \int \frac{a^2 \sin^2 t \cdot a \cos t dt}{a \cos t} = \int a^2 \sin^2 t dt \\ &= \frac{a^2}{2} \int (1 - \cos 2t) dt = \frac{a^2}{2} t - \frac{a^2}{4} \sin 2t + C \end{aligned}$$

$$\because \frac{x}{a} = \sin t, \therefore t = \arcsin \frac{x}{a}, \cos t = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$$

$$\therefore \sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \frac{x \sqrt{a^2 - x^2}}{a^2}$$

$$\text{故 } I = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$15.81 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$