《高 等 数 学 习 题 集》

# 习 题 解 答

（上 册）

北京邮电学院数学教研室

一九七九年

# 编印说明

编印本习题解答是为了供本院学生学习参考之用，题目取自同济大学数学教研组所编“高等数学习题集”(1965年修订本)。大部分解答采用了上海科技大学的油印稿，由本教研室集体校阅。由于时间仓促，题解中会有不少错误，请参考者及时指出，以便更正。

数学教研组

一九七九年五月

# 上 册 目 录

## 第一编　解析几何



## 第二编　数学分析

# 下 册 目 录



注意：本书在题目号码右上角加记号“*”时，表示较难之题；在题目号码右上角加记号“△”时，表示超出大纲之题。

# 第十五章　不定积分

15.1 一曲线过原点，且在每一点的切线的斜率等于 $2x$，试求这曲线的方程。

解　由题意 $y' = 2x$，故 $y = \int 2x\,dx = x^2 + C$

又因 $y(0) = 0$；$\therefore$ $0 = 0^2 + C$，即 $C = 0$

故曲线为 $y = x^2$

15.2 在积分曲线族 $y = \int 5x^2 dx$ 中，求一通过点($\sqrt{3}$，$5\sqrt{3}$)的曲线。

解　$\because$ $y = \int 5x^2 dx = \frac{5}{3}x^3 + C$，又 $y(\sqrt{3}) = 5\sqrt{3}$，

$\therefore$ $5\sqrt{3} = \frac{5}{3}(\sqrt{3})^3 + C$，即 $C = 0$

故过点($\sqrt{3}$，$5\sqrt{3}$)的曲线为：

$$y = \frac{5}{3}x^3。$$

15.3 试证函数 $y_1 = \ln(ax)$ 和 $y_2 = \ln x$ 是同一函数的原函数。

证　$\because$ $y_1' = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}$；$y_2' = \frac{1}{x}$，$\therefore$ $y_1' = y_2'$。

即 $y_1$ 及 $y_2$ 都是函数 $\frac{1}{x}$ 的原函数。

事实上，$y_1 = \ln ax = \ln a + \ln x = y_2 + \ln a$，是相差一个常数项的。

15.4 试证函数 $y_1 = (e^x + e^{-x})^2$ 和 $y_2 = (e^x - e^{-x})^2$ 是同一函数的原函数。

证　$\because$ $y_1' = 2(e^x + {}^{-x})(e^x - e^{-x})$；

$y_2' = 2(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})$

$\therefore$ $y_1$ 和 $y_2$ 都是函数 $2(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})$ 的原函数。

15.5 验证函数 $\frac{1}{2}e^{2x}$，$e^x \mathrm{sh}x$ 和 $e^x \mathrm{ch}x$ 各差一个常数。并证明所给的每个函数都是 $\frac{e^x}{\mathrm{ch}x - \mathrm{sh}x}$ 的原函数。

证　① $\because$ $e^x \mathrm{sh}x = e^x \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}$，

$e^x \mathrm{ch}x = e^x \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}$；

$e^x \mathrm{sh}x = e^x \mathrm{ch}x - 1$

$\therefore\ \frac{1}{2}e^{2x}$，$e^x\text{sh}x$ 和 $e^x\text{ch}x$ 各差一个常数。

② $\because\ \int\frac{e^x}{\text{ch}x-\text{sh}x}dx=\int\frac{e^x}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}-\frac{e^x-e^{-x}}{2}}=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+C$。

$\therefore\ \frac{1}{2}e^{2x}$ 是 $\frac{e^x}{\text{ch}x-\text{sh}x}$ 的一个原函数。

$\because\ e^x\text{sh}x$ 和 $e^x\text{ch}x$ 和 $\frac{1}{2}e^{2x}$ 都只相差一项常数，故也是 $\frac{e^x}{\text{ch}x-\text{sh}x}$ 的原函数，

证毕。

15.6 一质点作直线运动，已知其速度为 $v=\sin\omega t$，而且 $S]_{t=0}=S_0$，求时间 $t$ 时物体和原点间的距离 $S$。

解 $\because\ S'=v$，故 $S=\int v dt=\int\sin\omega t dt=\frac{-1}{\omega}\cos\omega t+C$。

$\because\ S]_{t=0}=S_0$，$\therefore\ S_0=-\frac{1}{\omega}\cdot 1+C$，

故 $C=S_0+\frac{1}{\omega}$，

$\therefore\ S=S_0+\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\omega}\cos\omega t=S_0+\frac{1}{\omega}(1-\cos\omega t)$。

15.7 一质点作直线运动，已知其加速度为 $a=12t^2-3\sin t$，如果 $v_0=5$，$S_0=-3$ 求：

$(a)$ $v$ 和 $t$ 间的函数关系，$(b)$ $S$ 和 $t$ 间的函数关系。

解 $(a)$ $\therefore\ a=v'$。

$\therefore\ v=\int a\,dt=\int(12t^2-3\sin t)dt=4t^3+3\cos t+C$。

而 $v_0=5$，$\therefore\ 5=C+3$，即 $C=2$

故 $v=4t^3+3\cos t+2$

$(b)$ $\because\ v=S'$

$\therefore\ S=\int vdt=\int(4t^3+3\cos t+2)dt=t^4+3\sin t+2t+C$

而 $S_0=-3$，$\therefore\ -3=C$，即 $C=-3$

故 $S=t^4+3\sin t+2t-3$

15.8 在平面上有一运动着的质点。如果它在 $x$ 轴方向和 $y$ 轴方向的分速度分别为

$v_x=5\sin t$，$v_y=2\cos t$，

又 $x]_{t=0}=5$，$y]_{t=0}=0$ 求：

$(a)$ 时间为 $t$ 时质点所在位置；

$(b)$ 质点的运动方程。

$(a)$ $\because\ v_x=\dot{x}$，

$\therefore\ x=\int v_x dx=\int 5\sin t dt=-5\cos t+C_1$，

$\because\ x]_{t=0}=5$，即 $5=-5+C_1$，$\therefore\ C_1=10$

故　$x = 10 - 5\cos t$

∵　$v_y = \dot{y}$

∴　$y = \int v_y\, dt = \int 2\cos t\, dt = 2\sin t + C_2$

∵　$y]_{t=0} = 0$，∴　$0 = 2\cdot 0 + C_2$，∴　$C_2 = 0$

即　$y = 2\sin t$

故在时刻 $t$ 时质点的位置是$(10 - 5\cos t,\ 2\sin t)$

$(b)$ ∵　$\cos t = \dfrac{10 - x}{5}$，　　$\sin t = \dfrac{y}{2}$

∴　$\left(\dfrac{10 - x}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2 = 1$

或　$4(x - 10)^2 + 25y^2 = 100$

这就是运动方程，——是个以$(10,0)$为中心的椭圆。

## 简 单 不 定 积 分

15.9 $\int \dfrac{1}{x^3}\, dx$

解　$\int \dfrac{1}{x^3}\, dx = -\dfrac{1}{2x^2} + C$

15.10 $\int x\sqrt{x}\, dx$

解　$\int x\sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \dfrac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C$

15.11 $\int \dfrac{dh}{\sqrt{2gh}}$

解　$$\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}} = \int \frac{1}{\sqrt{2g}} h^{-\frac{1}{2}} dh = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{\frac{2h}{g}} + C\ ;$$

15.12 $\int \sqrt[m]{y^n}\, dy$

解　$$\int \sqrt[m]{y^n}\, dy = \int y^{\frac{n}{m}} dy = \frac{1}{\frac{n}{m} + 1} y^{\frac{n}{m} + 1} + C = \frac{m}{m + n} y^{\frac{m+n}{m}} + C$$

15.13 $\int (3x^{0.4} - 5x^{-0.7} + 1)\, dx$。

解　$$\int (3x^{0.4} - 5x^{-0.7} + 1)\, dx = 3\frac{1}{0.4 + 1} x^{1.4} - 5\cdot \frac{1}{-0.7 + 1} x^{0.3} + x + C$$

$$= \frac{3}{1.4} x^{1.4} - \frac{5}{0.3} x^{0.3} + x + C =$$

$$= \frac{15}{7}x^{1.4} - \frac{50}{3}x^{0.3} + x + C$$

15.14 $\int (a - bx^2)^3 dx$

解 $\int (a - bx^2)^3 dx = \int (a^3 - 3a^2bx^2 + 3abx^4 + 3ab^2x^4 - b^3x^6) dx$

$$= a^3x - a^2bx^3 + \frac{3}{5}ab^2x^5 - \frac{1}{7}b^3x^7 + C 。$$

15.15 $\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt[3]{x}} dx$

解 $\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt[3]{x}} dx = \int \frac{1-2x+x^2}{\sqrt[3]{x}} dx = \int (x^{-\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{5}{3}}) dx$

$$= \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} + C$$

15.16 $\int (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x^3} - \sqrt{x} + 1) dx$。

解 $I = \int (x^2 - x + \sqrt{x} + \sqrt{x^3} - \sqrt{x} + 1) dx$

$= \int [x^2 + x^{5/2} - x + 1] dx$

$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{1}{2}x^2 + x + C$

15.17 $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx$

解 $I = \int (x^{\frac{1}{4}} - 2x^{\frac{5}{12}} + x^{-\frac{1}{4}}) dx = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} - \frac{24}{17}x^{\frac{17}{12}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + C$

15.18 $\int \frac{\sqrt{x} - x^3e^x + x^2}{x^3} dx$

解 $I = \int (x^{-\frac{5}{2}} - e^x + x^{-1}) dx = -\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}} - e^x + \ln|x| + C$

15.19 $\int \frac{x^3 - 27}{x - 3} dx$

解 $I = \int (x^2 + 3x + 9) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 9x + C$

15.20 $\int \frac{x^2 - 2\sqrt{2}x + 2}{x - \sqrt{2}} dx$

解 $I = \int \frac{(x - \sqrt{2})^2}{x - \sqrt{2}} dx = \int (x - \sqrt{2}) dx = \frac{x^2}{2} - \sqrt{2}x + C$

15.21 $\int \frac{\sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 - x^4}} dx$

解　$I=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$

15.22 $\int\frac{3x^2}{1+x^2}dx$

解　$I=3\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=3\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=3(x-\text{arc tg}x)+C=3x-3\text{arc tg}x+C$

15.23 $\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$

解　$I=\int\frac{2(1+x^2)-1}{x^2(1+x^2)}dx=\int\frac{2dx}{x^2}-\int\frac{dx}{x^2(1+x^2)}$

$=2\int\frac{dx}{x^2}-\left(\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{dx}{(x^2+1)}\right)=\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{x^2+1}=-\frac{1}{x}+\text{arc tg}x+C$

15.24 $\int 3^x dx$

解　$I=3^x/\ln 3+C$

15.25 $\int 3^x e^x dx$

解　$I=\int(3e)^x dx=\frac{(3e)^x}{\ln(3e)}+C=\frac{3^x e^x}{1+\ln 3}+C$

15.26 $\int\frac{2\cdot 3^x-5\cdot 2^x}{3^x}dx$

解　$I=\int\left[2-5\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]dx=2x-5\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\frac{1}{\ln\frac{2}{3}}+C$

$=2x+\frac{5\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln 3-\ln 2}+C$

15.27 $\int\text{tg}^2 x dx$

解　$I=\int(-1+\sec^2 x)dx=-x+\text{tg}x+C$

15.28 $\int 2\sin^2\frac{x}{2}dx$

解　$I=\int(1-\cos x)dx=x-\sin x+C$

15.29 $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$

解　$I=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=\int\csc^2 x dx-\int\sec^2 x dx=-\text{ctg}x-\text{tg}x+C$

15.30 $\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx$

解 $I=\int\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos x-\sin x}dx=\int(\cos x+\sin x)dx=\sin x-\cos x+C$

15.31 $\int\frac{1+\cos^2x}{1+\cos 2x}dx$

解 $I=\int\frac{1+\cos^2x}{2\cos^2x}dx=\int\frac{\sec^2x}{2}dx+\int\frac{dx}{2}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}x+\frac{x}{2}+C$

## 换 元 积 分 法

15.32 $\int(2x-3)^{100}dx$

解 $I\xlongequal[\left(x=\frac{t+3}{2}\right)]{令2x-3=t}\int t^{100}\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{101}t^{101}+C=\frac{1}{202}(2x-3)^{101}+C$

15.33 $\int\frac{3}{(1-2x)^2}dx$

解 $I\xlongequal[\left(x=\frac{1-t}{2}\right)]{令1-2x=t}\int\frac{3}{t^2}\cdot\left(-\frac{dt}{2}\right)=-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^2}$

$=-\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{t}\right)+C=\frac{3}{2t}+C=\frac{3}{2(1-2x)}+C$

15.34 $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{3-2x}}$

解 $I\xlongequal[\left(x=\frac{-t+3}{2}\right)]{令t=3-2x}\int t^{-\frac{1}{3}}\left(-\frac{dt}{2}\right)=-\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{3}}dt$

$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}}+C=-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(3-2x)^2}+C$

15.35 $\int\frac{dx}{3x-5}$

解 $I\xlongequal[\left(x=\frac{t+5}{3}\right)]{令3x-5=t}\int\frac{1}{t}\left(\frac{dt}{3}\right)=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{3}\ln|t|+C$

$=\frac{1}{3}\ln|3x-5|+C$

15.36 $\int(a+bx)^Kdx$，$b\neq0$。

解 $I\xlongequal[\left(即x=\frac{t-a}{b}\right)]{令a+bx=t}\int t^K\left(\frac{dt}{b}\right)=\frac{1}{b}\int t^Kdt$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{b}\cdot\dfrac{1}{K+1}t^{K+1}+C=\dfrac{(a+bx)^{K+1}}{(K+1)b}+C, & \text{当 } K\neq -1,\\ \dfrac{1}{b}\ln|t|+C=\dfrac{1}{b}\ln|a+bx|+C & \text{当 } k=-1。\end{cases}$$

15.37 $\int \sin 3x dx$

解 $I\xlongequal[3dx=dt]{令 3x=t}\int \sin t\left(\dfrac{dt}{3}\right)=\dfrac{1}{3}\int \sin t dt=\dfrac{-1}{3}\cos t+C=-\dfrac{1}{3}\cos 3x+C$，

15.38 $\int \cos(\alpha-\beta x)dx$，$(\beta\neq 0)$。

解 $I\xlongequal[-\beta dx=dt]{令 \alpha-\beta x=t}\int \cos t\left(\dfrac{dt}{-\beta}\right)=-\dfrac{1}{\beta}\int \cos t dt$

$=\dfrac{-1}{\beta}\sin t+C=\dfrac{-1}{\beta}\sin(\alpha-\beta x)+C$

15.39 $\int \operatorname{tg}5x dx$

解 $I\xlongequal[5dx=dt]{令 5x=t}\int \operatorname{tg}t\left(\dfrac{dt}{5}\right)=\dfrac{1}{5}\int \operatorname{tg}t dt$

$=\dfrac{1}{5}\int \dfrac{\sin t}{\cos t}dt\xlongequal[-\sin t dt=du]{令 \cos t=u}-\dfrac{1}{5}\int \dfrac{du}{u}$

$=-\dfrac{1}{5}\ln|u|+C=-\dfrac{1}{5}\ln|\cos t|+C=-\dfrac{1}{5}\ln|\cos 5x|+C$

15.40 $\int e^{-3x}dx$

解 $I\xlongequal[dt=-3dx]{令 t=-3x}\int e^{t}\left(\dfrac{dt}{-3}\right)=\int \dfrac{1}{-3}e^{t}dt=-\dfrac{1}{3}e^{t}+C=-\dfrac{1}{3}e^{-3x}+C$

15.41 $\int 10^{2x}dx$

解 $I\xlongequal[dt=2dx]{令 t=2x}\int 10^{t}\dfrac{dt}{2}=\dfrac{1}{2}\int 10^{t}dt=\dfrac{1}{2}10^{t}\dfrac{1}{\ln 10}+C=\dfrac{10^{2x}}{2\ln 10}+C$

15.42 $\int a^{mx+n}dx$，$m\neq 0$。

解 $I\xlongequal[mdx=dt]{令 mx+n=t}\int a^{t}\left(\dfrac{dt}{m}\right)=\dfrac{1}{m}\int a^{t}dt=\dfrac{a^{t}}{m\ln a}+C=\dfrac{a^{mx+n}}{m\ln a}+C$

15.43 $\int \operatorname{sh}3x dx$

解 $I\xlongequal[3dx=dt]{令 3x=t}\int \operatorname{sh}t\cdot\dfrac{dt}{3}=\dfrac{1}{3}\int \operatorname{sh}t dt==\dfrac{1}{3}\operatorname{ch}t+C=\dfrac{1}{3}\operatorname{ch}3x+C$

15.44 $\int \operatorname{ch}(2x-5)dx$

解 $I \xlongequal[2dx=dt]{令 2x-5=t} \int \mathrm{ch}t\left(\frac{dt}{2}\right)=\frac{1}{2}\int \mathrm{ch}t\,dt$

$=\frac{1}{2}\mathrm{sh}t+C=\frac{1}{2}\mathrm{sh}(2x-5)+C$

15.45 $\int \frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$

解 $I \xlongequal[2dx=dt]{令 2x+\frac{\pi}{4}=t} \int \frac{\frac{dt}{2}}{\sin^2 t}=\frac{1}{2}\int \csc^2 t\,dt$

$=-\frac{1}{2}\mathrm{ctg}t+C=-\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+C$

15.46 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$

解 $I \xlongequal[5dx=dt]{令 5x=t} \int \frac{\frac{dt}{5}}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{5}\arcsin t+C=\frac{1}{5}\arcsin 5x+C$,

15.47 $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$

解 $I \xlongequal[\frac{3}{2}dx=dt]{令 \frac{3}{2}x=t} \int \frac{\frac{2}{3}dt}{2\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{3}\arcsin t+C=\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2}+C$

15.48 $\int \frac{1}{1+9x^2}dx$

解 $I \xlongequal[3dx=dt]{令 3x=t} \int \frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\mathrm{arctg}t+C=\frac{1}{3}\mathrm{arctg}3x+C$

15.49 $\int \frac{1}{2x^2+9}dx$

解 $I \xlongequal[\frac{\sqrt{2}}{3}dx=dt]{令 \frac{\sqrt{2}}{3}x=t} \int \frac{1}{9(t^2+1)}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}dt=\frac{1}{3\sqrt{2}}\int \frac{dt}{(t^2+1)}$

$=\frac{\sqrt{2}}{6}\mathrm{arctg}t+C=\frac{\sqrt{2}}{6}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{3}+C$

15.50 $\int \frac{dx}{\sqrt{1+16x^2}}$

解 $I \xlongequal[4dx=dt]{令 4x=t} \int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{dt}{4}=\frac{1}{4}\mathrm{arsh}t+C$

$$= \frac{1}{4}\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)+C = \frac{1}{4}\ln\left(4x+\sqrt{1+16x^2}\right)+C$$

15.51 $\int \frac{dx}{\sqrt{4+9x^2}}$

解 $I \xlongequal[\frac{3}{2}dx = dt]{令 \frac{3}{2}x = t} \int \frac{\frac{2}{3}dt}{2\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{3}\operatorname{arsh} t + C$

$$= \frac{1}{3}\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)+C = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{3}{2}x+\sqrt{1+\frac{9}{4}x^2}\right)+C$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left(3x+\sqrt{4+9x^2}\right)+C$$

15.52 $\int \frac{(2x-3)dx}{x^2-3x+8}$

解 $I \xlongequal[(2x-3)dx = dt]{令 x^2-3x+8 = t} \int \frac{dt}{t} = \ln|t|+C = \ln|x^2-3x+8|+C$

15.53 $\int \frac{xdx}{x^2+1}$

解 $I \xlongequal[2xdx = dt]{令 x^2+1 = t} \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2}\ln|t|+C = \frac{1}{2}\ln|x^2+1|+C$

15.54 $\int \frac{x^2dx}{x^3+1}$

解 $I \xlongequal[3x^2dx = dt]{令 x^3+1 = t} \int \frac{dt}{3t} = \frac{1}{3}\ln|t|+C = \frac{1}{3}\ln|x^3+1|+C$

15.55 $\int x\sqrt{1-x^2}dx$

解 $I \xlongequal[-2xdx = dt]{令 1-x^2 = t} \int t^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{dt}{-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C$

$$= -\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}+C = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$$

15.56 $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$

解 $I \xlongequal[2xdx = dt]{令 x^2+1 = t} \int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C$

15.57 $\int x^2\sqrt[5]{x^3+2}dx$

解 $I \xlongequal[3x^2dx = dt]{令 x^3+2 = t} \int t^{\frac{1}{5}}\frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6}t^{\frac{6}{5}}+C = \frac{5}{18}(x^3+2)^{\frac{6}{5}}+C$

15.58 $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$

解 $I \xrightarrow[2xdx=dt]{令x^2+1=t} \int t^{-\frac{1}{2}} \frac{dt}{2} = t^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{x^2+1} + C$

15.59 $\int \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$

解 $I \xrightarrow[4x^3dx=dt]{令x^4+1=t} \int t^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{dt}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} t^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{8}(x^4+1)^{\frac{2}{3}} + C$

15.60 $\int \frac{x^2dx}{x^6+4}$

解 $I \xrightarrow[3x^2dx=du]{令x^3=u} \int \frac{du}{3(u^2+4)} \xrightarrow[\frac{1}{2}du=dt]{令\frac{u}{2}=t} \int \frac{2dx}{3(t^2+1)4}$

$= \frac{1}{6}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{2}\right) + C = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{2} + C$

15.61 $\int \frac{xdx}{\sqrt{4-x^4}}$

解 $I \xrightarrow[xdx=dt]{令\frac{x^2}{2}=t} \int \frac{dt}{2\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}\arcsin t + C = \frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{2} + C$

15.62 $\int e^x(\sin e^x)dx$

解 $I \xrightarrow[e^xdx=du]{令e^x=u} \int \sin u du = -\cos u + C = -\cos e^x + C$

15.63 $\int e^{x^2} x dx$

解 $I \xrightarrow[2xdx=du]{令x^2=u} \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

15.64 $\int e^{-x^3} \cdot x^2dx$

解 $I \xrightarrow[-3x^2dx=du]{令-x^3=u} \int e^u \cdot \frac{du}{-3} = -\frac{1}{3}e^u + C = -\frac{1}{3}e^{-x^3} + C$

15.65 $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$

解 $I \xrightarrow[\frac{1}{x}dx=du]{令\ln x=u} \int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}} + C$

15.66 $\int \frac{dx}{x\ln x}$

解 $I \xlongequal[\frac{dx}{x}=du]{\text{令}\ln x=u} \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\ln x| + C$

15.67 $\int \frac{\mathrm{ctg}\theta}{\sqrt{\sin\theta}} d\theta$

解 $I \xlongequal[\cos\theta d\theta = du]{\text{令}\sin\theta = u} \int u^{-\frac{3}{2}} du = -2u^{-\frac{1}{2}} + C = \frac{-2}{\sqrt{\sin\theta}} + C$

15.68 $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\mathrm{tg}x}}$

解 $I \xlongequal[\frac{1}{\cos^2 x}dx = du]{\text{令}\mathrm{tg}x = u} \int u^{-\frac{1}{2}} du = 2u^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{\mathrm{tg}x} + C$

15.69 $\int \frac{(\mathrm{arc\,tg}x)^2}{1+x^2} dx$

解 $I \xlongequal[\frac{1}{1+x^2}dx = du]{\text{令}\mathrm{arc\,tg}x = u} \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{3}(\mathrm{arc\,tg}x)^3 + C$

15.70 $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$

解 $I \xlongequal[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = du]{\text{令}\arcsin x = u} \int u^{-2} du = -u^{-1} + C = -\frac{1}{\arcsin x} + C$

15.71 $\int \cos^2 x dx$

解 $I = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

15.72 $\int \sin^4 x dx$

解 $I = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx$

$= \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2} dx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} + C$

$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$

15.73 $\int \cos^2 x \sin^2 x dx$

解 $I = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C$

15.74 $\int \sin 3x \sin 5x dx$

解 $I = \int \frac{-1}{2}(\cos 8x - \cos 2x) dx = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C$

15.75 $\int \cos^3 x dx$

解 $I=\int \cos x(1-\sin^2 x)dx \xlongequal[\cos x dx = du]{令\sin x = u} \int (1-u^2)du = u-\frac{u^3}{3}+C$

$=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$

15.76 $\int \sin^3 x \cos^5 x dx$

解 $I=\int \sin x(1-\cos^2 x)\cos^5 x dx \xlongequal[-\sin x dx = du]{令\cos x = u} -\int (1-u^2)u^5 du$

$=\frac{1}{8}\cos^8 x-\frac{1}{6}\cos^6 x+C$

15.77 $\int \sec^4 x dx$

解 $I=\int \sec^2 x d(\mathrm{tg} x)=\int [1+\mathrm{tg}^2 x]d(\mathrm{tg} x)=\mathrm{tg} x+\frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x+C$

15.78 $\int \mathrm{tg}^4 x dx$

解 $I=\int (\sec^2 x-1)^2 dx=\int (\sec^4 x-2\sec^2 x+1)dx=x+\int (\sec^2 x-2)\sec^2 x dx$

$=x+\int (\mathrm{tg}^2 x-1)d(\mathrm{tg} x)=\frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x-\mathrm{tg} x+x+C$

15.79 $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$

解 $I \xlongequal[dx = \cos t dt]{令x = \sin t} \int \frac{\cos t dt}{\cos^3 t}=\int (\cos t)^{-2}dt$

$=\int \sec^2 t dt=\mathrm{tg} t+C=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$

15.80 $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

解 $I \xlongequal[dx = a\cos t dt]{令x = a\sin t} \int \frac{a^2\sin^2 t \cdot a\cos t dt}{a\cos t}=\int a^2\sin^2 t dt$

$=\frac{a^2}{2}\int (1-\cos 2t)dt=\frac{a^2}{2}t-\frac{a^2}{4}\sin 2t+C$

$\because \frac{x}{a}=\sin t$, $\therefore t=\arcsin\frac{x}{a}$; $\cos t=\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$

$\therefore \sin 2t=2\sin t\cos t=2\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}$

故 $I=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C$

15.81 $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{2/3}}$