非线性振动分析

ANALYSIS OF NONLINEAR VIBRATIONS

褚亦清　李翠英　编著

北京理工大学出版社

非线性振动分析

褚亦清　李翠英　编著

北京理工大学出版社

内 容 简 介

本书是作者多年来，在北京理工大学为研究生讲授非线性振动理论课程的基础上编写而成。书中系统地论述了分析非线性振动问题的数学方法和各种非线性振动现象的物理机理。前半部分介绍单自由度、多自由度的自治和非自治的非线性振动系统的各种定性和定量的分析方法，后半部分阐述自由振动、强迫振动、自激振动、参激振动等各类非线性系统振动现象的机理。本书内容不囿于一般非线性振动理论课的教材，对非线性振动研究的近代发展也作适当介绍。便于读者了解非线性振动研究的前沿。

本书可作为高等院校力学专业以及与之相关的应用与工程专业研究生的教材，也可作为从事有关专业的高校教师、研究人员以及工程技术人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

非线性振动分析/褚亦清，李翠英编著. —北京：北京理工大学出版社，1996

ISBN 7-81045-128-6

Ⅰ. 非… Ⅱ. ①褚… ②李… Ⅲ. 非线性振动-振动分析 Ⅳ. 0322

中国版本图书馆 CIP 数据核字（96）第 06954 号

北京理工大学出版社出版发行

（北京市海淀区白石桥路 7 号）

（邮政编码 100081）

各地新华书店经售

北京地质印刷厂印刷

*

850×1168 毫米 32 开本 36.375 印张 935 千字

1996 年 9 月第一版 1996 年 9 月第一次印刷

印数：1—1000 册 定价：49.00 元

前　　言

非线性力学是当前国际上基础理论研究的热点之一。非线性振动作为非线性力学发展很早的一个重要课题，至今差不多已经经历了一个世纪。在不久以前工程技术中提出有关振动的非线性问题还只是孤立的、零散的。随着现代科技的发展，人们对各类动力系统的分析与计算的要求愈来愈高，非线性振动理论和应用也受到愈来愈广泛的关注。本书从力学角度对非线性振动系统的分析方法和运动的物理特征作了比较全面系统的介绍，期望能适合有关专业的读者在教学和研究工作方面的需要。

非线性振动作为一门课程，在内容的组织和体系的安排上都是比较难处理的问题。本课程的首要任务无疑是应使读者深刻认识和理解各类非线性振动系统运动的物理特性。对运动的深刻的理性认识的基础是数学分析的结果。由于大部分初学者都缺乏关于非线性问题的数学分析的知识准备。因此，介绍分析非线性振动的各种方法也是课程的一项主要任务。在不少非线性振动著作中只重点介绍某种解法，并将分析方法与运动特性的讨论连在一起叙述。这样，常使读者对分析方法及它们各自能解决的振动问题的类型形成一种不全面的看法。本书中将分析方法和运动特性的讨论分别在前后两篇内介绍。在第一篇内对各种应用得较普遍的主要方法系统地加以介绍，并通过例题分析说明不同方法可以解决同一问题，但各有其特点，应根据问题的需要选择不同的方法。在第二篇中则对各类非线性振动的基本模型分别采用一种或几种方法进行分析，重点讨论各类非线性振动系统运动的物理特性，并进一步加深对各种分析方法应用特点的认识。

定性理论和定量方法是非线性振动不可分割的两个方面。在现有的不少有关非线性振动的著作中往往只主要介绍其中的一个

方面。但是，仅了解定性理论而不熟悉定量方法，不能对工程中实际存在的振动问题进行有效的处理。仅掌握定量方法而不熟悉定性理论，在研究和解决问题时常常不能给出严格的理论依据。现代的大型非线性振动研究课题只有在定性理论和定量方法紧密配合下才能圆满地完成。本书中对这两方面都较全面地进行了介绍。微分方程定性理论和定量方法的奠基人都是Poincaré，由他最早提出的近似定量解法都有严密的数学依据。本书中对他的关于周期解的理论在单自由度和多自由度定量分析部分都用较大篇幅作了介绍。对于只需要知道近似定量分析应用的读者这部分内容可以略去。

在应用方面本书突出了对各类非线性振动基本模型的深入分析。揭示了非线性振动系统所特有的振幅多值现象、跳跃现象；参激失稳、失谐现象；频率俘获与同步现象；以及浑沌振动等具有丰富的物理特征的现象。没有采用较大型的工程实例，以避免过多涉及工程简化等内容。

本书原计划包含第三篇非线性振动的专门问题，如冲击振动问题；带有充液腔的刚体振动与稳定性；非线性机电系统的振动；主动和半主动控制系统的振动等。由于篇幅所限，将不再纳入本书。

作者在写作中曾得到北京理工大学应用力学系同志们的大力支持，梅凤翔教授仔细地审阅了书稿并提出宝贵意见，谨此致谢。北京航空航天大学黄克累教授和北京工业大学李骊教授曾仔细地审阅了本书编写题纲，并提出了很好的意见，特此一并致谢。

在本书编著期间，我们曾得到国家自然科学基金对两项有关非线性振动研究项目的资助，对本书的完成有重要意义。愿借此机会对国家自然科学基金的资助表示衷心的感谢。

限于作者水平，本书难免有疏漏和错误之处，敬希指正。

作　者

1995年7月

目　录

第二篇 非线性振动系统基本模型分析

第一章　绪　论

§1-1　研究的内容与方法

分析和预测物理系统的动态特性已日益成为现代技术和工程中的一个重要问题。动态分析的一个重要方面就是振动分析，振动系统作为动力系统，描述其运动状态的变量及变量的一阶导数、二阶导数出现于同一方程内组成振动微分方程。人们根据微分方程是线性的或是非线性的将系统分别称为线性的或非线性的。严格地说，一切实际的振动系统都是非线性的。由于线性微分方程理论发展得较早而且完善，并且在许多情况下线性化后得出的线性系统能够精确地反映真实系统的动力特性，因此线性振动理论及其应用也迅速发展达到较完善的地步。在现代科技发展的过程中，人们逐渐认识到在一些场合下线性振动的理论已不能满足实际问题的需要。这是因为，首先，在一些问题中线性化会引起较大的数量误差。更严重的是，有些系统线性化分析可能导致根本性的差错，得不出实际上存在的一些最本质的振动现象。因此，非线性振动的研究对解决现代科技中的振动问题愈来愈显得重要和不可缺少了。

从本世纪二十年代开始，非线性振动的理论得到迅速地发展。但由于非线性微分方程除极少数可以求出精确的解以外，目前还没有适用于各类方程的通用的精确解析解法。因此，和物理与技术科学中许多在数学上无法精确求解的学科一样，非线性振动的研究除理论分析外，还必须依靠实验分析和计算机分析。可见非线性振动的研究可以通过上述三种途径。对于实际中复杂的非线性振动问题常常需要三种方式密切配合才能更好地解决。

理论分析是非线性振动研究最基本的方式。它的根本任务是从理论上揭示各类非线性系统振动的基本规律及特性。振动理论的主要数学工具是微分方程，而非线性微分方程目前尚无通用的精确解析求解方法。因此，对各类非线性振动系统建立相应的近似分析方法成为非线性振动理论分析的首要任务。理论分析基本上沿着两个方向发展着，第一是定量方法，或称解析法。第二是定性方法，主要是几何法。定量方法首先是建立各种求解非线性微分方程的近似解析方法，如摄动法、渐近法、多尺度法等，然后根据求得的近似解析解去研究系统的运动规律和振动特性。定性方法基本上是根据微分方程本身的特点对其在相空间的积分曲线作出定性的分析，并据此判断系统的运动规律与振动特性。

近代实验技术、测试设备及计算机的迅速发展，使得实验分析和计算机分析在非线性振动研究中起着越来越重要的作用。它们的作用已不限于对理论分析的验证和补充。实际的振动问题经常是影响因素多、机理复杂。一开始进行理论分析常常无从着手，这种情况下人们先以实验研究作为主要手段，以实验观察的现象及测得的数值作为依据，深入开展理论分析。在非线性振动学科的发展过程中，有不少重要的理论研究都是在实验观察现象的先导和启发下，经过深入分析才最后完成的。对于工程中重大的振动项目，没有实验数据作说明是难以令人接受的。振动实验可以在实物上进行，也可以在与实物相似的物理模型上进行。实物试验结果本身就是研究的系统实际振动的规律，物理模型实验的结果可以和实际振动有良好的相似性。这是实验分析最突出的优点。但机械系统振动的实物试验和物理模型实验都有结构复杂、测量困难、改变参数不方便等缺点。

利用电子计算机对非线性振动系统进行分析的方法可分为：模拟计算机仿真、数值分析法及计算机代数法。模拟计算机仿真是以数学模型相似为基础的仿真方法。它应用电子器件模拟数学上的基本运算环节，做成各种运算器，如加法器、乘法器、积分

器、函数发生器等。将这些运算部件和其它非线性部件按一定的结构组合起来，构成模拟计算机上的解题方程和原系统的微分方程相似的仿真模型。对仿真模型加载运行，它的输入和输出变量都随时间连续变化的模拟量电压。根据相似性原理，研究的非线性系统中的物理量可以用按一定比例变换的电压表示，非线性系统中物理量随时间变化的动态关系和模拟计算机上与该物理量对应的电压随时间变化的关系是相似的。于是，我们就可以根据模拟计算机运行测出的电压变化曲线对非线性系统的运动规律进行分析。这样的方法称为模拟计算机仿真。它是分析非线性振动的一种有效的方法。

随着电子数字计算机的迅速发展以及各种计算方法的不断完善，数值分析法已成为各个科学技术领域中普遍应用的重要研究方法。在非线性振动的研究中也起着越来越重要的作用。从根本上说，用数值计算来分析振动问题就是用数值积分法求出描述运动的微分方程在一定初值下的数值解，再根据解所表示的运动时间历程分析系统的运动规律和振动特性。因此这种方法也可称作数字计算机仿真。因为数字计算机只能对数码进行基本运算，所以计算振动问题时首先要将连续的数学模型微分方程变换成能在数字机上进行数值计算的离散时间模型差分方程，然后编写程序和其它有关软件，上机运行求出数值解。有许多数值积分方法如 Euler 法、Runge-Kutta 法等可以在此应用。最后根据计算机输出的结果数据和图形等进行分析研究。数值分析能够求解各类非线性系统的问题，并且不受非线性强弱的限制。目前在非线性振动的研究中已得到日益广泛的应用。为了充分发挥数字仿真及模拟仿真的优点，人们还进一步提出了混合计算机仿真。混合计算机系统是由模拟计算机、数字计算机通过一套混合接口(A/D、D/A 装置)组成的数字-模拟混合计算系统。它具有模拟计算机的快速性和数字计算机的高精度和灵活性的优点。

随着理论研究和实验分析的深入，人们发现采用数值计算有

时也有很大的局限性。这主要表现在数值计算法一般只能在系统的参数和初值给定的条件下求出离散形式的数值解，不能提供完整的符号形式的解析解。因而，不能很好地给出系统解的全貌，人们难以对系统全局的连续的性质作出分析。其次，对于某些计算过程数值算法不得不很多次重复地进行某种单一的运算。此外，数值计算编制计算程序时也需要推导计算公式。所有这些情况都要求计算机不仅能进行数值计算，还要能完成符号运算，即进行公式推导。实际上，利用计算机进行公式处理的尝试在电子计算机问世之初就开始了，随着计算机运算速度的提高及内存容量的扩大而迅速发展起来。目前，人们已经能够应用电子数字计算机进行代数和解析处理或操作，完成符号运算。通称为计算机代数方法。已有许多可用的计算机代数系统如 MACSYMA、REDUCE 等。在非线性振动研究中应用计算机代数系统可以代替传统上需要由人手工推导的一些运算，求出系统的符号化的近似解析解。还可通过系统的预留接口进行适当的数值计算和图象处理工作。它集解析法、数值法与现代计算机方法的优点于一身，是分析非线性问题的很好的方法。

实验分析和计算机分析都有明显的长处，但都不能完全取代理论分析方法。理论分析是非线性振动学科最基本的研究方式，本书的内容只限于讨论理论分析方法。

§1－2　非线性振动系统

研究振动问题，首先需要将讨论的物理现象根据一定的物理定律或定理建立起数学表达式（数学模型），即建立振动微分方程。然后根据数学模型去分析、讨论振动的运动规律。我们已熟知，单自由度线性振动的微分方程可以用由一个广义坐标 x 组成的二阶线性常微分方程

$$F\left(x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},t\right)=0 \tag{1.1}$$

表示。所谓线性微分方程，是指函数 F 中，x、$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$、$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$等都是以一次方的形式出现的，就是说它们的幂次为 1，也不相互组成乘积或商，也不以三角函数、指数函数以及其它函数的形式出现。可将微分方程写成

$$a\ddot{x}+b\dot{x}+cx=P(t) \tag{1.2}$$

其中，a、b 和 c 为常数，分别称为系统的广义质量、广义阻尼系数和广义刚度系数。$P(t)$称为广义激振力。

以线性微分方程描述振动的系统称为线性振动系统，以非线性微分方程描述振动的系统称为非线性振动系统。

单自由度非线性振动系统的微分方程的一般形式为

$$a\ddot{x}+F(x,\dot{x},t)=0 \tag{1.3}$$

或

$$a\ddot{x}+F(x,\dot{x})=P(t) \tag{1.4}$$

也可以写成

$$\ddot{x}+f(x,\dot{x},t)=0 \tag{1.3'}$$

$$\ddot{x}+f(x,\dot{x})=p(t) \tag{1.4'}$$

其中函数 F 与 f 是 x、$\dot{x}$ 的非线性函数。

一、自治系统和非自治系统

根据微分方程中是否显含自变量 t，可将振动系统分为自治系统和非自治系统。

1. 自治系统

在自治系统中，广义作用力函数 $-F$ 仅与系统的运动状态有关，即仅与广义坐标及广义速度有关，而与时间无关。在以广义坐标表示的运动微分方程中不显含时间 t。单自由度自治系统的微分方程可表示为

$$a\ddot{x}+F(x,\dot{x})=0 \tag{1.5}$$

或

$$\ddot{x}+f(x,\dot{x})=0 \tag{1.5'}$$

自治系统还可进一步分为保守系统和非保守系统。

(1) 保守系统　如果作用于系统的广义作用力是仅与广义坐标有关而与广义速度无关的保守力(有势力)，在振动过程中系统的总机械能保持不变，此时系统称为保守系统。运动微分方程为：

$$a\ddot{x} + F(x) = 0 \tag{1.6}$$

或

$$\ddot{x} + f(x) = 0 \tag{1.6'}$$

(2) 非保守系统　如果系统还受到与广义速度有关的广义作用力的作用(主要是各种类型阻尼产生的力)，则系统是非保守的。运动微分方程可以表示为：

$$a\ddot{x} + \Phi(x,\dot{x}) + F(x) = 0 \tag{1.7}$$

或

$$\ddot{x} + \varphi(x,\dot{x}) + f(x) = 0 \tag{1.7'}$$

式中，$-\Phi(x,\dot{x})$和$-F(x)$可分别称为广义阻尼力和广义恢复力。广义阻尼力也可能仅是广义速度的函数，即为$-\Phi(\dot{x})$。有时也将$-\varphi(x,\dot{x})$与$-f(x)$简称为作用于非线性系统的阻尼力与恢复力。

微分方程(1.7′)通常可以写成

$$\ddot{x} + g(x,\dot{x})\dot{x} + f(x) = 0 \tag{1.8}$$

这时，若$f(x)$为保守力，则根据$g(x,\dot{x})$的不同性质，可将非保守系统(1.8)分为三类：

i) $g(x,\dot{x})>0$，这时在振动过程中总能量将不断损耗，振动将逐渐衰减。称系统为耗散系统。

ii) $g(x,\dot{x})<0$，系统振动过程中总能量将不断增长，振动将逐渐增大。称为负阻尼系统。

iii)
$$\left.\begin{aligned} &g(x,\dot{x})<0,\quad \text{当}\ |x|、|\dot{x}|\ \text{较小时} \\ &g(x,\dot{x})>0,\quad \text{当}\ |x|、|\dot{x}|\ \text{较大时} \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

这种情况下，较小的振动将随能量不断增加而增强，较大的振动则随能量的耗损而衰减。最终可以出现适当的定常振动，在每一个振动周期内能量的增加和耗损正好相抵消。这时的振动称为自持振动，系统可称为自持系统。

保守系统和耗散系统在振动过程中总能量只能分别为保持不

变和逐渐耗损。有时将它们统称为被动系统。以区别能自动从能源补充能量的负阻尼系统和自持系统。

2. 非自治系统

当系统受到随时间改变的力的激励或运动的激励时，运动微分方程中将显含时间 t，称为非自治系统。单自由度系统的微分方程为：

$$a\ddot{x} + F(x,\dot{x},t) = 0 \tag{1.10}$$

或

$$\ddot{x} + f(x,\dot{x},t) = 0 \tag{1.10'}$$

我们主要讨论以下两类非自治系统：

(1) *强迫振动系统* 系统受到明显的随时间改变而与运动无关的激振力 $P(t)$的作用时，运动微分方程可以写成：

$$a\ddot{x} + \Phi(x,\dot{x}) + F(x) = P(t) \tag{1.11}$$

或

$$\ddot{x} + \varphi(x,\dot{x}) + f(x) = p(t) \tag{1.11'}$$

我们主要研究激振力 $p(t)$随时间周期性改变的情况。这种情况下系统发生的定常周期振动称为强迫振动。相应地，将以(1.11′)式表示的系统称为强迫振动系统。

(2)*参激振动系统* 当系统受到随时间改变的运动激励时，作用于系统的恢复力和阻尼力也将明显地随时间而改变，这时时间的函数不是以力的形式作为单独的被加项出现，只能写成广义坐标与广义速度的函数前的乘数以参数的形式出现。例如

$$a\ddot{x} + \Phi(x,\dot{x}) + [F(x) + q(t)E(x)] = 0 \tag{1.12}$$

或

$$a\ddot{x} + [\Phi(x,\dot{x}) + r(t)\Psi(x,\dot{x})] + F(x) = 0 \tag{1.13}$$

或

$$a\ddot{x} + [\Phi(x,\dot{x}) + r(t)\Psi(x,\dot{x})] + [F(x) + q(t)E(x)] = 0 \tag{1.14}$$

或写成

$$\ddot{x} + \varphi(x,\dot{x}) + [f(x) + q(t)e(x)] = 0 \tag{1.12'}$$

$$\ddot{x} + [\varphi(x,\dot{x}) + r(t)\psi(x,\dot{x})] + f(x) = 0 \tag{1.13'}$$