南京工程学院教案【封面】

任课系部：基础部　　　　授课时间：2007.9－2008.1

课程名称	高等数学B(K)		课程编号	070111025	
专　　业	材料、高分子、模具设计		班　　级	K材料071、K高分子071 K模具071、K模具072	
课程类别	必修课	公共基础课☑；专业基础课□；专业课□			
	选修课	限选课☑；任选课□；公选课□			
总学时数	72	学分数	4.5	考核方式	考试☑；考查□
学时分配	课堂讲授　　　学时；　实践课　　　学时				
教材名称	高等数学	作者	同济大学应用数学系、	出版社及出版时间	高教出版社 ~~1978年10月~~ 02.7
指定参考书	《高等数学》	作者	盛祥耀	出版社及出版时间	高教出版社 1987.8
	《微积分》		赵树嫄、		中国人民大学出版社 1988.5
	《高等数学同步精讲》		陈兰祥		学苑出版社 2003.8
授课教师	刘瑞娟	职称	助教	单位	基础部

第七章　空间解析几何与向量代数

在平面解析几何中，通过坐标系的建立把平面上的点与一对有次序的数对应起来，而进一步空间的解析几何知识，对于以后学习多元函数微积分也是必要的.

§1. 向量及其线性运算

一. 向量概念.

有这样一类量，它们既有大小、又有方向，则这一类量称为向量（or 矢量），如位移、速度、力等，下面介绍一些相关概念：

1. 表示：在数学上，往往用有向线段来表示向量.有向线段的长度与方向分别表示向量的大小与方向。可用 $\overrightarrow{AB}$ 表示以A为起点，B为终点的向量，也可用 $\vec{a}$ 来表示向量，即小写字母加箭头。（注：A.B前后顺序不可随便换）

2. $\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的大小相等且方向相同。

3. 模：即向量的大小，如 $|\overrightarrow{AB}|$，$|\vec{a}|$.（模恒为非负数）

单位向量：模等于1的向量.

零向量：模等于0的向量，记作 $\vec{0}$.（注：箭头不可省略，$\vec{0}$ 与 0 意义不同）

它的方向可看作是任意的.

4. 平行：两个非零向量的方向相同或相反，称这两个向量平行，记作 $\vec{a}\parallel\vec{b}$.

注：零向量与任何向量都平行.

共线：两向量平行又称两向量共线.

共面：设有 $k\ (k\geqslant 3)$ 个向量，当它们的起点放在同一点，k个终点与公共起点在一个平面上，则称这k个向量共面.

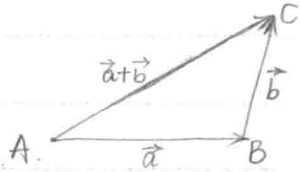
二. 向量的线性运算.

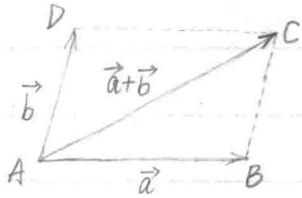
1. 向量的加减法.

(I) 首先以加法为例讨论下其运算法则：

设有两个向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$，任取点A，作 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，再以B为起点，作 $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，连结A、C，则 $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ 称为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和，即 $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$；这种方法称为向量相加的三角形法则.

也可仿照力学上求合力的平行四边形法则，作出向量相加的平行四边形法则.



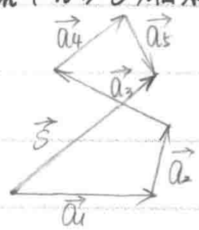


同样地，加法符合下列运算规律：

(1) 交换律： $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

(2) 结合律： $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ （证明自行完成）

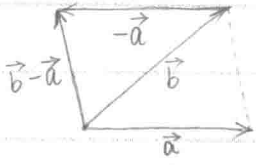
由上述运算规律，若 n 个向量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ $(n\geqslant 3)$ 相加，可记 $\vec{s}=\vec{a_1}+\vec{a_2}+\cdots+\vec{a_n}$，仍用三角形法则表示 $\vec{s}$：

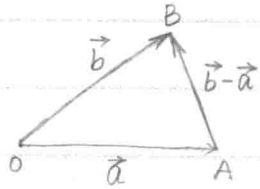


(II). 然后将上述讨论推广到减法.

设 $\vec{a}$ 为一向量，与 $\vec{a}$ 的模相同而方向相反的向量叫做 $\vec{a}$ 的负向量，记作 $-\vec{a}$

则：$\vec{b}-\vec{a}=b+(-\vec{a})$，特别地，$\vec{a}-\vec{a}=\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$，如下图所示：





由三角形两边之和大于第三边的原理，可知：$|\vec{a}+\vec{b}|\leq|\vec{a}|+|\vec{b}|$，$|\vec{a}-\vec{b}|\leq|\vec{a}|+|\vec{b}|$

2. 向量与数的乘法.

向量与实数的乘积仍是一个向量，记作 $\lambda\vec{a}$，$|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$

注：1、$\lambda\vec{a}$的方向取决于λ的符号：$\lambda>0$则$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$方向相同，反之相反。(即$\lambda\vec{a} \parallel \vec{a}$)

2、$\lambda=0$，$|\lambda\vec{a}|=0$，$\lambda\vec{a}$为零向量，方向任意.

3. $\lambda=\pm1$时，$1\vec{a}=\vec{a}$，$(-1)\vec{a}=-\vec{a}$.

向量与数的乘积有下列规律：

(1) 结合律：$\lambda(\mu\vec{a})=\mu(\lambda\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$.

(2) 分配律：$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$；$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$. 注：在$\lambda$与$\vec{a}$之间不要加"$\cdot$"

此外，再来介绍一下常用的两个定理：

1. 一个非零向量除以它的模的结果是一个与原向量同方向的单位向量.

Pf：设$\vec{e}_a$表示与非零向量$\vec{a}$同方向的单位向量，则$|\vec{a}|\vec{e}_a$与$\vec{a}$的方向相同，另外：

$||\vec{a}|\vec{e}_a|=|\vec{a}|\cdot|\vec{e}_a|=|\vec{a}|\cdot1=|\vec{a}|$，由此$|\vec{a}|\cdot\vec{e}_a=\vec{a} \Rightarrow \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\vec{e}_a$. □

2. 设$\vec{a}\neq\vec{0}$，则向量$\vec{b}$平行于$\vec{a}$的充要条件是存在唯一的实数λ，使$\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

Pf：充分性显然.

必要性：设$\vec{b}\parallel\vec{a}$，则必有一实数λ，s.t $\vec{b}=\lambda\vec{a}$，其中$|\lambda|=\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$.

($\because \vec{b}\parallel\vec{a}$ $\therefore \vec{b}$与$\lambda\vec{a}$同向(or相反)，又$|\vec{b}|=\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\cdot|\vec{a}|=|\lambda\vec{a}|$，$\therefore \vec{b}=\lambda\vec{a}$)

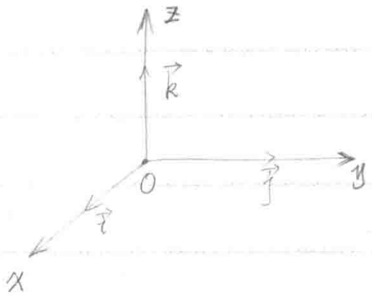
再证唯一性：若$\vec{b}=\lambda\vec{a}=\mu\vec{a}$，$\lambda\neq\mu$. 则$(\lambda-\mu)\vec{a}=\vec{0} \Rightarrow |\lambda-\mu|\cdot|\vec{a}|=0$

$\because |\vec{a}|\neq0$，$\therefore |\lambda-\mu|=0 \Rightarrow \lambda=\mu$(矛盾). 则$\lambda$必为唯一. □

三. 空间直角坐标系.

1、坐标轴.

在空间取定一点O和三个两两垂直的单位向量$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$，则即确定了以O为原点的两两垂直的三条数轴x轴，y轴，z轴，统称为坐标轴，称为$Oxyz$坐标系或$[O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}]$坐标系，如下图：



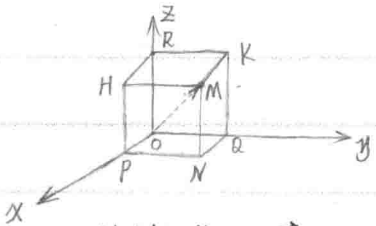
三条坐标轴中任意两条可以确定一个平面，则可有xOy面、yOz及zOx面.

此外，三个坐标面又将空间分为八个部分，每部分称为一个卦限，八个卦限可依次用字母Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ,Ⅴ,Ⅵ,Ⅶ,Ⅷ表示.

(可用右手作实际演示).

2、空间中向量的表示.

任给出一个向量$\vec{r}$，对应一点M，如下图：



则 $\vec{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$

设 $\overrightarrow{OP}=x\vec{i}$，$\overrightarrow{OQ}=y\vec{j}$，$\overrightarrow{OR}=z\vec{k}$.

$\Rightarrow \vec{r}=\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. x,y,z均为实数.

这样，点M，$\vec{r}$与三个有序数x,y,z之间有如下一一对应的关系：

$$M \longleftrightarrow \vec{r}=\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k} \longleftrightarrow (x,y,z)$$

由此，定义$\vec{r}=(x,y,z)$，M的坐标为$M(x,y,z)$，同时$\vec{r}=\overrightarrow{OM}$称为点M关于原点O的向径，一个点与该点的向径有相同的坐标.

特例：坐标面上和坐标轴上的点的坐标较为特殊.(自行分析).

四. 利用坐标作向量的线性运算.

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$.

即：$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$；$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$.

$\Rightarrow \vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x)\vec{i}+(a_y+b_y)\vec{j}+(b_z+a_z)\vec{k}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z)$

$\vec{a}-\vec{b}=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z)$

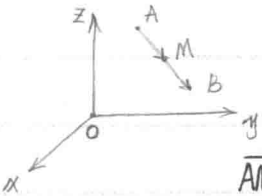
$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$

注：$\vec{b}\parallel\vec{a}$，$\vec{a}\neq 0 \Leftrightarrow \vec{b}=\lambda\vec{a} \Rightarrow (b_x,b_y,b_z)=\lambda(a_x,a_y,a_z)$

$\Rightarrow \dfrac{b_x}{a_x}=\dfrac{b_y}{a_y}=\dfrac{b_z}{a_z}$.

(若$a_z=0 \Rightarrow b_z\in\mathbb{R}$)

例3：已知两点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 与 $B(x_2, y_2, z_2)$ 以及实数 $\lambda \neq -1$，在直线AB上求点M，使 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$.



解：求点M的坐标即为求 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标.

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}, \quad \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}) \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB})$$

将 $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1, z_1)$，$\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2, z_2)$ 代入上式，即有：

$$\overrightarrow{OM} = \left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right).$$

注：(1) 点M的坐标即为 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标

(2) (x, y, z) 表示向量时才可运算，表示点时不可运算，二者不能混淆.

(3) $\lambda = 1$ 时，M为AB中点，$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$

五. 向量的模、方向角、投影

1. 向量的模与两点间的距离公式.

设 $\vec{r} = (x, y, z)$，对应于空间中一点M，则 $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$，由(三)中讨论，知：

$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$ （见 P_{295} 图7-12）

由勾股定理：$|\vec{r}| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{|OP|^2 + |OQ|^2 + |OR|^2}$

而 $\overrightarrow{OP} = x\vec{i}$，$\overrightarrow{OQ} = y\vec{j}$，$\overrightarrow{OR} = z\vec{k}$ $\Rightarrow$ $|\overrightarrow{OP}| = |x|$，$|\overrightarrow{OQ}| = |y|$，$|\overrightarrow{OR}| = |z|$.

$\Rightarrow |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

设有两点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$，则A与B的距离 $|AB|$ 即为 $\overrightarrow{AB}$ 的模.

而 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

则 $|AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$.

例4：求证以 $M_1(4, 3, 1)$、$M_2(7, 1, 2)$、$M_3(5, 2, 3)$ 三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

证：$\because |M_1M_2|^2 = (7-4)^2 + (1-3)^2 + (2-1)^2 = 14$

$|M_2M_3|^2 = (5-7)^2 + (2-1)^2 + (3-2)^2 = 6$

$|M_3M_1|^2=(4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2=6$

$\therefore |M_2M_3|=|M_3M_1|$. 即 $\triangle M_1M_2M_3$ 为等腰三角形. □

例6：已知两点 $A(4,0,5)$ 和 $B(7,1,3)$，求与 $\overrightarrow{AB}$ 同方向的单位向量 $\vec{e}$.

解：首先 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(3,1,-2)$. 且 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{14}$.

故由 $\vec{e}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{1}{\sqrt{14}}(3,1,-2)$.

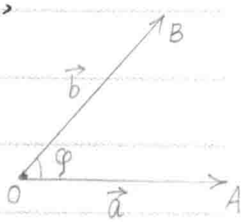
2. 方向角与方向余弦.

(1) 两向量的夹角

设有两个非零向量 $\vec{a},\vec{b}$，任取空间一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，

则规定 $\angle AOB$（令 $\varphi=\angle AOB$，$0\le\varphi\le\pi$）为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角，

记作 $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ 或 $(\widehat{\vec{b},\vec{a}})$.

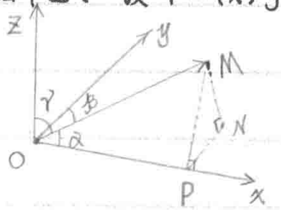


特别地，若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 中有一个是 $\vec{0}$，则 φ 可在 0 与 π 之间任意取值.

(2) 方向角与方向余弦.

类似(1)中讨论，非零向量 $\vec{r}$ 与三条坐标轴的夹角 α、β、γ 称为 $\vec{r}$ 的方向角.

如下图：设 $\vec{r}=(x,y,z)$，作 $MP\perp OP$. 在 $\triangle MOP$ 中，



$$\cos\alpha=\frac{x}{|\overrightarrow{OM}|}=\frac{x}{|\vec{r}|}$$

同理：$\cos\beta=\frac{y}{|\vec{r}|}$，$\cos\gamma=\frac{z}{|\vec{r}|}$

$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为 $\vec{r}$ 的方向余弦.

另外，$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{x}{|\vec{r}|},\frac{y}{|\vec{r}|},\frac{z}{|\vec{r}|}\right)=\frac{1}{|\vec{r}|}(x,y,z)=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}=\vec{e}_r$

故 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

(3) 例子.

例7：已知 $M_1(2,2,\sqrt{2})$ 和 $M_2(1,3,0)$，计算 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$、方向余弦、方向角.

解：$\overrightarrow{M_1M_2}=(-1,1,-\sqrt{2})$，$|\overrightarrow{M_1M_2}|=2$；

$\cos\alpha=-\frac{1}{2}$，$\cos\beta=\frac{1}{2}$，$\cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2}$；

$\alpha=\frac{2\pi}{3}$，$\beta=\frac{\pi}{3}$，$\gamma=\frac{3\pi}{4}$.

例8：设点A位于第I卦限，向径$\overrightarrow{OA}$与x轴、y轴的夹角依次为$\frac{\pi}{3}$与$\frac{\pi}{4}$，且$|\overrightarrow{OA}|=6$，求点A的坐标.

解：设$\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\beta=\frac{\pi}{4}$，由$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，知$\cos^2\gamma=\frac{1}{4}$.

又A位于第I卦限，故$\cos\gamma>0$，即$\cos\gamma=\frac{1}{2}$.

则(I) $\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OA}|\vec{e}_{OA}=6(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2})=(3,3\sqrt{2},3)$

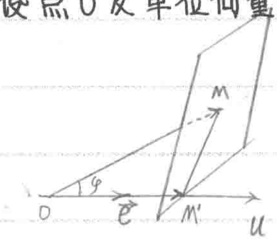
(II). $x=\cos\alpha\cdot|\overrightarrow{OA}|=3$，$y=\cos\beta|\overrightarrow{OA}|=3\sqrt{2}$，$z=\cos\gamma|\overrightarrow{OA}|=3$.

} 两种方法求点A.

则点A坐标为$(3,3\sqrt{2},3)$.

3. 向量在轴上的投影.

(1)定义：设点O及单位向量e确定u轴，作$\overrightarrow{OM}=\vec{r}$，过点M作与$u$轴垂直的平面交$u$轴于M'(见左图)，点M'叫作点M在$u$轴上的投影；设$\overrightarrow{OM'}=\lambda\vec{e}$，则$\lambda$称为$\vec{r}$在$u$轴上的投影，记作$\mathrm{Prj}_u\vec{r}$或$(\vec{r})_u$.



Prj 即 Projection.

由此定义，$\vec{a}$在直角坐标系$Oxyz$中的坐标a_x、a_y、a_z即为$\vec{a}$在三条坐标轴上的投影，即$a_x=\mathrm{Prj}_x\vec{a}$，$a_y=\mathrm{Prj}_y\vec{a}$，$a_z=\mathrm{Prj}_z\vec{a}$.

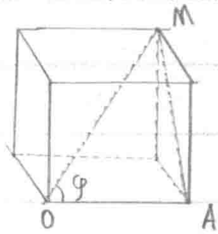
(2)性质：向量的投影具有以下性质：

性质1：$(\vec{a})_u=|\vec{a}|\cos\varphi$，$\varphi$为$\vec{a}$与$u$轴夹角.

性质2：$(\vec{a}+\vec{b})_u=(\vec{a})_u+(\vec{b})_u$.

性质3：$(\lambda\vec{a})_u=\lambda(\vec{a})_u$.

(3). 例9：设立方体的一条对角线为 OM，一条棱为 OA，且 $|OA|=a$，求 $\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OM}$ 方向上的投影 $Prj_{\overrightarrow{OM}}\overrightarrow{OA}$.



解：令 $\angle MOA=\varphi$. 则 $\cos\varphi=\dfrac{|OA|}{|OM|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

则 $Prj_{\overrightarrow{OM}}\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OA}|\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$.

第七章　复习小结

1. 理解空间直角坐标系、空间点的坐标、空间两点间的距离.
2. 掌握向量的线性运算(加减法、数乘),向量的数量积与向量积.
3. 掌握向量的坐标表示、向量的模、方向角、方向余弦、单位向量.
4. 了解曲面.曲线及其方程,知道常用曲面的方程与图形,会求曲线在坐标面上的投影.
5. 知道两平面的夹角,平行垂直条件;平面的点法式及一般方程.
6. 空间直线的一般式、对称式、参数方程;
   直线与直线 or 直线与平面的平行、垂直条件。

习题选讲

Ex.7-1

5. 求平行于向量 $\vec{a}=(6,7,-6)$ 的单位向量.

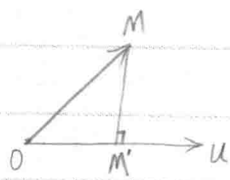
解: $|\vec{a}|=\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}=\sqrt{121}=11$.

$\vec{e_a}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\dfrac{(6,7,-6)}{11}$

故平行于 $\vec{a}$ 的单位向量为 $\vec{e_a}$ or $-\vec{e_a}$

即为 $\left(\pm\frac{6}{11},\pm\frac{7}{11},\mp\frac{6}{11}\right)$. $\square$

18. 一向量的终点在 $B(2,-1,7)$,它在 x 轴,y 轴和 z 轴上的投影依次为 4,-4 和 7,求这向量的起点 A 的坐标.



$\overrightarrow{OM'}=\lambda e$

$\lambda=Prj_u\overrightarrow{OM}$

解: 设 $A(x,y,z)$,则 $\overrightarrow{AB}=(2-x,-1-y,7-z)$

由已知条件:知: $2-x=4$; $-1-y=-4$; $7-z=7$

$\Rightarrow x=-2,\ y=3,\ z=0$.

则A的坐标为 $(-2,3,0)$.

§2. 数量积.向量积.

一、两向量的数量积.

1.定义. 设一物体在常力F作用下沿直线从M_1移到M_2,以$\vec{s}$表示$\overrightarrow{M_1M_2}$.

如图所示,所做的功 $W=|\vec{F}||\vec{s}|\cos\theta$.

由此可以看出,对于两个向量$\vec{a}$和$\vec{b}$作运算,有时

结果是一个数,类似上述结果,记 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$,称$\vec{a}\cdot\vec{b}$为$\vec{a}$与$\vec{b}$的数量积.

2.意义. 若$\vec{a}\neq 0$,则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta=|\vec{a}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}$

若$\vec{b}\neq 0$,则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=|\vec{b}||\vec{a}|\cos\theta=|\vec{b}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}$.

即:两向量的数量积等于其中一个向量的模和另一个向量在这向量的方向上的投影的乘积.

3.性质. (1) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

(2) $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Pf:"$\Rightarrow$": $\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\cancel{\pi}\,0\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

"$\Leftarrow$": $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ $\begin{cases}\vec{a}、\vec{b}\text{至少一个为}\vec{0}.\Rightarrow\vec{a}\perp\vec{b}\\ \vec{a}、\vec{b}\text{全不为}\vec{0}\Rightarrow|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=0\Rightarrow\cos\theta=0\Rightarrow\\ \theta=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\vec{a}\perp\vec{b}.\end{cases}$

4.运算规律. (1)交换律: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

Pf: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=|\vec{b}||\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{b},\vec{a}})=\vec{b}\cdot\vec{a}$. □

(2)分配律: $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

Pf:若$\vec{c}=\vec{0}$,显然成立.

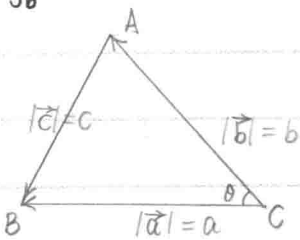
若$\vec{c}\neq\vec{0}$, $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{c}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{c}|(\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\vec{a}+\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\vec{b})$. ▨

$= |\vec{c}|Prj_{c}\vec{a} + |\vec{c}|Prj_{c}\vec{b} = \vec{c}\cdot\vec{a} + \vec{c}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$

(3) 结合律：$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$. λ 为实数.

Pf：若 $\vec{b}=\vec{0}$, 显然成立.

若 $\vec{b}\neq\vec{0}$, $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = |\vec{b}|Prj_{b}(\lambda\vec{a}) = |\vec{b}|\lambda Prj_{b}\vec{a} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$. □



例1：试用向量证明三角形的余弦定理.

Pf：即要证：$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\theta$（如图示）

由图示可知：$\vec{c} = \vec{a}-\vec{b}$.

又 ∵ $|\vec{c}|^2 = \vec{c}\cdot\vec{c} = (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$= |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$

即 $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\theta$

5. 数量积的坐标表达式.

若设 $\vec{a} = a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$，$\vec{b} = b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$

故 $\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$

$= a_xb_x\vec{i}\cdot\vec{i} + a_xb_y\cancel{\vec{i}\cdot\vec{j}} + a_xb_z\cancel{\vec{i}\cdot\vec{k}} + b_xa_y\cancel{\vec{j}\cdot\vec{i}} + a_yb_y\vec{j}\cdot\vec{j} + a_yb_z\cancel{\vec{j}\cdot\vec{k}} +$

$b_xa_z\cancel{\vec{k}\cdot\vec{i}} + a_zb_y\cancel{\vec{k}\cdot\vec{j}} + a_zb_z\vec{k}\cdot\vec{k}$

$= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$

此外，$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$

例2. 已知三点 $M(1,1,1)$、$A(2,2,1)$ 和 $B(2,1,2)$，求 $\angle AMB$.

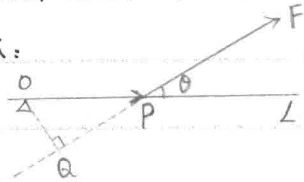
解：作向量 $\overrightarrow{MA}$ 和 $\overrightarrow{MB}$，则 $\angle AMB$ 即为 $\overrightarrow{MA}$ 与 $\overrightarrow{MB}$ 的夹角.

而 $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM} = (1,1,0)$；$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM} = (1,0,1)$

故：$\cos\angle AMB = \dfrac{1\cdot1+1\cdot0+0\cdot1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\ \sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \dfrac{1}{2}$. $\Rightarrow \angle AMB = \dfrac{\pi}{3}$.

二. 两向量的向量积

设O为一根杠杆L的支点，有一个力F作用于杠杆P处，$\vec{F}$与$\vec{OP}$的夹角为θ，如图所示：



按照力学规定，$\vec{F}$对支点O的力矩是一向量$\vec{M}$，则

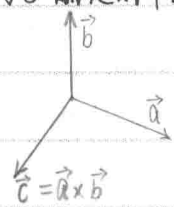
$|\vec{M}| = |\vec{OQ}||\vec{F}| = |\vec{OP}||\vec{F}|\sin\theta$

而$\vec{M}$的方向垂直于$\vec{OP}$与$\vec{F}$所决定的平面，即按右手规则从$\vec{OP}$以不超过π的角转向$\vec{F}$来确定的$\vec{M}$的方向.

1.定义：现在将上述物理问题抽象出两个向量的向量积概念：

设$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$，$\theta$为$\vec{a}$、$\vec{b}$间的夹角，$\vec{c}$的方向垂直于$\vec{a}$与$\vec{b}$确定的平面，也可按右手规则确定$\vec{c}$的方向.

则$\vec{c}$叫做$\vec{a}$与$\vec{b}$的向量积，记作$\vec{a}\times\vec{b}$，即$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$.



2. 性质：(1) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$ （此时$\theta=0$）.

(2) $\vec{a}\parallel\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

pf：若$\vec{a}$、$\vec{b}$中有一个为$\vec{0}$，则显然成立；$\vec{a}$、$\vec{b}$均为$\vec{0}$，也显然成立；

若$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，则：

"$\Rightarrow$"：$\vec{a}\parallel\vec{b} \Rightarrow \theta=0$ or $\pi \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

"$\Leftarrow$"：$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Rightarrow \theta=0$ or π $(|\vec{a}|\neq0, |\vec{b}|\neq0, \sin\theta=0) \Rightarrow \vec{a}\parallel\vec{b}$

3. 运算规律：(1) $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ （由右手规则可判断左、右两边方向相反）

(2) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

(3) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\times\vec{b})$.

4. 向量积的坐标表达式

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$，$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$，则：

$$
\begin{aligned}
\vec{a}\times\vec{b} &= (a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}) \\
&= a_x\vec{i}\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})+a_y\vec{j}\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})+a_z\vec{k}\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}) \\
&= a_xb_x\cancel{(\vec{i}\times\vec{i})}+a_xb_y\underbrace{(\vec{i}\times\vec{j})}_{\vec{k}}+a_xb_z\underbrace{(\vec{i}\times\vec{k})}_{-\vec{j}}+a_yb_x\underbrace{(\vec{j}\times\vec{i})}_{-\vec{k}}+a_yb_y\cancel{(\vec{j}\times\vec{j})}+a_yb_z\underbrace{(\vec{j}\times\vec{k})}_{\vec{i}} \\
&\quad +a_zb_x\underbrace{(\vec{k}\times\vec{i})}_{\vec{j}}+a_zb_y\underbrace{(\vec{k}\times\vec{j})}_{-\vec{i}}+a_zb_z\cancel{(\vec{k}\times\vec{k})} \\
&= (a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k} \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \longleftarrow \text{三阶行列式.}
\end{aligned}
$$

现在补充一些新的概念：

(I) 二阶行列式.

已知四个数排成正方形表 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为二阶行列式.

且 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

其中：a_{11}、a_{12}. a_{21}. a_{22} 表示二阶行列式的元素，横排为"行"，竖排为"列"，a_{ij} 表示第 i 行、第 j 列的元素，如 a_{21} 表示第二行第一列的元素。

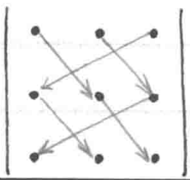
(II) 三阶行列式.

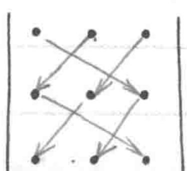
由上类推：
$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}
$$

借助图形得出上述运算规则：

① 主对角线、次对角线

② 规律


+


−

此外，三阶行列式还可以按展开第一行计算：

(由(1)式结合)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

5. 例子.

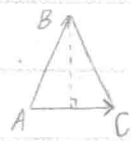
例4：设 $\vec{a}=(2,1,-1)$，$\vec{b}=(1,-1,2)$. 求 $\vec{a}\times\vec{b}$.

解：

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= \vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$$

例5：已知△ABC的顶点 A(1,2,3)、B(3,4,5)、C(2,4,7)，求 $S_{\triangle ABC}$



解：$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|\vec{AB}||\vec{AC}|\sin\angle A = \frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|$

而 $\vec{AB}=(2,2,2)$，$\vec{AC}=(1,2,4)$

则：

$$\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|4\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}| = \frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-6)^2+2^2} = \sqrt{14}.$$

6. 混合积

$$记 = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = c_x\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

§3. 曲面及其方程

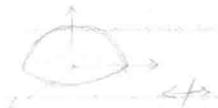
一. 曲面方程的概念.

正如在平面几何中把平面曲线当作动点轨迹一样，在空间解析几何中，任何曲面也可看作点的几何轨迹。若曲面S与三元方程：$F(x,y,z)=0$　　(1) 有下述关系：

(1) S上任一点的坐标都满足方程(1)；

(2) 不在S上的点的坐标都不满足方程(1)；

则方程(1)叫做S的方程，S叫做方程(1)的图形.

如：  $x^2+y^2+z^2=R^2$

现在来介绍几个常见曲面的方程：

例1：建立球心在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$、半径为R的球面的方程.

解：设$M(x,y,z)$是球面上任一点，则 $|M_0M|=R$.

而 $|M_0M|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$

即 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$ 为球面方程.

特别地，若M_0在原点，即 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 为球面方程.

例2：设有点$A(1,2,3)$和$B(2,-1,4)$，求线段AB的垂直平分面的方程.

解：所求平面即是与A、B等距离的点的几何轨迹，设$M(x,y,z)$为所求平面上的任一点，

由 $|AM|=|BM| \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2}$

即 $2x-6y+2z-7=0$.

以上是已知一曲面作为点的轨迹时，求其方程，下面再介绍一个由曲面方程研究曲面形状的例子：

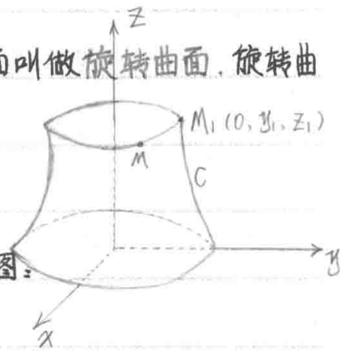
例3：方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y=0$ 表示怎样的曲面？

解：原方程可转化为：$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=5$.

即为球心在$(1,-2,0)$，半径为$\sqrt{5}$的球面.

一般地，对于如下方程：$Ax^2+Ay^2+Az^2+Dx+Ey+Fz+G=0$，它的图形均表示一个球面.

二. 旋转曲面.



以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面叫做旋转曲面. 旋转曲线和定直线依次叫做旋转曲面的母线和轴.

设在 yOz 坐标面上有一已知曲线C，其方程为：$f(y,z)=0$

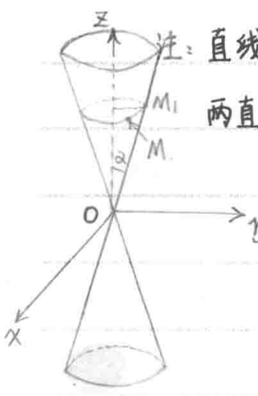
将此曲线绕Z轴旋转一周，可得到一个以Z轴为轴的旋转曲面，如图：

设 $M_1(0,y_1,z_1)$ 为曲线C上的任一点，则 $f(y_1,z_1)=0$.

在曲线C绕Z轴旋转时，M_1 也相应旋转到 $M(x,y,z)$. 则 $z=z_1$，且M到Z轴的距离 $d=\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|$，则 $f(y_1,z_1)=0 \Rightarrow f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$ 即为所求旋转曲面的方程.

同理，曲线C绕y轴旋转而成的曲面方程为：$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$.

例4：试建立顶点在坐标原点O，旋转轴为Z轴，半顶角为α的圆锥面的方程.



注：直线L绕另一条与L相交的直线旋转一周，所得的旋转曲面叫做圆锥面. 两直线的交点叫圆锥面的顶点，两直线的夹角 α $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$ 叫圆锥面的半顶角.

解：在 yOz 坐标面上，直线L的方程为：$z=y\cot\alpha$

设 $M_1(0,y_1,z_1)$ 绕Z轴旋转到 $M(x,y,z)$.

由上述分析，可知 $y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$.

则：$z_1=y_1\cot\alpha \Rightarrow z=\pm\sqrt{x^2+y^2}\cot\alpha \Rightarrow z^2=(x^2+y^2)\cot^2\alpha$. □

三. 柱面.

首先来看一个例子：

例6：方程 $x^2+y^2=R^2$ 表示怎样的曲面?