曾秋玲 贺晓军 李波

高中数学一题多解

高三分册

兰州大学出版社

高中数学一题多解

（高三分册）

曾秋玲　贺晓军　李　波

兰州大学出版社

高中数学一题多解

（高三分册）

曾秋玲　贺晓军　李　波

兰州大学出版社

高中数学一题多解

（高三分册）

曾秋玲　贺晓军　李　波

兰州大学出版社出版发行

兰州市天水路 308 号　电话:8617156　邮编:730000

兰州大学出版社激光照排中心排版

白银报社印刷厂印刷

开本：850×1168 毫米 1/32　印张:11.5

1998 年 10 月第 1 版　1998 年 10 月第 1 次印刷

字数:285 千字　印数:1－10000 册

ISBN7－311-01423-9/G・554　定价:15.00 元

前　言

美国著名的数学教育家G·波利亚认为："问题解决"是数学的核心。中学生们在获得知识的同时，更需要获得分析问题和解决问题的综合能力。

要解决问题就需要发现矛盾和差异，从差异中找到解决问题的思考路线及其关键所在。这也是科学研究思想方法的起步。

中学生朋友们在演算数学习题时，往往只注意到：这道题怎么解？而忽视了对思路的归纳总结和多角度的观察，本书的编著者试图以"一题多解"的方式为读者提供"多视角"的思考方法。对于每一道例题都提供了多种"思路"而不仅仅是"解法"，在每道例题及章节后面又提供了一些针对性极强的练习和习题。旨在通过"一题多解"的方式帮助读者开拓视野，启迪思维，并提供对这一能力的训练和培养，以期提高思维的深度和广度。本书的编著者均为重点中学数学高级教师，并多年担任数学奥林匹克教练工作，在中学数学教学工作中积累了丰富的实践经验。书中的每一种思路不仅仅针对例题，而是蕴含了某种数学方法与数学思想。

本书的编排是按现行中学数学教材的顺序进行

的，且每一章节例题的选择也是由易及难、由浅入深的，而其讲练结合的形式为读者在阅读理解的同时又增加了动手练习的机会，这不仅适用于广大中学生，同时也可以成为中学数学教师备课的参考书。

掌握解决问题的方法是数学思维的核心。因而“一题多解”的重要性并不在于其直接的“套用”，而是其数学思维训练的价值和潜在的对发展智力的影响。“一题多解”无形中密切了各数学分支之间的联系，加深了学生对重要的数学方法的再认识，既使他们丰富了解题经验又以题带面地复习了章节知识；并且在寻找最简捷、合理的解题方法，提高思维的灵活性和发展性乃至鉴别错解、激发学习兴趣等各个方面都富有积极的作用。其中一些宝贵的解题经验和精辟见解也具有推广和使用价值。

希望本书能成为中学师生的好朋友。不妥之处，敬请批评指正。

目　　录

第一章　函数

知识要点

1. 集合的概念与运算

2. 映射与函数的概念，函数的奇偶性与单调性；

3. 反函数的概念及反函数的求法；

4. 幂函数、指数函数和对数函数的概念及其图象和性质。

重要定理

1. 摩根定理

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$；$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

2. 奇函数的图象关于原点对称；偶函数的图象关于 y 轴对称.

3. 设函数 $y = f(u)$，$u = g(x)$ 都是单调函数. 那么复合函数 $y = f(g(x))$ 也是单调函数，如果将增函数与减函数分别用记号"＋"、"－"表示，那么复合函数的增减性可以用符号运算规律得到。

4. 互为反函数的图象关于直线 $y = x$ 对称.

例题示范

例 1　已知 $f(\sin x - 1) = \cos^2 x + 2$，求 $f(x)$.

思路一　$f(\sin x - 1)$ 是 $\sin x - 1$ 为自变量的函数，欲找出其对应法则，可把 $\cos^2 x + 2$ 作配方、变形处理，以变为 $(\sin x - 1)$ 的代数式.

解法一　$\because f(\sin x - 1) = \cos^2 x + 2$

$= 1 - \sin^2 x + 2$

$= (1 - \sin x)(1 + \sin x) + 2$

$= [-(\sin x - 1)(\sin x - 1 + 2)] + 2$

$\therefore f(x) = -x(x + 2) + 2$

$= -x^2 - 2x + 2$

$\because -1 \leqslant \sin x \leqslant 1, \therefore -2 \leqslant \sin x - 1 \leqslant 0.$

故 $f(x) = -x^2 - 2x + 2, x \in [-2, 0]$

思路二　用换元法，设 $t = \sin x - 1$，则 $f(\sin x - 1) = f(t)$，只要设法将 $\cos^2 x + 2$ 变为 t 的表达式，问题即获解.

解法二　设 $\sin x - 1 = t, -2 \leqslant t \leqslant 0$，则 $\sin x = t + 1, \therefore \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - (t + 1)^2$.

故 $f(t) = 1 - (t + 1)^2 + 2$

即 $f(x) = -x^2 - 2x + 2 \quad (-2 \leqslant x \leqslant 0)$.

思路三　用参数法.

解法三　设所求函数 $y = f(x)$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sin t - 1 \\ y = \cos^2 t + 2 \end{cases}$ 消去参数 t，得

$f(x) = -x^2 - 2x + 2 \quad (-2 \leqslant x \leqslant 0)$.

简评　含有未知函数 $f(x)$ 的等式叫函数方程. 解函数方程的方法较多，如定义法、换元法、参数法、待定系数法、特殊值法等，所以在解函数方程时，首先应分析清楚已知条件，根据条件选择适当的方法. 如在已知 $f(x)$ 为何类函数时，可选用待定系数法等.

例 2　已知定义在 R 上的函数满足：

(i) $f(x_1 + x_2) + f(x_1 - x_2)$

$= 2f(x_1)\cos 2x_2 + 4a\sin^2 x_2 \quad (*)$

$(x_1、x_2 \in R, a$ 为常数)；

(ii) $f(0) = f(\frac{\pi}{4}) = 1$；

(iii) 当 $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$ 时，$|f(x)|\leqslant 2$.

试求：(1) 函数 $f(x)$ 的解析式

(2) 常数 a 的取值范围.

思路　借助探求函数方程的思想，试将一些特值赋于其中，然后联立求解.

解法一　(1) 在(＊)中令

$$\begin{cases}x_1=0\\x_2=x,\end{cases}\quad\begin{cases}x_1=\frac{\pi}{4}\\x_2=\frac{\pi}{4}+x,\end{cases}\quad\begin{cases}x_1=\frac{\pi}{4}+x\\x_2=\frac{\pi}{4},\end{cases}$$

有 $f(x)+f(-x)=2\cos 2x+4a\sin^2 x$　①

$$f(\frac{\pi}{2}+x)+f(-x)=2\cos(\frac{\pi}{2}+2x)+4a^2\sin^2(\frac{\pi}{4}+x)$$　②

$$f(\frac{\pi}{2}+x)+f(x)=2a$$　③

由 ①＋③－② 得：

$$2f(x)=2a+2\cos x-2\cos(\frac{\pi}{2}+2x)$$

$$+\frac{4a(1-\cos 2x)}{2}-\frac{4a[1-\cos 2(\frac{\pi}{4}+x)]}{2}$$

$$=2a+2(\cos 2x+\sin 2x)$$

$$-2a(\sin 2x+\cos 2x)$$

$$\therefore f(x)=a+\sqrt{2}(1-a)\sin(2x+\frac{\pi}{4})$$

(2) 当 $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$ 时，

$$\sin(2x+\frac{\pi}{4})\in[\frac{\sqrt{2}}{2},1]$$

$\because f(x)$ 的取值与 $1-a$ 符号有关

$\therefore$ (i) 当 $a<1$ 时，

$$1=a+\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1-a)\leqslant f(x)$$

$$\leqslant a+\sqrt{2}(1-a)\leqslant 2.$$ $|f(x)|\leq 2$

即 $-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant 1$；

(ii) 当 $a\geqslant 1$ 时，

$$-2\leqslant f(x)=a+\sqrt{2}(1-a)\leqslant 1.$$

$\therefore 1\leqslant a\leqslant 4+3\sqrt{2}$

综合(i)、(ii) 得

$a\in[-\sqrt{2},4+3\sqrt{2}]$.

解法二 由 $f(0)=f(\frac{\pi}{4})=1$ 及(*)式得

$$f(\frac{\pi}{8}+x)=f(\frac{\pi}{8}-x)$$

设 $x_1=\frac{\pi}{8},x_2=x$,

$$\because f(\frac{\pi}{8}-x)+f(\frac{\pi}{8}+x)$$

$$=2f(\frac{\pi}{8})\cos 2x+4a\sin^2 x$$

$$2f(\frac{\pi}{8}+x)=2f(\frac{\pi}{8})\cos 2x+4a\sin^2 x$$

$$\therefore f(\frac{\pi}{8}+x)=f(\frac{\pi}{8})\cos 2x+2a\sin^2 x$$

$$f(x)=f(\frac{\pi}{8})\cos[2(x-\frac{\pi}{8})]+2a\sin^2(x-\frac{\pi}{8})$$

而 $f(0)=1$

$$\therefore 1=f(\frac{\pi}{8})\cos\frac{\pi}{4}+2a\sin^2(\frac{\pi}{8})$$

$$\therefore f(\frac{\pi}{8})=\sqrt{2}-a(\sqrt{2}-1)$$

$$\therefore f(x)=[\sqrt{2}-a(\sqrt{2}-1)]\cdot\cos 2(x-\frac{\pi}{8})$$

$$+2a\sin^2(x-\frac{\pi}{8})$$

$$=[\sqrt{2}(1-a)+a]\cos 2(x-\frac{\pi}{8})$$

$$+2a\cdot\frac{1}{2}[1-\cos 2(x-\frac{\pi}{8})]$$

$$=\sqrt{2}(1-a)\cos 2(x-\frac{\pi}{8})+a$$

因 $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$，当 $x=\frac{\pi}{8}$，有函数 $f(x)$ 的最值 $|f(x)|_{max}$ $=|f(\frac{\pi}{8})|\leqslant 2$

$\therefore -2\leqslant\sqrt{2}(1-a)+a\leqslant 2.$

即 $-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant 4+3\sqrt{2}.$

简评　问题的一般性结论为真，它在特殊状态时的结论也为真。令变量取某个特殊值，使问题具体化，或估计出结果，是常用的数学方法之一 —— 特殊化法。

例 3　判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x^{\frac{1}{5}}\cos(x-\frac{\pi}{2})$

(2) $g(x)=\begin{cases}\frac{3}{4}x^2+1 & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ -\frac{3}{4}x-1 & (x<0)\end{cases}$

(1) 解法一　$f(x)$ 的定义域是 R，

$$\because f(-x)=(-x)^{\frac{1}{5}}\cos(-x-\frac{\pi}{2})$$

$$=-x^{\frac{1}{5}}\cos(x+\frac{\pi}{2})$$

$$=-x^{\frac{1}{5}}[-\cos(\pi-x-\frac{\pi}{2})]$$

$$=-x^{\frac{1}{5}}\cos(\frac{\pi}{2}-x)$$

$$=x^{\frac{1}{5}}\cos(x-\frac{\pi}{2})=f(x)$$

$\therefore f(x)$ 是偶函数.

解法二　利用其等价定义.

$$f(-x)-f(x)=-x^{\frac{1}{5}}\cos(x+\frac{\pi}{2})-x^{\frac{1}{5}}\cos(x-\frac{\pi}{2})$$

$$=x^{\frac{1}{5}}\sin x-x^{\frac{1}{5}}\sin x=0.$$

$\therefore f(x)$ 是偶函数.

解法三　设 $f_1(x)=x^{\frac{1}{5}},f_2(x)=\cos(x-\frac{\pi}{2})$

显然 $f_1(x)$ 是奇函数,故只需判断 $f_2(x)$ 的奇偶性.

$$f_2(x)=\cos(x-\frac{\pi}{2})=\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin x,$$

$\therefore f_2(x)$ 是奇函数.

$\because f_1(x)$、$f_2(x)$ 在 R 上都是奇函数,

$\therefore f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$ 在 R 上是偶函数.

(2) 解法一:当 $x>0$ 时, $-x<0$,

于是 $g(-x)=-\frac{3}{4}(-x)^2-1=-(\frac{3}{4}x^2+1)$

$$=-g(x),$$

当 $x=0$ 时,$g(-0)=g(0)=0=-g(0)$

当 $x<0$ 时, $-x>0$,

于是 $g(-x)=\frac{3}{4}(-x)^2+1=\frac{3}{4}x^2+1$

$$=-[-\frac{3}{4}x^2-1)=-g(x)$$

综上所述,知 $g(x)$ 在 R 上是奇函数.

解法二：画出函数 $y=g(x)$ 的图象

当 $x>0$ 时，$g(x)=\frac{3}{4}x^2+1$ 是抛物线 $y=\frac{3}{4}x^2+1$ 的右半支；

当 $x=0$ 时，$g(0)=0$；

当 $x<0$ 时，$g(x)=-\frac{3}{4}x^2-1$ 是抛物线 $y=-\frac{3}{4}x^2+1$ 的左半支；依右图知，这条曲线关于原点对称，因此函数 $g(x)$ 是 R 上的奇函数.

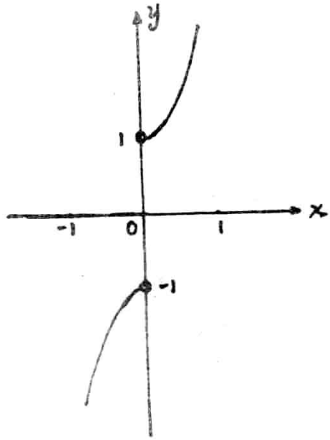

图 1—1

简评　这里用了四种方法判定函数的奇偶性，其中(1)、(2)的解法一均为"定义法"，是基本方法，(1)的解法二，采用了"等价定义"的判定方法，这在用定义判断或证明其函数 $f(x)$ 是奇或偶函数且 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系较难找到时，比较简单，故今后遇到这类问题时，要善于选择恰当的方法.

例 4　函数 $f(x)=\frac{1}{2}(2^x+2^{-x}),x\in R^+$，求反函数 $y=f^{-1}(x)$，并说明函数 $y=f^{-1}(x)$ 的单调情况.

解法一　令 $y=\frac{1}{2}(2^x+2^{-x})$，则

$(2^x)^2-(2y)\cdot 2^x+1=0$，

$\therefore 2^x=y\pm\sqrt{y^2-1}$，

$\because x>0,\therefore 2^x>1$，

而 $y-\sqrt{y^2-1}=\dfrac{1}{y+\sqrt{y^2-1}}\leqslant\dfrac{1}{y}\leqslant 1.$

可见 $2^x\neq y-\sqrt{y^2-1}$，取 $2^x=y+\sqrt{y^2-1}$，

$\therefore x=\log_2(y+\sqrt{y^2-1})$，

交换 x、y 得 $y=\log_2(x+\sqrt{x^2-1})$.

$\because$ 函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}(2^x+2^{-x})$，$(x>0)$ 的值域 $y\in(1,+\infty)$，

$\therefore$ 所求反函数为 $y=\log_2(x+\sqrt{x^2-1})$，$(x>1)$.

任取 x_1、$x_2\in(1,+\infty)$，不妨设 $x_1>x_2$，

$\because f^{-1}(x_1)-f^{-1}(x_2)$

$$=\log_2(x_1+\sqrt{x_1^2-1}-\log_2(x_2+\sqrt{x_2^2-1})$$

$$=\log_2\left(\frac{x_1+\sqrt{x_1^2-1}}{x_2+\sqrt{x_2^2-1}}\right)$$

$$=\log_2\left[1+\frac{(x_1+\sqrt{x_1^2-1})-(x_2+\sqrt{x_2^2-1})}{x_2+\sqrt{x_2^2-1}}\right]$$

$$=\log_2\left[1+\frac{(x_1-x_2)+(\sqrt{x_1^2-1}-\sqrt{x_2^2-1})}{x_2+\sqrt{x_2^2-1}}\right]$$

$$=\log_2\left[1+\frac{(x_1-x_2)+\dfrac{x_1^2-x_2^2}{\sqrt{x_1^2-1}+\sqrt{x_2^2-1}}}{x_2+\sqrt{x_2^2-1}}\right]$$

$$=\log_2\left[1+\frac{(x_1-x_2)(\sqrt{x_1^2-1}+\sqrt{x_2^2-1}+x_1+x_2)}{(x_2+\sqrt{x_2^2-1})(\sqrt{x_1^2-1}+\sqrt{x_2^2-1})}\right]$$

显然 $1+(x_1-x_2)$。

$$\frac{(\sqrt{x_1^2-1}+\sqrt{x_2^2-1}+x_1+x_2)}{(x_2+\sqrt{x_2^2-1})(\sqrt{x_1^2-1}+\sqrt{x_2^2-1})}>1$$

可见 $f^{-1}(x_1)-f^{-1}(x_2)>0$,

$\therefore f^{-1}(x)$ 在$(1,+\infty)$ 上单调递增.

反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的求法同上,下面给出说明函数 $y=f^{-1}(x)$ 的单调状况的其它方法.

思路　利用复合函数单调性的结论.

解法二　设 $u=x+\sqrt{x^2-1}$

任取 $x_1,x_2\in(1,+\infty)$,不妨设 $x_1>x_2$,

$$\begin{aligned}u_1-u_2&=(x_1+\sqrt{x_1^2-1})-(x_2+\sqrt{x_2^2-1})\\&=(x_1-x_2)+(\sqrt{x_1^2-1}-\sqrt{x_2^2-1})\\&=(x_1-x_2)+\frac{x_1^2-x_2^2}{\sqrt{x_1^2-1}+\sqrt{x_2^2-1}}\end{aligned}$$

$\because x_1>x_2>1$,

$\therefore x_1-x_2>0,\sqrt{x_1^2-1}+\sqrt{x_2^2-1}>0$,

$\therefore x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2)>0$,

$\therefore u_1>u_2$,即 u 在$(1,+\infty)$ 上递增.

又 $y=\log_2 u$ 在 $u>0$ 上是增函数,故在 $u>1$ 上 y 递增.

由复合函数的单调性知,$y=\log_2(x+\sqrt{x^2-1})(x>1)$ 是增函数.

思路　利用原函数的单调性来说明反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的单调状况.

解法三　任取 x_1、$x_2\in R^+$,不妨设 $x_1>x_2$,

$$\because f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{2}(2^{x_1}+2^{-x_1})-\frac{1}{2}(2^{x_2}+2^{-x_2})$$