

高等学校试用教材

工程数学

数学物理方程与特殊函数

南京工学院数学教研组编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 5 4/16 字数 127,000

1978年11月第1版 1979年4月第1次印刷

印数 00,001—360,000

书号 13012·0254 定价 0.40 元

目 录

第一章 一些典型方程和定解条件的推导	1
§ 1.1 基本方程的建立	1
§ 1.2 初始条件与边界条件	11
§ 1.3 定解问题的提法	15
习题一	
第二章 分离变量法	18
§ 2.1 有界弦的自由振动	18
§ 2.2 有限长杆上的热传导	26
§ 2.3 圆域内的二维拉普拉斯方程的定解问题	30
§ 2.4 有界弦的强迫振动	33
§ 2.5 非齐次边界条件的处理	36
习题二	
第三章 行波法与积分变换法	46
§ 3.1 一维波动方程的达朗倍尔公式	46
§ 3.2 三维波动方程的泊松公式	50
3.2.1 球对称三维波动方程的通解	51
3.2.2 三维波动方程的泊松公式	51
3.2.3 泊松公式的物理意义	55
§ 3.3 积分变换法举例	58
习题三	
第四章 拉普拉斯方程的格林函数法	67
§ 4.1 拉普拉斯方程边值问题的提法	67
§ 4.2 格林公式	69
§ 4.3 格林函数	75

§ 4.4	两种特殊区域的格林函数及狄氏问题的解	77
4.4.1	半空间的格林函数	78
4.4.2	球域的格林函数	79

习题四

第五章	数理方程求解中出现的几个特殊类型的常微分方程	83
------------	-------------------------------	----

§ 5.1	贝塞尔方程的引出	83
§ 5.2	勒让德方程的引出	85
§ 5.3	施特姆-刘维尔理论简述	87

习题五

第六章	贝塞尔函数	94
------------	--------------	----

§ 6.1	贝塞尔方程的求解	94
§ 6.2	当 n 为整数时贝塞尔方程的通解	97
§ 6.3	贝塞尔函数的递推公式	99
§ 6.4	贝塞尔函数的零点与模值	103
6.4.1	贝塞尔函数的零点	103
6.4.2	贝塞尔函数的模值	104
§ 6.5	贝塞尔方程的边值问题	105
* § 6.6	贝塞尔函数的其他类型	111
6.6.1	第三类贝塞尔函数	111
6.6.2	虚宗量的贝塞尔函数	112
6.6.3	开尔文函数	113
* § 6.7	贝塞尔函数的渐近公式	114

习题六

第七章	勒让德多项式	118
------------	---------------	-----

§ 7.1	勒让德方程的求解	118
§ 7.2	勒让德多项式	120
§ 7.3	函数展成勒让德多项式的级数	124
§ 7.4	连带的勒让德多项式	130

习题七

第八章 数学物理方程的差分解法	134
§ 8.1 将微分方程化成差分方程	134
§ 8.2 拉普拉斯方程的差分格式	137
§ 8.3 热传导方程的差分格式	143
§ 8.4 波动方程的差分格式	146
习题八	
附录 A Γ 函数的基本知识	149
附录 B 傅氏变换与拉氏变换简表	153
习题答案	156

第一章 一些典型方程和定解条件的推导

在讨论数学物理方程的解法以前，我们首先要弄清楚数学物理方程所研究的问题应该怎样提。为此，我们从两方面来讨论，一方面要建立描述某种物理过程的微分方程，另一方面要把一个特定的物理现象本身所具有的具体条件用数学形式表达出来。

§ 1.1 基本方程的建立

在本节，我们将通过几个不同的物理模型推导出数学物理方程中三种典型的方程，这些方程构成本书的主要研究对象。

例 1 弦的振动

弦的振动问题，虽然是一个古典问题，但对于初学者仍然具有一定的启发性。

设有一根均匀柔软的细弦，平衡时沿直线拉紧，而且除受不随时间而变的张力作用及弦本身的重力外，不受外力影响。下面研究弦的微小横向振动，即假定全部运动出现在一个平面上，而且弦上的点沿垂直于 x 轴的方向运动（图 1-1）。

设弦上具有横坐标为 x 的点，在时刻 t 时的位置为 M ，位移 NM 记作 u 。显然，在振动过程中位移 u 是变量 x 与 t 的函数 $u(x, t)$ 。现在来建立位移 u 满足的方程，我们把弦上点的运动先看作小弧段的运动，然后再考虑小弧段趋于零的极

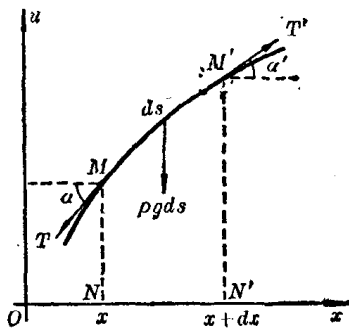


图 1-1

限情况。在弦上任取一弧段 $\widehat{MM'}$ ，其长为 ds ，设 ρ 是弦的线密度，弧段 $\widehat{MM'}$ 两端所受的张力记作 T, T' 。现在考虑弧段 $\widehat{MM'}$ 在 t 时刻的受力情况。用牛顿运动定律，作用于弧段上任一方向上的力的总和等于这段弧的质量乘以该方向上的加速度。

在 x 轴方向弧段受力的总和为 $-T\cos\alpha + T'\cos\alpha'$ ，由于弦只作横向振动，所以

$$T'\cos\alpha' - T\cos\alpha = 0. \quad (1.1)$$

如果弦的振动很小，并且在振动过程中弦上的切线倾角也很小，即 $\alpha \approx 0$ ， $\alpha' \approx 0$ ，则由

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \dots$$

可知，当 α 为无穷小量时， $\cos\alpha$ 与 1 的差量是 α 的高阶无穷小量，可以略去不计。因此当 $\alpha \approx 0$ ， $\alpha' \approx 0$ 时

$$\cos\alpha \approx 1, \quad \cos\alpha' \approx 1$$

代入(1.1)式，便可近似得到

$$T = T'.$$

在 u 方向弧段受力的总和为 $-T\sin\alpha + T'\sin\alpha' - \rho g ds$ ，其中 ρ 是单位弧段的质量， $-\rho g ds$ 是弧段 $\widehat{MM'}$ 的重力。又因当 $\alpha \approx 0$ ， $\alpha' \approx 0$ 时

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x},$$

$$\sin\alpha' \approx \operatorname{tg}\alpha' = \frac{\partial u(x+dx, t)}{\partial x},$$

$$ds = \sqrt{1 + \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right]^2} dx \approx dx,$$

且小弧段在时刻 t 沿 u 方向运动的加速度为 $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$ ，小弧段的质量为 ρds ，所以

$$-T\sin\alpha + T'\sin\alpha' - \rho g ds \approx \rho ds \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

或

$$T \left[\frac{\partial u(x+dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] - \rho g dx \approx \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx, \quad (1.2)$$

上式左边方括号内的部分是由于 x 产生 dx 的变化而引起的 $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ 的改变量, 可用微分代替, 即

$$\frac{\partial u(x+dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \approx \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] dx = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx,$$

于是
$$\left[T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \rho g \right] dx \approx \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx$$

或
$$\frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \approx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + g.$$

一般说来, 张力较大时弦振动速度变化很快, 即 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 要比 g 大得多, 所以又可以把 g 略去。经过这样逐步略去一些次要的量, 抓住主要的量, 最后得出 $u(x, t)$ 应近似地满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1.3)$$

这里的 $a^2 = \frac{T}{\rho}$ 。(1.3)式称为一维波动方程。

如果在振动过程中, 弦上另外还受到一个与弦的振动方向平行的外力, 且假定单位长度所受外力为 $F(x, t)$, 显然, 在这时 (1.1)及(1.2)分别为

$$T' \cos\alpha' - T \cos\alpha = 0,$$

$$F ds - T \sin\alpha + T' \sin\alpha' - \rho g ds \approx \rho ds \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

利用上面的推导方法并略去弦本身的重量, 可得弦的强迫振动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (1.3)'$$

其中 $f(x, t) = \frac{1}{\rho} F(x, t)$.

方程(1.3)与(1.3)' 的差别在于(1.3)' 的右端多了一个与未知函数 u 无关的项 $f(x, t)$, 这个项称为自由项. 包含有非零自由项的方程称为非齐次方程. 自由项恒等于零的方程称为齐次方程. (1.3)为齐次一维波动方程, (1.3)' 为非齐次一维波动方程.

例2 传输线方程

对于直流电或低频的交流电, 电路的基尔霍夫定律指出同一支路中电流相等. 但对于较高频率的电流 (指频率还没有高到能显著地辐射电磁波的情况), 电路中导线的自感和电容的效应不可忽略, 因而同一支路中电流未必相等.

今考虑一来一往的高频传输线, 它被当作具有分布参数的导体(图 1-2). 在具有分布参数的导体中, 电流通过的情况, 可以用

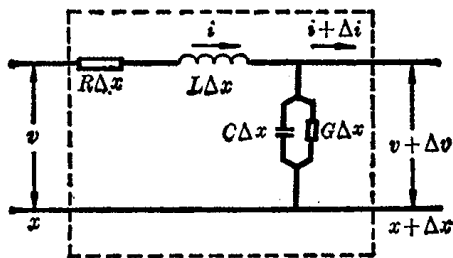


图 1-2

电流强度 i 与电压 v 来描述, 此处 i 与 v 都是 x, t 的函数, 记作 $i(x, t)$ 与 $v(x, t)$. 以 R, L, C, G 分别表示下列参数:

R ——每一回路单位的串联电阻,

L ——每一回路单位的串联电感,

C ——每单位长度的分路电容,

G ——每单位长度的分路电导.

根据基尔霍夫第二定律, 在长度为 Δx 的传输线中, 电压降应等于电动势之和, 即

$$v - (v + \Delta v) = R\Delta x \cdot i + L\Delta x \cdot \frac{\partial i}{\partial t}.$$

而
$$\Delta v \approx \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x,$$

故上式可写成

$$\frac{\partial v}{\partial x} \approx -Ri - L \frac{\partial i}{\partial t}. \quad (1.4)$$

另外, 由基尔霍夫第一定律, 流入节点 x 的电流应等于流出该节点的电流, 即

$$i = (i + \Delta i) + C\Delta x \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + G\Delta x \cdot v,$$

或
$$\frac{\partial i}{\partial x} = -C \frac{\partial v}{\partial t} - Gv. \quad (1.5)$$

将方程(1.4)与(1.5)合并, 即得 i, v 应近似地满足如下方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial i}{\partial x} + C \frac{\partial v}{\partial t} + Gv = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x} + L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri = 0. \end{cases}$$

为了确定函数 i 及 v , 将方程(1.5)对 x 微分, 同时在方程(1.4)两端乘以 C 后再对 t 微分, 并把两个结果相减, 即得

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + G \frac{\partial v}{\partial x} - LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - RC \frac{\partial i}{\partial t} = 0,$$

将(1.4)中的 $\frac{\partial v}{\partial x}$ 代入上式, 得

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (RC + GL) \frac{\partial i}{\partial t} + GRi, \quad (1.6)$$

这就是电流 i 近似满足的微分方程. 采用类似的方法从(1.4)与(1.5)中消去 i 可得电压 v 近似满足的方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (RC + GL) \frac{\partial v}{\partial t} + GRv, \quad (1.7)$$

方程(1.6)或(1.7)称为传输线方程。

根据不同的具体情况,对参数 R, L, C, G 作不同的假定,就可以得到传输线方程的各种特殊形式。例如,在高频传输的情况下,电导与电阻所产生的效应可以忽略不计,也就是说可令 $G=R=0$, 此时方程(1.6)与(1.7)可简化为

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

这两个方程称为高频传输线方程。

若令 $a^2 = \frac{1}{LC}$, 这两个方程与(1.3)完全相同。由此可见,同一个方程可以用来描述不同的物理现象。一维波动方程只是波动方程中最简单的情况,在流体力学、声学及电磁场理论中,还要研究高维的波动方程。

*例3 电磁场方程

从物理学我们知道,电磁场的特性可以用电场强度 \mathbf{E} 与磁场强度 \mathbf{H} 以及电感应强度 \mathbf{D} 与磁感应强度 \mathbf{B} 来描述。联系这些量的麦克斯韦(Maxwell)方程组为

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (1.8)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.9)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (1.10)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho. \quad (1.11)$$

其中 \mathbf{J} 为传导电流的体密度, ρ 为电荷的体密度。

这组方程还必须与下述场的物质方程

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (1.12)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (1.13)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (1.14)$$

相联立, 其中 ε 是介质的介电常数, μ 是导磁率, σ 为导电率. 我们假定介质是均匀而且是各向同性的, 此时 ε, μ, σ 均为常数.

方程(1.8)与(1.9)都同时包含有 \mathbf{E} 与 \mathbf{H} , 从中消去一个变量, 就可以得到关于另一个变量的微分方程. 例如先消去 \mathbf{H} , 在(1.8)式两端求旋度并利用(1.12)与(1.14)得

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{E} + \sigma \text{rot } \mathbf{E},$$

将(1.9)与(1.13)代入得

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = -\varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

而 $\text{rot rot } \mathbf{H} = \text{grad div } \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H}$, 且 $\text{div } \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \text{div } \mathbf{B} = 0$, 所以最后得到 \mathbf{H} 所满足的方程为

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t};$$

同理, 若消去 \mathbf{H} 即得 \mathbf{E} 所满足的方程

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

如果介质不导电($\sigma=0$), 则上面两个方程简化为

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon \mu} \nabla^2 \mathbf{H}, \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon \mu} \nabla^2 \mathbf{E}, \quad (1.16)$$

(1.15)与(1.16)称为三维波动方程.

若将三维波动方程以标量函数的形式表示出来, 则可写成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 u = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (1.17)$$

其中 $a^2 = \frac{1}{\epsilon\mu}$, u 是 E (或 H) 的任意一个分量.

从方程(1.11)与(1.12)还可以推导出静电场的电位所满足的微分方程,事实上,以(1.12)代入(1.11)得

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} \epsilon \mathbf{E} = \epsilon \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho,$$

而电场强度 E 与电位 u 之间存在关系

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} u,$$

所以可得

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = -\frac{\rho}{\epsilon},$$

或
$$\nabla^2 u = -\frac{\rho}{\epsilon}. \quad (1.18)$$

这个非齐次方程称为泊松(Poisson)方程.

如果静电场是无源的,即 $\rho=0$,则(1.18)变成

$$\nabla^2 u = 0, \quad (1.19)$$

这个方程称为拉普拉斯(Laplace)方程.

例4 热传导方程

一块热的物体,如果体内每一点的温度不全一样,则在温度较高的点处的热量就要向温度较低的点处流动,这种现象就是热传导.在工程技术上有许多传热问题都要归结为求物体内部温度的分布,现在我们来推导传热过程中温度所满足的微分方程.与上例类似,我们不是先讨论一点处的温度,而应该先考虑一个区域的温度.为此,在物体中任取一闭曲面 S ,它所包围的区域记作 V (图 1-3).假

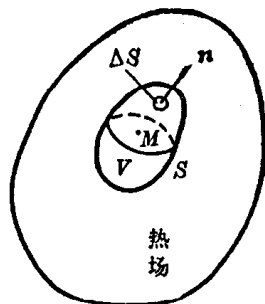


图 1-3

设在时刻 t 区域 V 内点 $M(x, y, z)$ 处的温度为 $u(x, y, z, t)$, n 为曲面元素 ΔS 的法向(从 V 内指向 V 外)。

由传热学可知,在 $[t, t + \Delta t]$ 时间内,从 ΔS 流入区域 V 的热量与时间 Δt , 面积 ΔS , 以及沿曲面的法线方向的温度变化率三者的乘积成正比,即

$$\begin{aligned}\Delta Q &= k \frac{\partial u}{\partial n} \Delta S \Delta t = k(\text{grad } u)_n \Delta S \Delta t \\ &= k(\text{grad } u) \cdot \Delta S \Delta t.\end{aligned}$$

其中 k 称为物体的热传导系数,当物体为均匀导热体时, k 为常数。

于是,从时刻 t_1 到时刻 t_2 , 通过曲面 S 流入区域 V 的全部热量为

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left[\iint_S k \text{grad } u \cdot dS \right] dt.$$

流入的热量使 V 内温度发生了变化,在 Δt 时间内区域 V 内各点温度从 $u(x, y, z, t)$ 变化到 $u(x, y, z, t + \Delta t)$, 则在 Δt 内 V 内温度升高所需要的热量为

$$\begin{aligned}\iiint_V c\rho [u(x, y, z, t + \Delta t) - u(x, y, z, t)] dV \\ \approx \iiint_V c\rho \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} \Delta t dV.\end{aligned}$$

从而从时刻 t_1 到时刻 t_2 , 由于温度升高所吸收的热量为

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV \right] dt,$$

其中 c 为物体的比热, ρ 为物体的密度,对均匀物体来说,它们都是常数。

由于热量守恒,流入的热量应等于物体温度升高所需吸收的

热量, 即

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\iint_S k \operatorname{grad} u \cdot d\mathbf{S} \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV \right] dt.$$

此式左端的曲面积分中 S 是闭曲面, 可以利用奥-高公式将它化为三重积分, 即

$$\iint_S k \operatorname{grad} u \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V k \operatorname{div} \operatorname{grad} u dV = \iiint_V k \nabla^2 u dV,$$

因此有

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_V k \nabla^2 u dV \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV \right] dt. \quad (1.20)$$

由于时间间隔 $[t_1, t_2]$ 及区域 V 都是任意取的, 并且被积函数是连续的, 所以(1.20)式左右恒等的条件是它们的被积函数恒等, 即

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \nabla^2 u = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (1.21)$$

其中 $a^2 = \frac{k}{c\rho}$. 方程(1.21)称为三维热传导方程.

若物体内有热源, 其强度为 $F(x, y, z, t)$, 则相应的热传导方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t),$$

其中 $f = \frac{F}{c\rho}$.

作为特例, 如果所考虑的物体是一根细杆(或一块薄板), 或者即使不是细杆(或薄板)而其中的温度 u 只与 x, t (或 x, y, t)有关, 则方程(1.21)就变成一维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

或二维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

如果我们考虑稳恒温度场，即在热传导方程中物体的温度趋于某种平衡状态，这时温度 u 已与时间 t 无关，所以 $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ ，此时方程(1.21)就变成拉普拉斯方程(1.19)。由此可见稳恒温度场内的温度 u 也满足拉普拉斯方程。

在研究气体或液体的扩散过程时，若扩散系数是常数，则所得的扩散方程与热传导方程完全相同。

§ 1.2 初始条件与边界条件

上面所讨论的是如何将过程的物理规律用数学式子表达出来。除此以外，我们还需要把具体条件也用数学形式表达出来，这是因为任何一个具体的物理现象都是处在特定条件之下的。例如弦振动问题，上节所推导出来的方程是一切柔软均匀的弦作微小横向振动的共同规律，在推导这个方程时没有考虑到弦在初始时刻的状态以及弦所受的约束情况。如果我们不是泛泛地研究弦的振动，势必就要考虑到弦所具有的特定条件。因为任何一个具体振动现象总是在某时刻的振动状态和此时刻以前的状态有关，从而就与初始时刻的状态有关。另外，弦的两端所受的约束也会影响弦的振动，端点所处的物理条件不同会产生不同的影响，因而弦的振动也不同。所以对弦振动问题来说，除了建立振动方程以外，还需列出它的具体条件。对热传导方程，拉普拉斯方程也是如此。

提出的条件应该恰恰能够说明某一具体物理现象的初始状态以及边界上的约束情况。用以说明系统的初始状态的条件称为**初始条件**。用以说明边界上的约束情况的条件称为**边界条件**。

下面具体说明初始条件和边界条件的表达形式。先谈初始条

件. 对于弦振动问题来说, 初始条件就是弦在开始时刻的位移及速度. 若以 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 分别表示初位移和初速度, 则初始条件可以表达为

$$\begin{cases} u \Big|_{t=0} = \varphi(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x). \end{cases} \quad (1.22)$$

而对热传导方程来说, 初始条件是指在开始时刻物体温度的分布情况. 若以 $\varphi(M)$ 表示 $t=0$ 时物体任一点 M 处的温度, 则热传导方程的初始条件就是

$$u(M, t) \Big|_{t=0} = \varphi(M). \quad (1.23)$$

泊松方程与拉普拉斯方程都是描述稳恒状态的, 与初始状态无关, 所以不提初始条件.

再谈边界条件. 如果边界条件直接给出了未知函数 $u(M, t)$ 在边界 S 上的值, 以 s 表示边界 S 上的动点, 则这样的边界条件可表为

$$u(M, t) \Big|_{M \in S} = \varphi(s, t),$$

或简写成

$$u \Big|_S = \varphi. \quad (1.24)$$

这种边界条件称为**第一类边界条件**, 其中 $\varphi(s, t)$ 表示在边界 S 上给定的已知函数. 例如, 在杆的导热问题中, 若在端点 $x=a$ 处温度保持为常数 u_0 , 这时在端点 $x=a$ 的边界条件为

$$u \Big|_{x=a} = u_0,$$

若在端点 $x=a$ 处温度随时间的变化规律 $f(t)$ 为已知, 在这点的边界条件为

$$u \Big|_{x=a} = f(t).$$

又如在弦振动问题中,若弦的某端点 $x=a$ 是固定的,则在该点的位移为零,即

$$u \Big|_{x=a} = 0.$$

以上都是第一类边界条件的例子.

但在许多情况下,边界上的物理条件并不能用第一类边界条件来描述.例如,在杆的导热问题中,若杆的一端 $x=a$ 绝热,那末绝热这个条件就不能直接给出杆的端点处的温度变化.由于从杆外通过杆端流入杆内的热量为 $k \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{x=a} \Delta S \Delta t$ (其中 Δt 为时间间隔, ΔS 为杆的截面积, n 为杆在端点 $x=a$ 处的外法向,若 $x=a$ 是杆的左端点, n 的正向与 x 轴正向相反,则 $\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial x}$,若 $x=a$ 是杆的右端点,则 n 的正向与 x 轴正向相同,则 $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}$),所以绝热这个条件可以表达为

$$k \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{x=a} \Delta S \Delta t = 0,$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{x=a} = 0.$$

若在单位时间内通过 $x=a$ 端单位面积流入杆内的热量是 t 的已知函数 $f(t)$,则这个条件可表示为

$$k \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{x=a} = f(t).$$

对于弦振动问题来说,如果弦在 $x=a$ 处是自由的,即沿着位移方向不受外力,则此时弦在 $x=a$ 处沿位移方向的张力(参照