名著译丛

〔美〕J. L. 凯莱 著

一般拓扑学

科学出版社

数学名著译丛

一般拓扑学

〔美〕J. L. 凯莱 著

吴从炘 吴让泉 译

蒲保明 等校

科学出版社

1982

内 容 简 介

本书是关于一般拓扑的一部经典著作．书中系统地叙述了一般拓扑的基本知识．正文共分七章，包括拓扑空间，Moore-Smith 收敛、乘积空间和商空间，嵌入和度量化，紧空间，一致空间，函数空间；此外还有一个预备知识和一个附录．每章之后有大量问题，作为正文的补充和引伸，有助于读者更好地理解正文的内容．

书末由译者加写了一个附录，介绍了近期拓扑学发展的概貌．

本书正文七章由吴从炘翻译，其余由吴让泉翻译．增添的附录由吴从炘撰写．

本书可供大专院校数学系师生及有关的专业工作者参考．

J. L. Kelly
GENERAL TOPOLOGY
van Nostrand, 1955

数学名著译丛
一 般 拓 扑 学
〔美〕J. L. 凯莱 著
吴从炘 吴让泉 译
蒲保明 等校
责任编辑 张鸿林 杜小杨
科学出版社 出版
北京朝阳门内大街 137 号
中国科学院印刷厂 印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1982年5月第一版 开本：850×1168 1/32
1982年5月第一次印刷 印张：9 7/8
印数：0001—10,000 字数：254,000
统一书号：13031·1880
本社书号：2555·13—1
定价：1.85 元

序

本书系统地论述了一般拓扑学的部分内容，这些内容已被证明在某些数学分支中是很有用处的；尤其希望它成为学习近代分析的基础．只是由于朋友们的极力劝说，我才没有将本书命名为《青年数学分析工作者须知》．

本书是根据作者 1946—47 年在芝加哥大学、1948—49 年在加利福尼亚大学、1950—51 年在土兰大学（Tulane University）几种不同的讲义为基础而写成的，原打算把它作为参考书和教科书．这两个目的有些不太一致．特别是作为一本参考书，它应提供这方面一个相当全面的概括，因此在内容上比正规教程叙述得要更广泛一些．其中许多细节主要是为作参考书而安排的；例如，为了包含所有最常用的术语，我作了相当大的努力，并把它们都罗列在索引中．但是，另一方面，因为它又是一本教科书，所以对前几章论述得相当详细．由于同样的原因，加入了一章预备知识，虽然不是系统论述的一部分，但它包罗了本书主要部分所必需的那些题材；并且我发现这些题材对许多学生来说还是新颖的．在这一章里比较重要的结果是有关集论方面的一些定理，而它们的系统论述已在附录中给出．附录与本书的其余部分是完全独立的，除此而外，本书每一部分都是与其前面的论述相关联的．

本书的叙述方式有一些与众不同之处．有时在节前加上一个星号，表示该节是一段题外之言．许多同样或者更有意义的题材，放在问题中加以论述，而这些问题可看成是讨论的整体的一部分．这些问题中有少数是习题，其主要目的在于帮助理解所使用到的概念．还有一些是反例，它们划分出了可能成为定理的界限．有些小理论就其本身而言是有兴味的，又有一些是一般拓扑在不同领域中应用的引论．最后部分如常附有参考文献，以便有兴趣的

读者(喜爱独立思考者)可以进一步深入学习. 书末的文献中包含了有关本书议题的绝大部分近代贡献和一些早期的突出成就，以及少数“交叉领域”的参考文献.

我采用了一个特殊的约定[1]，每个证明的结尾用 I 来表示. 这个记号是属于哈尔莫斯(Halmos)的.

J. L. 凯莱

1955 年 2 月于加利福尼亚伯克利分校

1）原文中还有另一约定，即对经常出现的 “if and only if” 用哈尔莫斯的缩写 “iff” 去代替它. ——译者

目 录

第零章 预备知识

理解本书的唯一前提，只需要知道实数的少数性质和具有适当程度的数学修养．以后要用到的所有定义和基本定理都汇集于这个头一章里．这里的论述在一定程度上是自成系统的．但是，特别是在数系的讨论中，有不少细节被略去了．本章最深刻的一些结果是集论的定理，而它的系统论述在附录中给出．由于这一章本来是打算当作参考资料的，因此建议读者先复习一下头两节，然后开始学第一章，当感到需要的时候，可再利用本章的其余部分．许多定义当它们第一次在书中出现时，我们予以重述．

集

我们将要论及集和集的元．“集”、“类”、“族”均为同义语[1]，而符号 $\in$ 表示元的从属关系．所以，当且仅当 x 是 A 的一个元(一个元素，或一个点)时，方可以写 $x\in A$．两个集是恒等的，当且仅当它们有相同的元，并且相等通常总是意指恒等，因此，$A=B$ 的充要条件是：对于每一个 x，$x\in A$ 当且仅当 $x\in B$．

集将要借助于括号来构成，因此 $\{x:\cdots(关于\ x\ 的命题)\cdots\}$ 是使得关于 x 的命题是正确的所有点 x 的集．也就是说，$y\in\{x:\cdots(关于\ x\ 的命题)\cdots\}$ 当且仅当关于 y 的相应命题是正确的．例如，假定 A 是一个集，则 $y\in\{x:x\in A\}$ 当且仅当 $y\in A$．因为具有相同元的两个集是恒等的，所以 $A=\{x:x\in A\}$，这即使不是一件惊奇的事实，也是一件使人愉快的事实．在构造集的这

1) 这种说法不是绝对准确的，在附录内将要说明，由于技术上的原因，将把类分成不同的两种．我们把“集”这一术语保留给它们本身是类的元的那种类．在此集与类的区别不是十分重要的；除了唯一的一个并非无足轻重的例外，即每一个类当它在讨论中出现时（在附录以前），也是一个集．

一方案中，“x”是一个哑变数，其含意是我们可以用不曾出现在这个命题中的任何其它变数来代替它．于是$\{x: x\in A\}=\{y: y\in A\}$，但是 $\{x:x\in A\}\neq\{A:A\in A\}$．

在这种形式下，关于集的构造有一个很有用的法则．如果两个集是由两个不同的命题利用上面规定的方式构成的，同时假定这两个命题逻辑上是等价的，则构成的集是相等的．这个法则可以通过证明构造成的集具有相同的元来说明它是合理的．例如，假定A与B是两个集，则 $\{x:x\in A$ 或 $x\in B\}=\{x:x\in B$或 $x\in A\}$，因为y属于第一个集当且仅当 $y\in A$ 或 $y\in B$，而这种情况成立当且仅当 $y\in B$ 或 $y\in A$．这一结论成立当且仅当y为第二个集的一个元．下一节的所有定理正是用这种方法加以证明的．

子集与余集；并与交

如果A与B是两个集（或族），则A是B的一个**子集**（**子族**）当且仅当A的每个元是B的一个元．在这种情况下，我们可以说A**被包含**在B中或者B**包含**A，并写成下面的形式：$A\subset B$或者$B\supset A$．于是$A\subset B$ 当且仅当对于每一x只要 $x\in A$，则有 $x\in B$．集A是B的一个**真子集**（A真正地被包含在B中或B真正地包含A）当且仅当 $A\subset B$ 同时 $A\neq B$．如果A是B的一个子集，同时B又是C的一个子集，那末显然A是C的一个子集．如果 $A\subset B$ 同时 $B\subset A$，则 $A=B$，在这种情况下A的每一个元也是B的一个元，反之亦然．

集A与B的**并**（**和、逻辑和**）记作 $A\cup B$，它是至少属于A或B之一的所有点的集；也就是说 $A\cup B=\{x:x\in A$ 或 $x\in B\}$．在此采用“或”字并没有两者不可兼的意思．也就是说既属于A又属于B的点也属于 $A\cup B$．集A与B的**交**，记作 $A\cap B$，它是同时属于A与B之所有点的集；也就是说，$A\cap B=\{x:x\in A$ 同时 $x\in B\}$．**空集**用 0 来表示[1]，并定义为$\{x:x\neq x\}$（任何一个伪命题可以用在

1）空集往往用符号$\varnothing$来表示，以便同数 0 相区别．——译者注

此处来代替 $x \neq x$). 空集是任一集 A 的一个子集，因为 0 (没有一个元)的每个元属于 A. 对于每一对集 A 与 B，包含关系 $0 \subset A \cap B \subset A \subset A \cup B$ 皆成立. 两个集 A 与 B 叫做**不相交的**当且仅当 $A \cap B = 0$; 也就是说，A 的任何元都不是 B 的元. 两个集 A 与 B 叫做**相交的**当且仅当存在一个点同时属于这两个集，因此 $A \cap B \neq 0$. 如果 $\mathscr{A}$ 是一个集族($\mathscr{A}$ 的元均为集)，那末 $\mathscr{A}$ 叫做一个**不相交族**当且仅当 $\mathscr{A}$ 的任意两个元都不相交.

一个集 A 的**绝对余集**记作 $\sim A$，它是 $\{x: x \notin A\}$. A 关于一个集 X 的**相对余集**是 $X \cap \sim A$，或者简单地记作 $X \sim A$. 这样的集又称为 X 与 A 之**差**. 对于每一个集 A 皆有 $\sim\sim A = A$ 成立；关于相对余集的相应说法较复杂，所以把它作为定理 2 的一部分来给出.

必须很仔细地区分"元"与"子集". 仅有一个元 x 的集称为**单点集**，并用 $\{x\}$ 来表示. 注意 $\{0\}$ 不是空集，因为 $0 \in \{0\}$，所以 $0 \neq \{0\}$. 在一般情况下 $x \in A$ 当且仅当 $\{x\} \subset A$.

下面两个定理表述出上面给出的各种定义之间最常用到的一些关系. 这些关系都是一些基本的事实，今后用到时常常不再明确地指出来. 在此我们只证这两个定理的一部分.

1 定理. 设 A 与 B 为一集 X 的两个子集，则 $A \subset B$ 当且仅当下列条件之一成立.

$$A \cap B = A;\ B = A \cup B;\ X \sim B \subset X \sim A;$$
$$A \cap X \sim B = 0;\ 或\ (X \sim A) \cup B = X.$$

2 定理. 设 A, B, C 与 X 均为集，则

(a) $X \sim (X \sim A) = A \cap X$.

(b) (交换律) $A \cup B = B \cup A$ 且 $A \cap B = B \cap A$.

(c) (结合律) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ 且
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

(d) (分配律) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 且
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(e) (De Morgan 公式) $X \sim (A \cup B) = (X \sim A) \cap (X \sim B)$ 且 $X \sim (A \cap B) = (X \sim A) \cup (X \sim B)$.

证明． (a) 的证明．一个点 x 是 $X\sim(X\sim A)$ 的一个元当且仅当 $x\in X$ 同时 $x\notin X\sim A$．由于 $x\notin X\sim A$ 当且仅当 $x\notin X$ 或 $x\in A$，从而推出 $x\in X\sim(X\sim A)$ 当且仅当 $x\in X$ 并且不是 $x\notin X$ 便是 $x\in A$．但这两种情况的第一种是不可能的，所以 $x\in X\sim(X\sim A)$ 当且仅当 $x\in X$ 同时 $x\in A$；也就是当且仅当 $x\in X\cap A$．

(d) 的第一部分之证明．一个点 x 是 $A\cap(B\cup C)$ 的一个元当且仅当 $x\in A$ 同时不是 $x\in B$ 便是 $x\in C$．这种情况又当且仅当 x 不是同时属于 A 与 B 便是同时属于 A 与 C．故 $x\in A\cap(B\cup C)$ 当且仅当 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，从而等式得证．|

如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 均为集，则 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 是这些集的并，而 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 是它们的交．由于结合律成立，在计算并与交时，把各集不论怎样结合起来都是无妨的．我们还要考虑非有限集族的元的并，有了这种并的记号是极其方便的．考虑下面的情况：对于一个我们称为指标集的集 A 的每一元 a，假定给定一个集 X_a，于是所有 X_a 的并用 $\bigcup\{X_a:a\in A\}$ 来表示，而它被定义为对于 A 中某一 a 使得 $x\in X_a$ 之所有点 x 的集．类似的方法，对于在 A 中的 a 所有 X_a 的交用 $\bigcap\{X_a:a\in A\}$ 来表示，而它被定义为 $\{x$：对于 A 中的每一 a，$x\in X_a\}$．一个很重要的特殊情况如下：指标集本身是一个集族 $\mathscr{A}$ 并且对于 $\mathscr{A}$ 中每个 A，X_A 就是集 A，这时上面的定义变成：$\bigcup\{A:A\in\mathscr{A}\}=\{x$：对于 $\mathscr{A}$ 中的某一 A，$x\in A\}$ 同时 $\bigcap\{A:A\in\mathscr{A}\}=\{x$：对于在 $\mathscr{A}$ 中的每一个 A，$x\in A\}$．

关于集族的元的并与交有许多具有代数特征的定理，但我们只需要下面的一个，而它的证明被略去了．

3 定理． 设 A 为一指标集，并且对于在 A 中的每一 a 令 X_a 为一个固定集 Y 的一个子集，则

(a) 如果 B 是 A 的一个子集，则 $\bigcup\{X_b:b\in B\}\subset\bigcup\{X_a:a\in A\}$ 且 $\bigcap\{X_b:b\in B\}\supset\bigcap\{X_a:a\in A\}$．

(b) (De Morgan 公式) $Y\sim\bigcup\{X_a:a\in A\}=\bigcap\{Y\sim X_a:a\in A\}$

$$且\ Y \sim \bigcap\{X_a: a\in A\} = \bigcup\{Y \sim X_a: a\in A\}.$$

De Morgan 公式通常以扼要的形式叙述为：并的余集等于余集的交，并且交的余集等于余集的并．

应当强调指出：适当地熟练这类集论的运算是很重要的．附录中包含有一长串定理，我们建议初学者把它作为练习(参看关于类的初等代数那一节)．

4 注记． 在大多数集论的早期著作中，与对实数的通常运算相类似，两个集 A 与 B 的并曾记作 $A+B$，且交记作 AB．一些相同的代数定律也成立；然而由于迫不得已的原因，下面不采用这种习惯的用法．通常集论运算是在一个群、一个域、或者一个线性空间内取的．如果 A 与 B 是一个(记作加法的)群的两个子集，则集 $\{c: c=a+b$，对于 A 内的某个 a 与 B 内的某个 $b\}$ 自然选用记号"$A+B$"，同时很自然的用 $-A$ 来表示集 $\{x: -x\in A\}$．由于在系统地应用刚才定义的集进行运算时，集的并、交以及余集也要出现，可见本书采用的记号似乎是最合理的．本书关于集的构造所用的记号是现今使用最广的一种，但是"使得……所有 x 的集"也用记号 $\underset{x}{E}$ 表示．这类记号有下面的弱点：那就是必须确定哪一个是哑变数．现通过下面的例子来说明这种论点．所有正数平方的集可以很自然的用 $\{x^2: x>0\}$ 表示，继之 $\{x^2+a^2: x<1+2a\}$ 也有很自然的含意．不幸的是后者可能有三种自然的含意，即：$\{z$：对于某个 x 与某个 a，$z=x^2+a^2$ 且 $x<1+2a\}$，$\{z$：对于某个 x，$z=x^2+a^2$ 且 $x<1+2a\}$，以及 $\{z$：对于某个 a，$z=x^2+a^2$ 且 $x<1+2a\}$．这些集是完全不同的，因为第一个集既不依赖 x 也不依赖 a，第二个集依赖 a，而第三个集依赖 x．用稍许专门一点的术语来讲，"x"与"a"在第一个集里都是哑的，"x"在第二个集里是哑的，而"a"在第三个集里是哑的．为了避免含混，每当应用括号记号时，第一个括号之后和冒号之前恒用哑变数来占据．

最后，考虑另一记法的特点是有意义的．在读象"$A\cap(B\cup C)$"这种表达式时括号是最要紧的．然而若选用一种与此稍许不同