文登教育集团课堂用书
聚骄公司全心专业设计

FOCUS 聚焦图书

考研数学

模拟考场15套

主编 陈文灯 教授
编审 潘正义 教授

2008版
（数学一）

全新修订，重磅出击，拿下2008版考研高分！

世界图书出版公司

FOCUS 聚焦图书

聚骄公司全心

文灯教育集团

考研数学

模拟考场15套

主编 陈文灯 教授

编审 潘正义 教授

2008版

(数学一)

全新修订，重磅出击，拿下2008版考研高分！

世界图书出版公司

图书在版编目(CIP)数据

数学模拟考场. 1/陈文灯等编著. —北京:世界图书出版公司北京公司,2005.7 (2007.8 修订)

ISBN 978-7-5062-5453-3

Ⅰ.数…　Ⅱ.陈…　Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料　Ⅳ.01

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 055393 号

数学一·模拟考场 15 套

主　　编:陈文灯
责任编辑:世　华
装帧设计:郑宝芬

出　　版:世界图书出版公司北京公司
发　　行:世界图书出版公司北京公司
(北京朝内大街 137 号　邮编:100010　电话:010-88861708)
销　　售:各地新华书店
印　　刷:北京忠信诚胶印厂

开　　本:787×1092 毫米　1/16
印　　张:15.5
字　　数:350 千字
版　　次:2007 年 8 月第 4 版　2007 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5062-5453-3/H·498　　定价:18.60 元

服务热线:010-88861708

致读者

众所周知，数学是当今所有学科中最基础，也是最重要的一门学科，任何人想在学业中有所发现、有所发明、有所创造就必须以数学为工具、为武器。“遥望考研通天道，欲向谁家借舟桥。历数月宫折桂者，全凭数学逞英豪”。数学分值150分，弄通弄透了，全拿；弄不明白，可能全瞎！但是现今有不少同学谈“数”色变，放弃原本钟爱的专业，改报不考数学的陌生专业，真是太可惜、太遗憾了。

数学果真那么难考吗？许多文科专业报考理工类、经济管理类专业的考研数学高分者告诉我们：只要有毅力、有恒心，夯实数学基础，通过题型掌握解题方法和技巧，数学是完全可以考好的。

数学没有考好的考生，**失分的原因主要有以下四个方面：**

✲ *对概念没有彻底搞清楚，一知半解，似是而非*。这种做题就把握不准，容易犯“南辕北辙”的错误。

✲ *定理公式只记“形式”，不记“本质”，尤其是“前提条件”*。这样似乎题也做完了，但是“劳而无功”。因为是在错误条件下得出的错误结论，是不会被认可的。

✲ *基本运算能力不强*。现在的考研数学试卷有两大特点：一是大题量，二是大计算量。如果平时不多做练习，不多记一些解题方法和技巧，做题速度自然快不了，成绩当然是不可能上去的。

✲ *格式不规范，推理不严谨*。数学推理非常严谨，环环相扣，来不得半点的“错位”和“突兀”，尤其是综合题（这类题的比重有逐年增加趋势）。有如一堆乱丝，如果理不出头绪，那就会越做越无头绪，越做越乱。

为了帮助考研同学多得分、少失分、考高分，我们编写了这15套难度与真题相当、强调基础、题型新颖丰富多样和技巧性较高的模拟训练试题。

如何使用,效率才能最高?高分学员的经验是:

(1)"复习指南"至少看完两遍之后,再做试卷可收"事半功倍"的效果;

(2)做完至少8套试卷后要归纳总结;

(3)根据自己做题的情况,查漏补缺,有针对性地找些题做做,发扬优势,弥补不足。

汗水脸上流,

胜券手中握。

祝同学们成功!

陈文灯

2007年8月

附:

2008年理工类大纲变化情况:

高数里明确了$f''(x)>0$,$f(x)$的图形是凹的,当$f''(x)<0$,$f(x)$的图形是凸的。特别指明了要理解标准正态分布、χ^2分布,t分布和F分布的上侧α分位数。

高数、线代、概率的题型比例变化如下:

2007年:选择题:6:2:2	填空题:4:1:1	解答题:4:2:2
2008年:选择题:4:2:2	填空题:4:1:1	解答题:5:2:2

目录

模拟考场（一）

考生注意：（1）本试卷共 23 大题，满分 150 分.

（2）根据国家标准，试卷中的正切函数，余切函数、反正切函数、反余切函数分别用 $\tan x$、$\cot x$、$\arctan x$ 和 $\operatorname{arccot} x$ 表示.

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

（1）设函数 $f(x)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续的单调增加的奇函数，$F(x)=\int_0^x(2t-x)f(x-t)dt$，则 $F(x)$ 是

（A）单调增加的非奇非偶函数.　　（B）单调减少的非奇非偶函数.

（C）单调增加的奇函数.　　（D）单调减少的奇函数.　　【　　】

（2）设在全平面上有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}<0$，$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}>0$，则在下列条件中使 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$ 成立的是

（A）$x_1<x_2,\ y_1<y_2$.　　（B）$x_1<x_2,\ y_1>y_2$.

（C）$x_1>x_2,\ y_1<y_2$.　　（D）$x_1>x_2,\ y_1>y_2$.　　【　　】

（3）设 $f(x,y)$ 为连续函数，则使 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}f(x,y)dxdy=4\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ 成立的充分条件是

（A）$f(-x,-y)=f(x,y)$.

（B）$f(-x,-y)=-f(x,y)$.

（C）$f(-x,y)=f(x,-y)=-f(x,y)$.

（D）$f(-x,y)=f(x,-y)=f(x,y)$.　　【　　】

（4）已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^p}$ 与反常积分 $\int_0^{+\infty}e^{(p-2)x}dx$ 均收敛，则 p 的取值范围是

（A）$p>2$；　　（B）$p<2$；

（C）$p>0$；　　（D）$0<p<2$　　【　　】

（5）设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$，$\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n)$，记向量组 Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$，Ⅲ：$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n$. 如果向量组Ⅲ线性相关，则

（A）向量组 Ⅰ 线性相关.

（B）向量组 Ⅱ 线性相关.

（C）向量组 Ⅰ 与 Ⅱ 都线性相关.

（D）向量组 Ⅰ 与 Ⅱ 至少有一个线性相关.　　【　　】

(6) 设A与B是n阶方阵,齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$与$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$有相同的基础解系$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$,则在下列方程组中以$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$,为基础解系的是

(A) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.　(B) $\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$.　(C) $\boldsymbol{BAx}=\boldsymbol{0}$.　(D) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.　【　】

(7) 设两事件A,B,已知$AB=\overline{A}\overline{B}$,则必有

(A) A与B独立.　(B) $A\supset B$.　(C) $A=B$.　(D) A与B对立.　【　】

(8) 设随机变量X的密度函数为$f(x)$,且$f(-x)=f(x)$,$F(x)$是X的分布函数,则对任意实数a,有

(A) $F(-a)=1-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.　(B) $F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

(C) $F(-a)=F(a)$.　(D) $F(-a)=2F(a)-1$.　【　】

二、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分.把答案填在题中横线上)

(9) 设$a>0$,则$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\ln\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{3}\mathrm{d}x=$________.

(10) 设曲线$x=\int_1^t\frac{\cos u}{u}du$, $y=\int_1^t\frac{\sin u}{u}du$,则自原点到此曲线右边第一条垂直于$x$轴的切线之间的弧长为________.

(11) 设$y_1=e^x-e^{-x}\sin 2x$,$y_2=e^{-x}\cos 2x+e^x$是某二阶常系数非齐次线性方程的两个解,则该方程是________.

(12) 设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{ax}=\int_{-\infty}^{a}te^t\mathrm{d}t$,则$a=$________.

(13) 设三阶实对称矩阵A有三个不同的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$. λ_1,λ_2所对应的特征向量分别为$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,a,1)^T$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(a,a+1,1)^T$,则$\lambda_3$所对应的特征向量$\boldsymbol{\alpha}_3=$________.

(14) 设随机变量$X\sim N(0,\sigma^2)$,$X_1,X_2,\cdots,X_{10}$,是取自总体X的简单随机样本,已知统计量

$$F=a\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{X_5+X_6+\cdots+X_{10}}$$服从分布$F(4,b)$,则$a=$________,$b=$________.

三、解答题(本题共9小题,满分94分,解答应写出文字说明、证明过程演算步骤).

(15)(本题满分10分)

设$f(x)$是可导的偶函数,它在$x=0$的某邻域内满足关系式$f(e^{x^2})-3f(1+\sin x^2)=2x^2+o(x^2)$,求曲线$y=f(x)$在点$(-1,f(-1))$处的切线方程.

(16)(本题满分 10 分)

设函数$f(x)$满足条件:(1)$a \leqslant f(x) \leqslant b$,(2)$|f(x)-f(y)| \leqslant k|x-y|$,$x,y \in [a,b]$,$0<k<1$. 取$x_0 \in [a,b]$,构造序列:$\{f_n(x_0)\}$:$f_1(x_0)=f(x_0)$,$f_{n+1}(x_0)=f[f_n(x_0)]$,$n=1,2,\cdots$.

证明:(1)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f_{n+1}(x_0)-f_n(x_0)]$绝对收敛;(2)$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_0)$存在.

(17)(本题满分 10 分)

质量为 1g(克)的质点受外力作直线运动,这外力和时间成正比,和运动速度成反比. 在$t=10$ s(秒)时,速度为 50cm/s,外力为 $4\text{g}\cdot\text{cm/s}^2$,问从运动开始多长时间后速度为 100 cm/s.

(18)(本题满分 10 分)

设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数,在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上,曲线积分$\oint_L \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4}$的值恒为同一常数.

(Ⅰ) 证明:对右半平面 $x > 0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C,有$\oint_C \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} = 0$;

(Ⅱ) 求函数 $\varphi(y)$ 的表达式.

(19)(本题满分 10 分)

设$f(x)$,$g(x)$ 可微,且$f'(x) = g(x)$,$g'(x) = -f(x)$,$f(0) = 0$,$f'(0) = 1$,证明:$f^2(x) + g^2(x) = 1$.

(20)(本题满分 11 分)

已知 2 维非零向量 $\boldsymbol{x}$ 不是 2 阶方阵 $\mathbf{A}$ 的特征向量.

(1) 证明:$\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 线性无关.

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-6\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$,求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值并讨论 $\mathbf{A}$ 可否相似对角化.

(21)(本题满分 11 分)

设二维随机变量(X,Y)服从区域:$-1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2$ 上的均匀分布,求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+Yx_3^2+2x_1x_2+2Xx_1x_3$ 为正定二次型的概.

(22)(本题满分 11 分)

一条自动生产线连续生产 n 件产品不出故障的概率为$\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$($n=0,1,2,\cdots$),假设产品为优质品的概率为$p(0<p<1)$,如果各件产品是否为优质品相互独立.

(1) 求生产线在两次故障间生产 k 件优质品的概率.

(2) 若已知在某两次故障间该生产线生产了 k 件优质品,求它共生产 m 件产品的概率.

(23)(本题满分 11 分)

设 Y_1,Y_2,Y_3 独立,且都服从参数为 p 的 0 - 1 分布. 令 $X_k=\begin{cases}1, Y_1+Y_2+Y_3=k\\-1, Y_1+Y_2+Y_3\neq k\end{cases}$, $k=1,2$.

求:(1)(X_1,X_2) 的联合分布律. (2)p 为何值时,$E(X_1X_2)$ 最小.

模拟考场（二）

考生注意：(1) 本试卷共 23 大题，满分 150 分.

(2) 根据国家标准，试卷中的正切函数，余切函数、反正切函数、反余切函数分别用 tan$x$、cot$x$、arctan$x$ 和 arccot$x$ 表示.

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

$=x^3+C$

(1) 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，且 $f(x)$ 是偶函数，则

(A) $F(x)$ 一定是奇函数. $f(x)=x^2$

(B) $F(x)$ 一定是偶函数.

(C) $F(x)$ 一定是既非奇函数，又非偶函数.

(D) 只有当 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 时，$F(x)$ 是奇函数. 【 D 】

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有定义，在 $x=0$ 处可导，则 $f'(0)=0$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 收敛的

(A) 充分条件而非必要条件. (B) 必要条件而非充分条件.

(C) 充分必要条件. (D) 既非充分又非必要条件. 【 B 】

(3) 由 $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的图形在 $(0,1)$ 内

$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$

(A) 单调下降且向下凹. (B) 单调下降且向上凹.

(C) 单调上升且向下凹. (D) 单调上升且向上凹. 【 ~~A~~ 】 B

(4) 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域是 $(-8,8]$，则 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n(n-1)}$ 的收敛半径及 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{3n}$ 的收敛域分别是

(A) $8,(-2,2]$； (B) $8,[-2,2]$；

(C) 不定，$(-2,2]$； (D) $8,[-2,2)$. 【 】

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是四维非零列向量组，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，已知方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $k(1,0,2,0)^T$，则方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$. 【 】

(6) 设 $M_i(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 为 xoy 面上 n 个不同的点，令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & y_n & 1 \end{pmatrix}$，则点 M_1，$M_2,\cdots,M_n(n\geqslant 3)$ 在同一条直线上的充要条件是

(A) 秩($\boldsymbol{A}$) = 1.　　(B) 秩($\boldsymbol{A}$) = 2.

(C) 秩($\boldsymbol{A}$) = 3.　　(D) 秩($\boldsymbol{A}$) < 3.　　【　】

(7) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,其分布函数为 $F(x)$,随机变量 $Y=F(x)$,则 $P\{Y\leqslant \frac{1}{2}\}$ 的值

(A) 与参数 μ 和 σ 有关.　　(B) 与参数 μ 有关,但与 σ 无关.

(C) 与参数 σ 有关,但与 μ 无关.　　(D) 与参数 μ 和 σ 均无关.　　【　】

(8) 设随机变量 $X_1,\cdots,X_9$ 相互独立分布,$E(X_i)=1,D(X_i)=1,i=1,\cdots,9$. 令 $S_9=\sum_{i=1}^{9}X_i$,则对任意 $\varepsilon>0$,从契比雪夫不等式直接可得

(A) $P\left\{\left|\frac{1}{9}S_9-1\right|<\varepsilon\right\}\geqslant 1-\frac{9}{\varepsilon^2}$.

(B) $P\{|S_9-9|<\varepsilon\}\geqslant 1-\frac{9}{\varepsilon^2}$.

(C) $P\left\{\left|\frac{1}{9}S_9-1\right|<\varepsilon\right\}\geqslant 1-\frac{1}{\varepsilon^2}$.

(D) $P\{|S_9-9|<\varepsilon\}\geqslant 1-\frac{1}{\varepsilon^2}$.　　【　】

二、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分. 把答案填在题中横线上)

(9) 函数 $y=f(x)$ 在点(1,0)处有 $\Delta y=\Delta x+o(\Delta x)$,则极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_1^{e^x}f(t)dt}{\ln(1+x^2)}=$________.

(10) 设 $f(x,y)$ 为连续函数,且 $f(x,y)=x\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+y^2$,则 $f(x,y)=$________.

(11) 设 $u=\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$,则向量场 grad u 通过球面 $\sum:x^2+y^2+(z-\frac{R}{2})^2=R^2$ 向外的通量为________.

(12) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,且 $\int_0^{2x+3y+1}f(t)\mathrm{d}t=F(x,y)$,$L$ 为从原点到点(1,1)的任意简单光滑曲线,则积分 $\int_L f(2x+3y+1)(2dx+3dy)=$________.

(13) 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1)$,矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}$,且有 $\boldsymbol{A}^3+p\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{E}=0$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵,则微分方程 $y'''+py'+qy=0$ 的通解为________.

(14) 设某仪器有3只独立工作的同型号电子元件,其使用寿命X(单位:小时)均服从同一指数分布 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{600}e^{-\frac{x}{600}}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$,则该仪器在使用的最初200小时内,至少有1只电子元件损坏的概率为________.

三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分,解答应写出文字说明、证明过程演算步骤).

(15)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x,y)$ 可微,且 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-f$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f\left(0,y+\frac{1}{n}\right)}{f(0,y)}\right)^{n}=e^{\cot y}$, $f\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)=1$,求 $f(x,y)$.

(16)(本题满分 10 分)

试求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a^{2}}+\cdots+\dfrac{n}{a^{n}}\right)$,其中 $a>1$.

(17) (本题满分 10 分)

在密度为 1 的半球体 $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的底面接上一个相同材料的柱体 $-h \leqslant z \leqslant 0, x^2 + y^2 \leqslant R^2 (h > 0)$,为使整个立体 Ω 的重心恰好落在球心上.

问 h 为多少?并求该立体关于 z 轴的转动惯量.

(18) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 有连续导数,且 $f(0) = 1, g(0) = 0$, L 为平面上任意简单光滑闭曲线, L 围成的平面区域为 D. 已知 $\oint_L y[x - f(x)]dx + [yf(x) + g(x)]dy = \iint_D yg(x)d\sigma$,求函数 $f(x)$ 和 $g(x)$.