经全国中小学教材审定委员会2005年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学（选修3-3）

球面上的几何

SHUXUE

北京师范大学出版社

前　　言

你们将进入更加丰富多彩的数学世界.

你们将学到更多重要和有趣的数学知识、技能及应用.

你们将更多地感受到深刻的数学思想和方法.

你们将进一步体会数学对发展自己思维能力的作用，体会数学对推动社会进步和科学发展的意义，体会数学的文化价值.

你们正在长大，需要考虑自己未来的发展. 要学习的东西很多，高中数学的内容都是基础的，时间有限，选择能力是很重要的，你们需要抓紧时间选择发展的方向，选择自己感兴趣的专题，这是一种锻炼.

在高中阶段，学习内容是很有限的. 中国古代有这样的说法："授之以鱼，不如授之以渔"，学会打鱼的方法比得到鱼更重要. 希望同学们不仅关注别人给予你们的知识，更应该关注如何获得知识. 数学是提高"自学能力"最好的载体之一.

在数学中，什么是重要的（What is the key in Mathematics）？20世纪六七十年代，在很多国家都讨论了这个问题. 大部分人的意见是：问题是关键（The problem is the key in Mathematics）. 问题是思考的结果，是深入思考的开始，"有问题"也是创造的开始. 在高中数学的学习中，同学们不仅应提高解决别人给出问题的能力，提高思考问题的能力，还应保持永不满足的好奇心，大胆地发现问题、提出问题，养成"问题意识"和交流的习惯，这对你们将来的发展是非常重要的.

在学习数学中，有时会遇到一些困难，树立信心是最重要的. 不要着急，要有耐心，把基本的东西想清楚，逐步培养自己对数学的兴趣，你会慢慢地喜欢数学，她会给你带来乐趣.

本套教材由26册书组成：必修教材有5册；选修系列1有2册，选修系列2有3册，它们体现了发展的基本方向；选修系列3有6册，选修系列4有10册，同学们可以根据自己的兴趣选修其中部分专题. 习题分为三类：一类是可供课堂教学使用的"练习"；一类是课后的"习题"，分为A，B两组；还有一类是复习题，分为A，B，C三组.

研究性学习是我们特别提倡的. 在教材中强调了问题提出、抽象概括、分析理

解，思考交流等研究性学习过程. 另外，还专门安排了“课题学习”和“探究活动”.

“课题学习”引导同学们递进地思考问题，充分动手实践，是需要完成的部分.

在高中阶段，根据课程标准的要求，学生需要至少完成一次数学探究活动，在必修课程的每一册书中，我们为同学们提供的“探究活动”案例，同学们在教师的引导下选做一个，有兴趣也可以多做几个，我们更希望同学们自己提出问题、解决问题，这是一件很有趣的工作.

同学们一定会感受到，信息技术发展得非常快，日新月异，计算机、数学软件、计算器、图形计算器、网络都是很好的工具和学习资源，在条件允许的情况下，希望同学们多用，“技不压身”. 它们能帮助我们更好地理解一些数学的内容和思想. 教材中有“信息技术建议”，为同学们使用信息技术帮助学习提出了一些具体的建议；还有“信息技术应用”栏目，我们选取了一些能较好体现信息技术应用的例子，帮助同学们加深对数学的理解. 在使用信息技术条件暂时不够成熟的地方，我们建议同学们认真阅读这些材料，对相应的内容能有所了解. 教材中信息技术的内容不是必学的，仅供参考.

另外，我们还为同学们编写了一些阅读材料，供同学们在课外学习，希望同学们不仅有坚实的知识基础，而且有开阔的视野，能从数学历史的发展足迹中获取营养和动力，全面地感受数学的科学价值、应用价值和文化价值.

我们祝愿同学们在高中数学的学习中获得成功.

严士健 王尚志

目　　录

第一章　球面的基本性质

人类生活在地球上，地球的表面非常接近于一个球面. 在科学技术不太发达的时代，人类的活动范围非常有限. 很自然地，人们把大地理解成一个平面，在测量土地、计算面积时用平面几何知识就可以了. 当航海技术发展起来以后，人们逐渐地了解到大地不是一个平面，仍然使用平面几何的知识来计算航海路线将会产生很大的误差. 因此，人们需要了解球面几何图形的性质，即球面几何的知识来解决这个问题. 除了航海，在大地测量、天体观测、航空以及卫星定位等各方面都需要利用球面几何的知识. 与平面一样，球面上也有很多有趣的几何问题，本章将介绍球面的一些基本性质.

说　明

本专题课程并不要求在学过“立体几何初步”之后开设，如果没有学习过“立体几何初步”而开设了本专题，可补充附录1的内容.

§1　直线、平面与球面的位置关系

我们生活的地球基本上可以看成是一个半径为 6.4×10^3 km 的球体. 从北京到与北京同一纬度的嘉峪关，怎么飞行最近呢？是不是沿着 $40°$纬线飞行呢？

空间中到一个定点的距离等于常数的所有点的集合，称为一个**球面**. 这个定点叫作球面的**球心**，以球心和球面上任意一点为端点的线段叫作球面的**半径**. 显然，半径的长度就是已知常数. 为了简便，也常常把半径的长度叫作半径. 半径等于1的球面，称为**单位球面**.

信息技术建议

通过计算机信息技术可以很方便地画出球面的直观图，具体步骤见§1中的“信息技术应用”栏目.

在平面几何的学习中，我们知道直线与圆有三种位置关系：相离、相切和相交（如图1-1）.

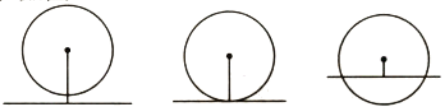


图 1-1

问题提出

直线与球面有哪些位置关系？平面与球面有哪些位置关系？

设 S 是以 O 为球心，半径为 R 的球面，l 是一条直线. 作 $OP\perp l$，垂足为 P.

(1) 当 $OP>R$ 时，直线 l 与球面 S 相离（如图 1-2(a)）；

(2) 当 $OP=R$ 时，直线 l 与球面 S 相切（如图 1-2(b)）；

(3) 当 $OP<R$ 时，直线 l 与球面 S 相交（如图 1-2(c)）.

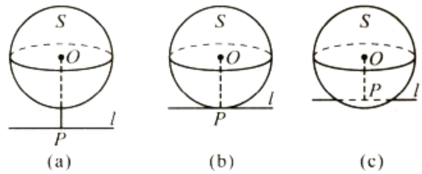


图 1-2

思考交流

已知球面 S 和空间直线 l，P 为球面上任意一点，如果 P 绕直线 l 旋转任意角度后还在球面 S 上，那么直线 l 与球面 S 有什么位置关系？

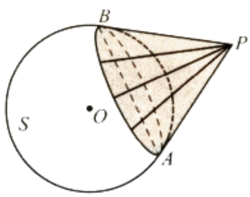


图 1-3

如果直线 l 与球面 S 相切，它们有唯一公共点，称为**切点**.

直线与球面相切有以下性质：

过球面外一点 P 作球面的切线，所有的切线段长度相等，它们构成一个圆锥面（如图 1-3 所示）.

如果直线与球面相交，则它们交于两点. 当直线经过球心时，这两个交点称为**对径点**.

关于直线与球面相交的关系，有一个非常有趣的定理——**球幂定理**.

为了证明球幂定理，先来看一个平面几何中类似的定理——**圆幂定理**.

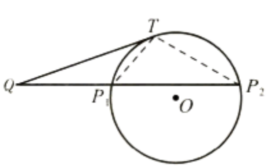


图 1-4

定理 1.1（圆幂定理）　从圆外一点 Q 向 $\odot O$ 引任一割线交 $\odot O$ 于两点 P_1，P_2，则线段 QP_1 和 QP_2 的长度乘积等于从点 Q 引 $\odot O$ 的切线 QT 长度的平方，其中 T 为切点.

证明　如图 1-4，连接 TP_1 和 TP_2，则$\triangle QTP_1 \backsim \triangle QP_2T$，因此，

$$\frac{QT}{QP_1}=\frac{QP_2}{QT}.$$

所以
$$QT^2=QP_1\cdot QP_2.$$

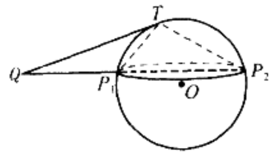


图 1-5

利用圆幂定理，很容易证明球幂定理.

定理 1.2(球幂定理)　(如图 1-5)**从球面外一点 Q 向球面引割线，交球面于 P_1，P_2 两点，再从 Q 引球面的任一切线，切点为 T，则**

$$QT^2=QP_1\cdot QP_2.$$

设 S 是以 O 为球心，半径为 R 的球面，α 是一个平面. 作 $OP\perp\alpha$，P 是垂足(如图 1-6 所示).

(1) 当 $OP>R$ 时，平面 α 与球面 S 相离(如图 1-6(a))；

(2) 当 $OP=R$ 时，平面 α 与球面 S 相切(如图 1-6(b))；

(3) 当 $OP<R$ 时，平面 α 与球面 S 相交(如图 1-6(c)).

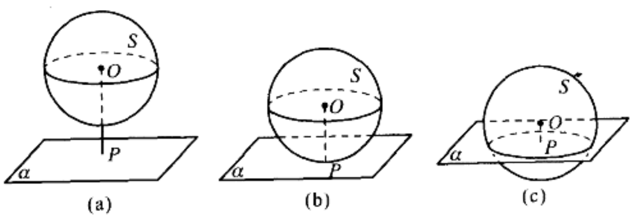


图 1-6

如果平面 α 与球面 S 相切，则它们有唯一的公共点，称为**切点**.

在平面几何中，如果一条直线与一个圆相切，那么圆心到切点的连线与该直线垂直.

类似地，在球面几何中有如下的定理：

定理 1.3　若平面 α 与球面 S 相切于 P 点，O 是 S 的球心，则 $OP\perp\alpha$.

如果平面 α 与球面 S 相交，它们有多少公共点？这些公共点构成什么图形？

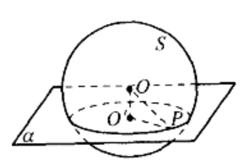


图 1-7

如图 1-7，设 P 是平面 α 与球面 S 的一个交点，从球心 O 作平面 α 的垂线 OO'，垂足为 O'. 连接 OP 和 $O'P$，由勾股定理，

$$O'P=\sqrt{OP^2-OO'^2}.$$

当球面 S 与平面 α 给定后，OP，OO' 都是常数，所以 $O'P$ 也是常数，即平面 α 与球面 S 的交线是以 O' 为圆心，半径等于 $\sqrt{R^2-OO'^2}$ 的

圆，其中 R 为球面 S 的半径.

抽象概括

若平面与球面相交，则它们的交线是一个圆.

显然，如果平面与球面的相对位置不同，它们相交所得圆的位置和大小也不同.

不难看出，当平面过球心时，所得的圆最大，这时圆的半径就是球面的半径. 我们把这种圆叫作球面的**大圆**，其他情形所得的圆叫作球面的**小圆**.

思考交流

1. 球面上任意两个大圆一定相交吗？相交的话，交于几点？它们是对径点吗？

2. 过球面上不是对径点的任意两点，可以作几个大圆？过对径点有几个大圆？

例　在平面内，一条直线把平面分成 2 部分，两条相交直线把平面分成 4 部分，三条直线最多把平面分成 7 部分. 试问：把平面换成球面，把平面直线换成球面上的大圆，结论是否成立？

解　球面上的一个大圆把球面分成 2 部分；

球面上的 2 个大圆一定相交，它们把球面分成 4 部分；

球面上的 3 个大圆最多可以把球面分成 8 部分(如图 1-8).

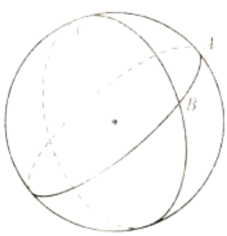


图 1-8

信息技术应用

利用几何画板作球面的直观图

步骤：

1. 打开几何画板，新建画板. 以点 O 为圆心，OP 为半径作 $\odot O$ 表示球面的正视图.

2. 作球面上过两点的大圆：

(1) 在 $\odot O$ 内任意取一点 A，$\odot O$ 上取一点 B，使得 A,O,B 不共线，根据球面大圆的定义，由 A,B 两点可以确定一个大

圆. 球面直观图的关键是用椭圆表示这个大圆.（如图1-9 所示）

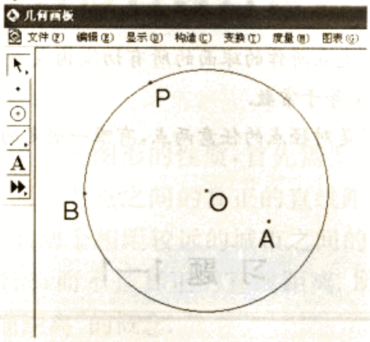


图 1-9

(2) 作过点 A,B，以点 O 为中心，B 点为长轴上一个端点的椭圆，表示球面上由 A,B 两点确定的大圆.（如图 1-10 所示）

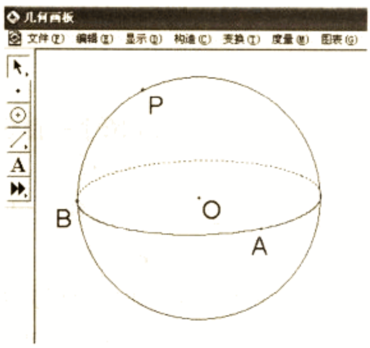


图 1-10

3. 拖动点 A 或 B，可以观察不同状态下的球面直观图.（如图1-11 所示）

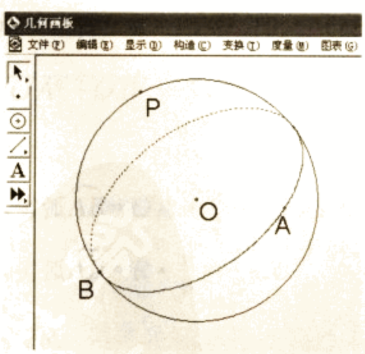


图 1-11

练 习

1. 证明：过球面外一定点所作的球面的所有切线构成一个圆锥面，且这个点到所有切点的距离等于常数.
2. 证明：过球面上不是对径点的任意两点，有唯一确定的大圆.

习 题 1—1

1. 设球面半径为 1，小圆所在平面与球心的距离为 $d(d<1)$，求小圆半圆的弧长.
2. 证明球幂定理.

§2　球面直线与球面距离

为了研究球面上几何图形的性质，首先需要确定球面上两点之间的距离. 显然，球面上两点之间的真正的直线距离是毫无意义的. 比如在地球上要说明两个相距较远的城市之间的距离，一定是通过地球表面进行测量的，而不是真正的直线距离. 所以我们必须给出“球面直线”和“球面距离”的概念.

说　明

经线是过地球南北极的大圆的一半，它们以南极和北极为端点. 国际上，以过格林尼治天文台的经线为 0°经线，向东叫东经，向西叫西经. 与赤道平行的平面上的小圆叫作纬线.

球面上一点的纬度是球心与该点的连线与赤道平面的夹角. 赤道以北叫北纬，赤道以南叫南纬.

球面上一点的经度是过该点的经线所在平面与过格林尼治天文台的经线所在平面的夹角.

问题提出

给定球面上的两点 A,B，球面上以这两点为端点的曲线段哪一条最短?

首先，我们来分析一个例子.

例 1　设地球上 A,B 两点位于北纬 45°，过它们的经线的交角为 90°，球心为 O，北纬 45°纬线的圆心为 O'，求：

(1) 过 A,B 两点的小圆劣弧长，即纬线上的弧长；

(2) 过 A,B 两点的大圆劣弧长，并比较两者的结果.

解　如图 1-12 所示，设地球半径为 R. 因为 A,B 两点位于北纬 45°，所以，$OO'=R\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}R$，$O'A=O'B=\frac{\sqrt{2}}{2}R$. 又因为过 A,B 两点的经线的交角为 90°，所以 $AO'\perp BO'$，即$\angle AO'B=\frac{\pi}{2}$.

因此，$AB=\sqrt{O'A^2+O'B^2}=R$，即三角形 AOB 为正三角形，$\angle AOB=\frac{\pi}{3}$.

(1) 在小圆中，劣弧$\overset{\frown}{AB}=O'A\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi R$；

(2) 在大圆中，劣弧$\overset{\frown}{AB}=R\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{1}{3}\pi R$.

所以，$\frac{\sqrt{2}}{4}\pi R>\frac{1}{3}\pi R$.

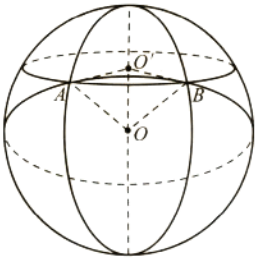


图 1-12

动手实践

(1) 准备一条足够长的细绳，一枝铅笔和一个皮球.

(2) 给定皮球上两点，画出过这两点的大圆的劣弧，过这两点再另外画一条曲线，分别用细绳丈量，比较它们的长短.

(3) 最后请同学们相互交流.

实际上，对于球面上的任意两点，在数学上可以严格证明过这两点的大圆的劣弧长度是最短的. 应该把大圆上这段劣弧的长度看作是这两点的距离.

在平面几何中，A，B 两点之间的距离等于以 A，B 为端点的线段的长度. 由上看出，球面上的大圆起了平面上直线的作用. 所以，可以说大圆就是球面上的“直线”.

定义 2.1　过球面上两点 A，B 的大圆叫作过 A，B 两点的球面直线. 过球面上两点 A，B 的大圆的劣弧$\overset{\frown}{AB}$叫作连接 A，B 两点的线段.

性质 1　**过球面上任意两个非对径点有唯一一条直线；过球面上任意两个非对径点有唯一一条线段.**

性质 2　**球面上任意两条直线都相交.**

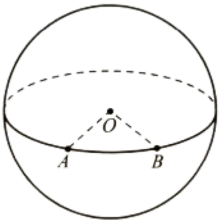


图 1-13

定义 2.2　球面上两点 A，B 的球面距离，是通过 A，B 两点的大圆上以 A，B 为端点的劣弧的长度，记为 $d(A,B)$.

如图 1-13 所示，通过 A，B 两点的大圆是在 A，B 和球心 O 所确定的平面上，以 O 为圆心，半径等于球面半径 R 的圆. 连接 OA，OB，则劣弧$\overset{\frown}{AB}$所对的中心角为$\angle AOB$.

我们约定，在球面几何中，角度的单位一律用“弧度”.

因此，得到球面上两点的球面距离公式：

$$d(A,B)=R\cdot\angle AOB.$$

当 S 为单位球面时，$d(A,B)=\angle AOB$.

我们不难看出，球面上两点 A，B 与它们的对径点 A'，B'在同一平面上，利用平面三角形全等的性质容易得到 $d(A,B)=d(A',B')$.

性质 3　**球面上两点 A，B 的球面距离 $d(A,B)$ 等于它们的对径点 A'，B'的球面距离 $d(A',B')$.**

例 2　已知北京天安门位于北纬 39°56′、东经 116°20′，问：天安门到北极和南极的距离分别是多少？（地球半径约等于 6.4×10^3 km）

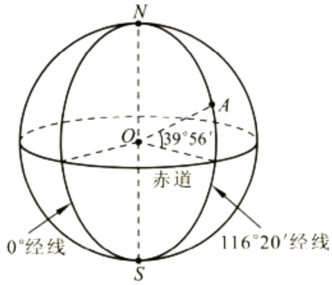


图 1-14

解　如图 1-14 所示，设点 A 为天安门所在位置，因为 NS 垂直赤道平面，所以

$$\angle AON = 90° - 39°56' = 50°04' \approx 0.28\pi,$$
$$\angle AOS = 180° - 50°04' = 129°56' \approx 0.72\pi.$$

又已知地球半径约等于 6.4×10^3 km，所以

$$AN \approx 6.4\times10^3\times0.28\pi \approx 5.6\times10^3(\text{km});$$
$$AS \approx 6.4\times10^3\times0.72\pi \approx 1.4\times10^4(\text{km}).$$

即天安门到北极的距离约为 5.6×10^3 km，天安门到南极的距离约为 1.4×10^4 km.

思考交流

平面几何中直线与直线之间的位置关系与球面几何中直线与直线之间的位置关系有何区别？

我们把地球近似地看作一个球体，在地球表面上有赤道、南极、北极，我们用 c 表示赤道，S 表示南极，N 表示北极.（如图 1-15）

S 和 N 是一对对径点，连接 S 和 N 得到地球的一条直径 SN，SN 与赤道 c 所在平面垂直.

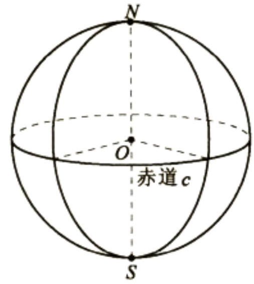


图 1-15

抽象概括

一般地，设 c 是球面 S 上的一个大圆，则在球面 S 上存在一对对径点 P 和 P'，使得直径 PP' 垂直大圆 c 所在平面. 我们把对径点 P 和 P' 叫作大圆 c 的**极点**.

设 P 是球面 S 上任意一点，P' 是它的对径点，那么存在唯一一个大圆 c，使得 P 和 P' 是大圆 c 的极点，我们把大圆 c 叫作点 P 的**极线**.

极点和极线的概念是球面几何中最基本的概念，在后面的学习中经常用到.

练　习

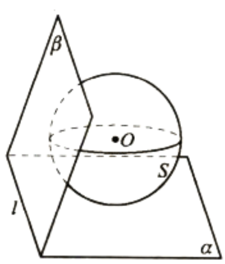
1. 证明性质 3.
2. 证明：过球面上 A，B 两点的小圆劣弧大于过 A，B 两点的大圆劣弧.

习 题 1—2

A　组

1. 球面上两点之间的距离的最大值是多少？
2. 地球赤道上一点到北极的距离是多少？地球赤道上一点到南极的距离是多少？
3. 证明：在单位球面上，设 B，C 是非对径点，如果 $d(A,B)=\frac{\pi}{2}$，$d(A,C)=\frac{\pi}{2}$，那么 A 是过 B，C 两点的大圆的极点.

B　组



（第 1 题）

1. 如图，设 S 是一个单位球面，l 是一条直线，球心 O 到直线 l 的距离为 2. 平面 α 和平面 β 过直线 l 且与球面 S 相切. 求平面 α 和平面 β 构成的二面角的平面角.
2. 请把平面与球面的基本概念和基本性质作一个对比，谈谈你对平面与球面性质的认识.

复习题一

A　组

1. 证明：大圆 c 的极点 P（或 P'）到大圆 c 上各点的距离都等于 $\frac{\pi}{2}R$，其中 R 为球面半径.
2. 已知球面上一个大圆，如何作出它的极点；已知球面上一个点 P，如何作出它的极线.
3. 设 A,B 是地球赤道上两点，过它们的经线的夹角为 $60°$，求它们之间的球面距离.

B　组

1. 已知上海位于北纬 $31°14'$、东经 $121°29'$，求上海到南极、北极的距离.
2. 在球面 S 上，设点 P 是大圆 c 的极点. 证明：过 P 的任何大圆的极点在 c 上.

第二章 球面上的三角形

在平面几何中，我们知道三角形是最基本、最重要的几何图形，对许多图形的研究都可以转化为对三角形的研究. 同样，在球面上，球面三角形也是最基本、最重要的几何图形. 本章主要研究球面三角形的性质和全等定理.

§1 球面三角形

在地球表面上，过北京和上海两地的经线的夹角是多少？

以格林尼治天文台所在经线为 0°经线，北京所在的时区为东八区（即比格林尼治时间早 8 个小时），你知道在西八时区中有哪些主要城市吗？

说 明

为表述简单清晰，从本节开始，如果没有特别说明，所讨论的球面都是单位球面.

1.1 球面上两直线的交角

首先回顾一下平面内关于“角”的定义.

过平面上一点 A 的两条射线 AB，AC 所形成的图形叫作**角**，记成$\angle BAC$.（如图 2-1(a)）

过平面上一点 A 的两条直线，可以形成 4 个角. 一般规定，两条直线的夹角为不大于 90°的角.（如图 2-1(b)）

在平面几何中，一般不区分角和角的大小，都用同一个记号，比如在三角形 ABC 中，$\angle BAC$ 既表示角，也表示角的大小.（如图 2-1(c)）

从球面 S 上的一点出发的两条大圆半弧所构成的图形叫作**球面角**. 这个点叫作球面角的顶点，两条大圆半弧叫作球面角的边.