遍历论

孙文祥 著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

遍　历　论

孙文祥　著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

遍历论/孙文祥著. —北京: 北京大学出版社, 2012. 9
ISBN 978-7-301-17487-6

Ⅰ. ①遍… Ⅱ. ①孙… Ⅲ. ①遍历定理 Ⅳ. ① O177.99

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 200596 号

书　　名: 遍历论
著名责任者: 孙文祥　著
责 任 编 辑: 尹照原
标 准 书 号: ISBN 978-7-301-17487-6/O·0885
出 版 发 行: 北京大学出版社
地　　址: 北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址: http://www.pup.cn　电子邮箱: zpup@pup.pku.edu.cn
电　　话: 邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021
　　　　　出版部 62754962
印　刷　者: 北京大学印刷厂
经　销　者: 新华书店
　　　　　890 毫米×1240 毫米　A5　7.125 印张　205 千字
　　　　　2012 年 9 月第 1 版　2012 年 9 月第 1 次印刷
定　　价: 25.00 元

前　言

遍历论是一个数学分支, 研究具有不变测度的动力系统的相关课题. 遍历论可以追溯到 19 世纪中叶, 那个时期的 Boltzmann 的众多遍历假设可以抽象地描述为: 孤立力学系统的几乎所有运动轨道其时间平均等于空间平均. Boltzmann 的遍历假设是统计力学的基础. 20 世纪 30 年代建立的遍历定理则从数学上严格证明了时间平均等于空间平均的基本事实. 在遍历定理建立之后, 遍历论有了巨大发展. 下面我们稍微详细地介绍一下遍历论.

用 X 表示一个具有一定数学结构的状态空间, 如可测空间、拓扑空间、微分流形等. X 中的元素称为状态点. 考虑一个一一对应的映射 (既满的且单的映射) $T: X \to X$, $x \mapsto T(x)$. 记 T^{-1} 为 T 的逆映射, 它满足 $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = \mathrm{id}$, 这里 id 为恒同映射: $\mathrm{id}(x) = x$, $\forall x \in X$. 本书中用 $\mathbb{N}$ 表全体正整数所成之集, 用 $\mathbb{Z}$ 表全体整数所成之集. 记

$$T^n = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{n}, \quad T^0 = \mathrm{id}, \quad T^{-n} = \underbrace{T^{-1} \circ T^{-1} \circ \cdots \circ T^{-1}}_{n}, \ n \in \mathbb{N},$$

则称映射序列 $\{T^n\}_{-\infty}^{+\infty}$ 为定义在状态空间 X 上的离散动力系统, 简称动力系统. 注意到对每个 $n \in \mathbb{Z}$, T^n 均可由 T (或者它的逆 T^{-1}) 经迭代给出, 人们也称映射 $T: X \to X$ 为离散动力系统, 或简称动力系统. 有时将此动力系统表述为 (X, T). 对于状态点 $x \in X$, 集合 $\mathrm{Orb}(x, T) = \{T^n x \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 称为它的轨道. 动力系统的定性理论主要研究状态点的轨道结构.

不妨把我们考虑的对象更限制一些, 即设 X 为拓扑空间, T 为连续的一一对应的映射, 且 T^{-1} 也连续. 依照拓扑学中的术语, 称 T 为连续同胚, 简称同胚. 人们称 (X, T) 为离散拓扑动力系统, 简称拓扑动力系统或动力系统. 如果某个状态点 x 其轨道 $\mathrm{Orb}(x, T)$ 在 X 中稠密, 即 $\overline{\mathrm{Orb}(x, T)} = X$ (稠密的概念需要状态空间的拓扑), 则 X 中的状态点可由 $\mathrm{Orb}(x, T)$ 中的状态点无限逼近. 换言之, 轨道 $\mathrm{Orb}(x, T)$ 逼近

空间 X 中的所有状态点, 是极限意义下遍历所有状态的轨道, 是一种所谓的遍历轨道. 本书正文中我们将看到, 遍历轨道的概念可以在一般的概率系统 (在那里 X 不一定具有拓扑, T 不一定连续) 中引进, 其定义的方式和这里有所不同. 我们将看到, 在一些动力系统中, "几乎所有" 轨道都是遍历的. 遍历论是用拓扑的和统计的方法研究几乎所有状态点 (包含了所有 "重要" 的状态点, 其轨道可以是遍历的也可以不是遍历的) 的轨道结构. "遍历", "几乎所有" 这些术语在本书正文中都会有确切定义.

本书中用 $\mathbb{R}$ 表实数集. 如果一个连续映射 $\phi: X\times\mathbb{R}\to X$, $(x,t)\to\phi(x,t)$ 满足: (i) $\phi(x,0)=x$, $\forall x\in X$; (ii) $\phi(\phi(x,s),t)=\phi(x,s+t)$, $\forall x\in X$, $\forall s,t\in\mathbb{R}$, 则称 ϕ 为一个连续动力系统, 或简称为一个流. 对连续动力系统或流也可以讨论遍历理论. 对每个固定的时间 t, 称 ϕ_t 为流 ϕ 的时间 t 映射, 即 $\phi_t: X\to X$ 形成一个离散动力系统. 一般地, 离散系统 ϕ_t (此时 t 固定) 比流 ϕ 处理起来要简单些. 在遍历理论的一些课题中, 对离散动力系统 ϕ_t 成立的结论能够平行地推广到流 ϕ, 因而只就离散动力系统作讨论; 在另外的一些课题中, 两者的差别很大, 因而将离散动力系统和流分别讨论.

如果我们限制 X 为微分流形, $T: X\to X$ 为微分同胚, 即 T 为一一对应的映射且 T 和 T^{-1} 都是可微分的映射, 则 (X,T) 叫做 (离散的) 微分动力系统. 类似地, 可以定义连续的微分动力系统或可微流. 微分动力系统的遍历理论叫做微分遍历论. 微分遍历论之于基本的遍历论 (或者叫做拓扑遍历论) 的特色在于微分结构和线性化方法, 进而得到更丰富的成果. 本书仅介绍基本的遍历论, 简称遍历论.

Birkhoff 遍历定理是遍历论的一个基本重要定理. 它指出, 在遍历的动力系统中, 一个可积函数沿着几乎每一条轨道的时间平均都等于这个函数的空间平均. 在依据 Birkhoff 遍历定理为基础的重要成果中, 有一个被称为乘法遍历定理, 它已经成为微分遍历论的基本重要定理.

遍历论的一个辉煌成果是熵理论. 它用取自 $[0,\infty]$ 的数字 (这里不妨把 ∞ 也称为"数字") 来表示一个概率系统 (保持一个概率测度的动力系统) 或拓扑动力系统的运动复杂程度. 概率系统有测度熵理

论, 拓扑动力系统有拓扑熵理论, 两个理论由变分原理紧密联系.

一般而言, 遍历论是处理随时间演化的系统 (动力系统) 的动力学性质的强有力的综合性方法, 不仅惠及数学的相关学科, 而且对物理学, 生物学, 化学, 经济学等有重要应用.

北京大学数学科学学院研究生的遍历论课程已经开设多年. 本书即由这个课程的讲义整理而成, 需用一个学期的时间讲授. 目前, 已有几本遍历论的英文教材, 如 P. Walters 的 *An introduction to ergodic theory*, M. Pollicott 和 M. Yuri 的 *Dynamical systems and ergodic theory* 等. 读者可以参考这些教材. 本书注重于遍历理论的基本定理, 基础知识, 基本技术和重要应用, 也适当介绍了最新研究成果, 力图兼顾普遍性与专门化. 本书共有 8 章, 第 1 章介绍预备知识; 第 7 章介绍流的熵理论, 相对独立; 第 2, 3, 4, 5, 6, 8 章分别介绍了 Birkhoff 遍历定理, 测度熵理论, Shannon-McMillan-Breiman 定理, 拓扑熵理论, 变分原理, 遍历分解定理, 拓扑压理论等遍历论的基本知识.

北京大学数学科学学院研究生在使用本教材时提出过许多很好的意见和建议, 周云华博士承担了将讲义打字编排成书的工作, 廖刚博士为习题给出提示. 在此, 向他们诚挚地表达我的谢意!

孙文祥

2012 年 3 月

于北京大学数学科学学院

目　录

第 1 章　预 备 知 识

本章作为预备知识, 主要介绍测度论的一些基础知识, 包括 σ 代数与测度, 可测函数与积分等.

§1.1　σ 代数与测度

1.1.1　概率空间的定义

定义 1.1.1　设 X 是一个集合. 考虑由 X 的一些子集构成的集类 $\mathcal{B}$. 称 $\mathcal{B}$ 为 **σ 代数**, 如果它满足下面三个条件:

(i) $X \in \mathcal{B}$;

(ii) $B \in \mathcal{B}$ 蕴涵 $X \setminus B \in \mathcal{B}$;

(iii) $B_n \in \mathcal{B}\,(n \in \mathbb{N})$ 蕴涵 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}$.

换言之, σ 代数是包含全集合 X, 且对取余的运算, 可数并运算以及可数交运算均封闭的集类. 我们称 $(X, \mathcal{B})$ 为**可测空间**, 称 $\mathcal{B}$ 中的元素为**可测集**.

定义 1.1.2　$(X, \mathcal{B})$ 上的**概率测度** (本书中简称为**测度**) 是指一个函数 $m : \mathcal{B} \to [0, 1]$, 它满足下面三个条件:

(i) $m(\varnothing) = 0$;

(ii) $m(X) = 1$;

(iii) 若 $\{B_n\}_1^{\infty} \subset \mathcal{B}$ 为互不相交的子集序列时, 则

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n).$$

我们称 $(X, \mathcal{B}, m)$ 为**概率测度空间**. 如果去掉 $m(X) = 1$ 的限制, 则称 $(X, \mathcal{B}, m)$ 为**有限测度空间**.

本书一般考虑概率测度空间, 简称**测度空间**或**概率空间**.

例 1.1.1　$2^X = \{A \subset X\}$ 是 σ 代数. 对取定的一点 $x \in X$, 令 $\delta_x : 2^X \to [0,1]$,

$$\delta_x(B) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \in B \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } x \notin B \text{ 时}, \end{cases}$$

则 δ_x 是一个测度. 我们称 δ_x 为 x 点的**点测度**. $(X, 2^X, \delta_x)$ 是一个概率空间.

构造可测空间通常分两步: 先选取 X 的一些 (就某种目的而言) 感兴趣的子集, 之后再考虑能包含这些子集合的最小 σ 代数. 这样做是合理的, 因为首先 2^X 总是一个 σ 代数, 其次任意多个 σ 代数之交仍是 σ 代数.

定义 1.1.3　由 X 的一些子集构成的集类 $\mathcal{S}$ 称为**半代数**, 如果它满足下面三个条件:

(i) $\varnothing \in \mathcal{S}$;

(ii) $A, B \in \mathcal{S}$ 蕴涵 $A \cap B \in \mathcal{S}$;

(iii) 若 $A \in \mathcal{S}$, 则 $X \setminus A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$, 其中 $E_1, \cdots, E_n \in \mathcal{S}$ 两两不相交, $n \in \mathbb{N}$.

定义 1.1.4　由 X 的一些子集构成的集类 $\mathcal{A}$ 称为**代数**, 如果它满足下面三个条件:

(i) $\varnothing \in \mathcal{A}$;

(ii) $A, B \in \mathcal{A}$ 蕴涵 $A \cap B \in \mathcal{A}$;

(iii) 若 $A \in \mathcal{A}$, 则 $X \setminus A \in \mathcal{A}$.

一个 σ 代数自然满足代数的各条公理, 而代数也自然是半代数.

定义 1.1.5　一个函数 $\tau : \mathcal{S} \to [0,1]$ 是**有限可加**的, 如果

(i) $\tau(\varnothing) = 0$;

(ii) 若 $\{B_i\}_1^n \, (B_i \in \mathcal{S})$ 为互不相交的子集序列, 且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i \in \mathcal{S}$ 时, 有

$$\tau\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \tau(B_i).$$

称 τ 为**可数可加**的, 如果上述的条件 (ii) 置换成下面的条件: 若

$\{B_i\}_1^\infty(B_i \in \mathcal{B})$ 为互不相交的子集序列, 且 $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{S}$ 时, 有

$$\tau\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \tau(B_i).$$

自然, 可数可加性质蕴涵有限可加性质. 对定义在代数 $\mathcal{A}$ 或 σ 代数 $\mathcal{B}$ 上的非负函数, 可以类似定义有限可加性及可数可加性. 概率空间 $(X, \mathcal{B}, m)$ 中的测度 m 是定义在 σ 代数 $\mathcal{B}$ 上的可数可加函数.

1.1.2 概率空间的形成

在集合 X 上给定一个半代数 $\mathcal{S}$ 和一个有限可加 (或可数可加) 函数 $\tau : \mathcal{S} \to [0,1]$. 现在讨论如何扩张成一个概率空间. 将包含 $\mathcal{S}$ 的所有代数做交集, 则得到包含 $\mathcal{S}$ 的最小代数, 记成 $\mathcal{A}(\mathcal{S})$. 将包含代数 $\mathcal{A}$ 的所有 σ 代数做交集, 则得到包含 $\mathcal{A}$ 的最小 σ 代数, 记成 $\mathcal{B}(\mathcal{A})$.

定理 1.1.1 设 $\mathcal{S}$ 为 X 的一些子集合构成的半代数, 则 $\mathcal{S}$ 生成的代数 $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ 恰由 X 中所有这样的子集组成, 即每个子集均能表示成 $\mathcal{S}$ 中有限个互不相交元素之并:

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \left\{ E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \,\middle|\, E_i \in \mathcal{S},\ E_1, \cdots, E_n \text{互不相交},\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

证明 记

$$\mathcal{E} = \left\{ E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \,\middle|\, E_i \in \mathcal{S},\ E_1, \cdots, E_n \text{互不相交},\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

首先验证 $\mathcal{E}$ 满足代数定义的三条公理. 第 (i) 条是显然成立的. 设 $E = \bigcup_{i=1}^{m} E_i$, 这里 $E_1, \cdots, E_m$ 均属于 $\mathcal{S}$ 且互不相交, 再设 $F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$, 其中 $F_1, \cdots, F_n$ 均属于 $\mathcal{S}$ 且互不相交, 则

$$E \cap F = \bigcup_{\substack{i=1,,2,\cdots,m \\ j=1,2,\cdots,n}} (E_i \cap F_j)$$

为 $\mathcal{S}$ 中元素 $E_i \cap F_j$ 的不交并, 因而第 (ii) 条公理满足. 为证 (iii), 先由半代数定义把 $X = X \backslash \varnothing$ 表示为有限个不交元素的并 $X = \bigcup_{j=1}^{\ell} D_j$,

$D_j \in \mathcal{S}$. 则

$$X \setminus E = \bigcup_{j=1}^{\ell} \left(D_j \setminus \bigcup_{i=1}^{m} E_i \right) = \bigcup_{j=1}^{\ell} \left(\bigcap_{i=1}^{m} (D_j \setminus E_i) \right).$$

由半代数的公理有

$$X \setminus E_i = \bigcup_{r=1}^{p} G_r,$$

其中 $G_1, \cdots, G_p$ 均属于 $\mathcal{S}$ 且两两不交. 于是

$$D_j \setminus E_i = D_j \cap (X \setminus E_i) = D_j \cap \left(\bigcup_{r=1}^{p} G_r \right) = \bigcup_{r=1}^{p} (D_j \cap G_r),$$

这里 $D_j \cap G_r \in \mathcal{S}$, 进而 $D_j \setminus E_i \in \mathcal{E}$. 因为 $\mathcal{E}$ 已经满足代数公理 (ii), $\bigcap_{i=1}^{m} (D_j \setminus E_i) \in \mathcal{E}$, 注意到当 $j_1 \neq j_2$ 时 $D_{j_1} \neq D_{j_2}$, 于是 $X \setminus E$ 为 $\mathcal{S}$ 中有限个不交元素之并. 故代数公理的第 (iii) 条也满足. 至此证明 $\mathcal{E}$ 是代数且包含 $\mathcal{S}$.

然后证明 $\mathcal{E}$ 为包含 $\mathcal{S}$ 的最小代数. 设 $\mathcal{A}$ 为一个包含 $\mathcal{S}$ 的代数. 任取 $E = \bigcup_{i=1}^{m} E_i \in \mathcal{E}$, 其中 $E_1, \cdots, E_m$ 属于 $\mathcal{S}$ 且互不相交. 由 $X \setminus E_i \in \mathcal{A}$ 知

$$X \setminus E = \bigcap_{i=1}^{m} (X \setminus E_i) \in \mathcal{A}.$$

由此可得出 $E = X \setminus (X \setminus E) \in \mathcal{A}$, 即 $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$. □

定理 1.1.2 设 $\mathcal{S}$ 为 X 的一些子集合构成的半代数. $\tau : \mathcal{S} \to [0, 1]$ 是一个有限可加 (可数可加) 函数, 则存在唯一的有限可加 (可数可加) 函数 $\tau_1 : \mathcal{A}(\mathcal{S}) \to [0, 1]$, 满足 $\tau_1(B) = \tau(B), \quad B \in \mathcal{S}$.

证明 任取定 $E \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$, 则 $E = \bigcup_{i=1}^{m} E_i$, 其中 $E_1, \cdots, E_m$ 均属于 $\mathcal{S}$ 且互不相交. 定义 $\tau_1(E) = \sum_{i=1}^{m} \tau(E_i)$.

如果 $E = \bigcup_{j=1}^{n} F_j$, 其中 $F_1, \cdots, F_n$ 均属于 $\mathcal{S}$ 且互不相交, 则

$$E = \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{i=1}^{m} (E_i \cap F_j),$$

进而由 τ 的可加性知

$$\tau_1(E) = \sum_{j=1}^{n} \tau(F_j).$$

这表明 τ_1 的定义是合理的.

τ_1 的可加性由定义直接验证. τ_1 显然是 τ 的扩充. 下面验证这是唯一的扩充. 事实上, 假如 $\tau' : \mathcal{A}(\mathcal{S}) \to [0,1]$ 也是 τ 的扩充. 任取定 $E = \bigcup_{i=1}^{m} E_i$, 其中 $E_1, \cdots, E_m$ 均属于 $\mathcal{S}$ 且互不相交, 则有

$$\tau'(E) = \sum_{i=1}^{m} \tau'(E_i) = \sum_{i=1}^{m} \tau(E_i) = \tau_1(E),$$

亦即 $\tau' = \tau_1$. □

或许 X 不是 $\mathcal{S}$ 中的元素, 但是 $X = X \setminus \varnothing$ 总能表示为 $\mathcal{S}$ 中有限个成员如 $E_1, \cdots, E_n$ 的不交并: 一旦 $\sum_{i=1}^{n} \tau(E_i) = 1$, 则有 $\tau_1(X) = 1$, 这里 $\tau_1(X) = \sum_{i=1}^{n} \tau(E_i)$ 由定理 1.1.2 得出.

下面定理的证明可参见参考文献 [10].

定理 1.1.3 设 $\mathcal{A}$ 为 X 的一些子集构成的代数, 而 $\tau_1 : \mathcal{A} \to [0,1]$ 为可数可加的函数, 满足 $\tau_1(X) = 1$, 则存在唯一的概率测度 $\tau_2 : \mathcal{B}(\mathcal{A}) \to [0,1]$, 满足 $\tau_2(A) = \tau_1(A)$, $\forall A \in \mathcal{A}$.

设给定 X 上的一个半代数 $\mathcal{S}$ 和一个可数可加函数 $\tau : \mathcal{S} \to [0,1]$, 并进一步假定 X 表示为 $\mathcal{S}$ 中有限个成员如 $E_1, \cdots, E_n$ 的不交并, 满足 $\sum_{i=1}^{m} \tau(E_i) = 1$, 则由上面的三个定理我们可以确定唯一的概率空间 $(X, \mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathcal{S})), \tau_2)$.

由上面的定理, 当我们知道半代数 $\mathcal{S}$ 的元素时就能知道它生成的代数 $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ 中的元素, 但是, 我们一般不知道生成的 σ 代数 $\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathcal{S}))$

中而没在代数 $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ 中的元素, 能够把握的则是用代数 $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ 中的元素逼近 σ 代数 $\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathcal{S}))$ 的元素. 这种逼近的程度可由对称差的测度来描述. 设 $(X,\mathcal{B},m)$ 为概率空间. 两个可测集 A 和 B 的对称差 $A\triangle B$ 指的是 $(A\setminus B)+(B\setminus A)$. 下面定理可参见参考文献 [7].

定理 1.1.4 设 $(X,\mathcal{B},m)$ 为概率空间, $\mathcal{A}$ 为一个代数, 满足 $\mathcal{B}(\mathcal{A})=\mathcal{B}$, 则对任意 $\varepsilon>0$ 和 $B\in\mathcal{B}$, 存在 $A\in\mathcal{A}$, 使得 $m(A\triangle B)<\varepsilon$.

例 1.1.2 $\mathcal{S}=\{\varnothing,[0,b],(a,b]\,|\,0\leqslant a<b\leqslant 1\}$ 是 $[0,1]$ 上的半代数而不是代数. 事实上, 半代数的三条公理易验证. 至于不能成为代数的理由如下:

$$[0,1]\setminus\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]=\left[0,\frac{1}{2}\right]\cup\left(\frac{2}{3},1\right]\notin\mathcal{S}.$$

定义 $\tau:\mathcal{S}\to[0,1]$, $\tau(\varnothing)=0,\tau([0,b])=b$, $\tau((a,b])=b-a$. 由上面的几个定理知, $\mathcal{S}$ 可唯一扩张成 σ 代数, 而 τ 可唯一扩张成概率测度. 此概率测度叫做 $[0,1]$ 上的 **Lebesgue 测度**.

1.1.3 单调类和 σ 代数

定义 1.1.6 X 的一些子集合组成的类 $\mathcal{C}$ 叫做**单调类**, 如果

(i) 对单调增的集合序列的并封闭, 即

$$E_1\subset E_2\subset\cdots,\quad E_i\in\mathcal{C}\Longrightarrow\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\in\mathcal{C};$$

(ii) 对单调减的集合序列的交封闭, 即

$$F_1\supset F_2\supset\cdots,\quad F_i\in\mathcal{C}\Longrightarrow\bigcap_{i=1}^{\infty}F_i\in\mathcal{C}.$$

显然 2^X 是单调类, 所以任何集合类都有包含它的单调类. 直接验证可知, 单调类的交集还是单调类. 对给定的一个代数 $\mathcal{A}$, 包含 $\mathcal{A}$ 的所有单调类之交则是包含 $\mathcal{A}$ 的最小单调类, 称之为 $\mathcal{A}$ 生成的单调类, 记成 $\mathcal{C}(\mathcal{A})$.

定理 1.1.5 设 $\mathcal{A}$ 为由 X 的一些子集构成的代数, $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ 为 $\mathcal{A}$ 生成的单调类, 则 $\mathcal{C}(\mathcal{A})=\mathcal{B}(\mathcal{A})$.

证明 我们验证 $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ 对余运算封闭. 令

$$\mathcal{M} = \{E \in \mathcal{C}(\mathcal{A}) \mid E' = X \setminus E \in \mathcal{C}(\mathcal{A})\}.$$

自然 $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$. 现在证明 $\mathcal{M}$ 形成单调类. 设 $E_1 \subset E_2 \subset \cdots, E_i \in \mathcal{M}$, 则

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{C}(\mathcal{A}).$$

记 $E_i' = X \setminus E_i$, 有

$$E_1' \supset E_2' \supset \cdots,\ E_i' \in \mathcal{M}, \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i' \in \mathcal{C}(\mathcal{A}).$$

由此可得 $X \setminus E = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} E_i' \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$, 进而可得 $E \in \mathcal{M}$. 这说明 $\mathcal{M}$ 对单调增的集合序列的并封闭. 同理可证, 它对单调减的集合序列的交封闭, 进而是单调类. 而 $\mathcal{M}$ 作为包含 $\mathcal{A}$ 的单调类必等同于 $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, 这说明 $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ 对余运算封闭.

现在验证 $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ 对取有限交运算也封闭. 为此, 对 $E \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$, 令

$$\mathcal{M}_E = \{F \in \mathcal{C}(\mathcal{A}) \mid E \cap F \in \mathcal{C}(\mathcal{A})\}.$$

因为 $\varnothing \in \mathcal{M}_E$, 则有 $\mathcal{M}_E \neq \varnothing$. 对 $\mathcal{M}_E$ 中的单调增的集合序列 $F_1 \subset F_2 \subset \cdots$, 令 $F = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F_i$. 因 $\{E \cap F_i\}$ 是 $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ 中的单调增的集合序列, 且 $E \cap F = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(E \cap F_i) \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$, 进而 $F \in \mathcal{M}_E$, 故 $\mathcal{M}_E$ 对单调增的集合序列的并封闭. 同理可证, 它对单调减的集合序列的交封闭. 于是, 对每个 $E \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$, $\mathcal{M}_E$ 是单调类. 当取 $E \in \mathcal{A}$ 时, 易见 $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_E$, 进而 $\mathcal{M}_E = \mathcal{C}(\mathcal{A})$. 这说明 $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ 对有限交运算封闭. 至此证明了 $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ 是代数.

设 $E_i \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$, $i \in \mathbb{N}$. 因 $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ 是代数, 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$. 作为单调增序列 $\left\{\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i\right\}_{n=1}^{\infty}$ 的无限并, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ 必属于 $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. 故 $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ 是 σ 代