高等学校交流讲义

計算方法

JISUAN FANGFA

北京大学、吉林大学、南京大学計算数学教研室編

人民教育出版社

高等学校交流講义

計算方法

JISUAN FANGFA

北京大学、吉林大学、南京大学計算数学教研室編

人民教育出版社

本书是北京大学計算数学教研室以他們新編的講义为基础，补充了吉林大学、南京大学所編講义的一部分修改、加工而成的。

本书共分十章：師近似数的計算、插值法、一致逼近与平方逼近、数值积分法、綫性代数的計算方法、常微分方程数值解法、橢圓型偏微分方程的数值解法、抛物型偏微分方程的差分方法、双曲型偏微分方程的数值解法、积分方程的近似解法。

本书可作为綜合大学、高等师范学校計算数学专业有关課程的教材；也可供高等工业学校相近专业选用。

簡裝本說明

目前850×1168毫米規格紙張較少，本书暫以787×1092毫米規格紙張印刷，定价相应减少20%。希鉴諒。

計 算 方 法

北京大学、吉林大学、南京大学計算数学教研室

人民教育出版社出版 高等学校教学用书編輯部 北京宣武門內承恩寺7号

北京市书刊出版业营业許可証出字第2号

京 华 印 书 局 印 装

新华书店科技发行所发行

各 地 新 华 书 店 經 售

統一书号 13010·958 开本 787×1092 1/32 印张 18 3/16 插頁 1

字数 434,000 印数 1,001—11,000 定价(6)¥1.40

1961年7月第1版 1961年8月北京第2次印刷

序　言

本书是以北京大学新編計算方法讲义为基础，补充了吉林大学，南京大学所編讲义的一部分，参考四川大学，吉林师范大学，兰州大学等校讲义和已出版的复旦大学所編計算方法等书，吸取了几年来各校在課程内容上进行精簡、加深和更新的經驗，由北京大学計算数学教研室增补、修改、加工而成。

全书共分十章：1. 近似数的計算，2. 插値法，3. 一致逼近与平方逼近，4. 数值积分法，5. 綫性代数的計算方法，6. 常微分方程数値解法，7. 椭圓型偏微分方程数値解法，8. 抛物型偏微分方程的差分方法，9. 双曲型偏微分方程的数値解法，10. 积分方程的近似解法。在第七章末介紹了变分方法，在第九章結合双曲型問題介紹了直綫法。

在編写时，曾經企图使計算方法的教材結合当前的計算实际和大型电子計算机。在传統的計算方法方面尽量只讲最基本的；手算很有效或在电子計算机上仍然有效的方法。同时也注意讲述在电子計算机上使用的新方法，使讀者学过之后，能用以解决实际問題。

作为基础課的教材，对于計算方法的基本理論作了一定的闡述。

在編写时，对于讲法方面曾企图力求由浅入深、由特殊到一般，在介紹方法和引进概念时力求揭露問題的实质，对于方法与概念之間又着重闡明其联系。

但由于水平所限，經驗不足，做到的还很少。希望使用本书的讀者提出批評和意見，以便再版时改正。

本书可作为綜合性大学、高等师范学校計算数学专业有关課程的教材；也可供計算数学工作者作参考。

北京大学計算数学教研室

1961 年 4 月 18 日

目 录

第一章　近似数的計算

§1. 引　言

在数值計算中，参与計算的数，一般說来都是近似的。首先，用到的数据是由观测得来的，观測的結果是不可能絕对准确的。其次，在計算过程中还要利用一些无理数，例如，π，e，$\sqrt{2}$ 等，在計算机上，这些数只能近似地表示。

近似数的誤差对計算結果的影响可能是很大的。我們用个例子来說明，設有半径为 R 的圓柱和两个互相垂直而又与之相切的平面。試求一个与圓柱及这两个平面都相切的球的体积。从图 1.1 中，容易得出

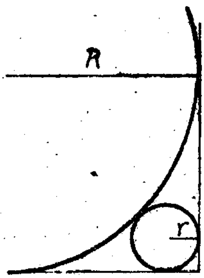

图 1.1

$$r=R\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)。$$

所以球的体积是

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^3。$$

計算

$$x=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^3,$$

可以利用下列等式得到以下六种算法

$$\begin{aligned}x&=(\sqrt{2}-1)^6=(3-2\sqrt{2})^3=99-70\sqrt{2}\\&=\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^6=\left(\frac{1}{3+2\sqrt{2}}\right)^3=\frac{1}{99+70\sqrt{2}}。\end{aligned}\qquad(1)$$

現在就分別用

$$\sqrt{2}\approx 7/5=1.4,\quad \sqrt{2}\approx 17/12=1.4166\cdots$$

来按 (1) 中六个公式計算得結果如下表。$\sqrt{2}$ 的眞值是 $1.414213\cdots$，17/12 比 7/5 更接近于 $\sqrt{2}$ 的眞值。

$\sqrt{2}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{17}{12}$
$(\sqrt{2}-1)^6$	$\frac{64}{15625}=0.004096$	$\frac{15625}{2985984}=0.005232$
$(3-2\sqrt{2})^3$	$\frac{1}{125}=0.008$	$\frac{1}{216}=0.004630$
$(99-70\sqrt{2})$	1	$-\frac{1}{16}=-0.166667$
$\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^6$	$\left(\frac{5}{12}\right)^6=0.005232$	$\left(\frac{12}{29}\right)^6=0.0050199$
$\left(\frac{1}{3+2\sqrt{2}}\right)^3$	$\left(\frac{5}{29}\right)^3=0.0051252$	$\left(\frac{12}{70}\right)^3=0.0050379$
$\frac{1}{99+70\sqrt{2}}$	$\frac{1}{197}=0.00507614$	$\frac{12}{2378}=0.0050462$

由此可見，按照不同公式計算出的結果是很不同的。我們不知道那一个結果更近似于眞值。这个例子告訴我們，正确地掌握近似数的基本概念和一些基本运算法則是非常必要的。

§ 2. 絕对誤差和相对誤差

假設某一量的准确值是 x，其近似值是 x^*。(在本章中，我們总在表示准确值的字母上加一“$*$”号来表示該值的近似值。) x 与 x^* 的差

$$\varepsilon(x)=x-x^* \tag{1}$$

叫做近似数 x^* 的**絕对誤差**，簡称为誤差。当 $\varepsilon(x)>0$ 时，就称 x^* 为亏近似数，反之称为盈近似数。

由于准确值 x 一般不能算出，$\varepsilon(x)$ 的准确值也不能求出。但是我們可以估計出它的大小的范圍；也就是可以指出一个正数 η 使

$$|\varepsilon(x)|\leqslant\eta \tag{2}$$

η 称为 x^* 的絕对誤差限。有时我們也用

$$x = x^* \pm \eta \tag{3}$$

来表示不等式 (2)。例如，眞空中光速 c 的最好的近似值是 2.997902×10^{10} 厘米/秒，其絕对誤差不超过 0.000009×10^{10} 厘米/秒。通常就記成

$$c = (2.997902 \pm 0.000009) \times 10^{10} \text{ 厘米/秒。}$$

絕对誤差还不足以刻画近似数的精确度。例如，测量一米的长度时发生了一厘米的誤差和测量半米的长度时发生了一厘米的誤差是有区别的。前一种测量比較精确。可見要决定一量的近似值的精确度，除了要看絕对誤差的大小之外，还必須考虑到該量本身的大小，这就导出了相对誤差的概念。

絕对誤差与准确值的比，即

$$\varepsilon_r(x) = \frac{\varepsilon(x)}{x} = \frac{x - x^*}{x}, \tag{4}$$

称为 x^* 的**相对誤差**。上述前一种测量的相对誤差是 1/100，而后一种测量的相对誤差是 1/50，它是前者的两倍。

由(4)看出，相对誤差可以从絕对誤差求出，反之求出了相对誤差，絕对誤差也可以求得：

$$\varepsilon(x) = x \cdot \varepsilon_r(x)\text{。}$$

相对誤差不仅可以表示出絕对誤差，而且在討論对近似数进行运算結果的誤差分析时，相对誤差更能反映出誤差的特性。因此在誤差分析中，相对誤差显得比絕对誤差更重要。

相对誤差也不能够准确地求出，因为其中 $\varepsilon(x)$ 与 x 都不可能准确地求得。但也象絕对誤差一样，可以估計它的大小的范围，也就是指出一个正数 δ，使

$$|\varepsilon_r(x)| \leqslant \delta\text{。} \tag{5}$$

δ 称为 x^* 的相对誤差限。

相对誤差是一个无名数，它沒有量綱。例如，量 100 斤重的东西，发生一斤重的誤差，和量 100 尺长的东西，发生一尺长的誤差。二者的相对誤差都是 1/100。与此相反，由于絕对誤差是名数，它有量綱，上例中两种測量的絕对誤差就无法作比較。

在实际計算中，由于准确值 x 总是不知道的，所以就取

$$\varepsilon_r^*(x)=\frac{\varepsilon(x)}{x^*} \tag{6}$$

作为相对誤差的另一定义。由于一般說来 $\varepsilon(x)$ 对 x 而言是小量而

$$\varepsilon_r(x)-\varepsilon_r^*(x)=\varepsilon(x)\left\{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^*}\right\}=\frac{-1}{xx^*}\left\{\varepsilon(x)\right\}^2$$

是关于 $\varepsilon(x)$ 的高阶小量，所以我們可以用 $\varepsilon_r^*(x)$ 代替 $\varepsilon_r(x)$。以后談到相对誤差时，都是指 $\varepsilon_r^*(x)$。

相对誤差常表成百分数

$$\varepsilon_r^*(x)=\frac{100\,\varepsilon(x)}{x^*}\,\%。$$

相对誤差的 100 倍，也时称为百分誤差。

§ 3. 有效数字

大家都知道用四舍五入去取一个无穷小数的近似値。例如 $\pi=3.14159265\cdots$，按四舍五入，取 4 位小数得出 π 的近似値为 3.1416，取 5 位小数則得出近似値 3.14159。它們的絕对誤差限不超过其末位数的半个单位，

$$|\pi-3.1416|<\frac{1}{2}\times10^{-4},\quad \pi-3.14159<\frac{1}{2}\times10^{-5}。$$

为了在进行大量加法的时候，使由四舍五入产生的舍入誤差不致积累过大，一般当拟舍去的数刚好是拟保留下来的最后一位的半个单位时，对通常的四舍五入規則作以下的补充規定：即当

原数中被保留下来的最后一位数字是偶数，则把它后面余下的数字去掉；如果是奇数，就还在保留下来的最后一位上加1。例如把

31.35764,　10.19313,　14.32250,　14.32150

按这规則舍入成具5位数字的数后，就是

31.358,　10.193,　14.322,　14.322。

若把一数 x，按上述舍入規則舍入成

$$x^*=\pm 10^m(\alpha_1+\alpha_2\times 10^{-1}+\alpha_3\times 10^{-2}+\cdots+\alpha_n\times 10^{-(n-1)}) \quad (1)$$

以后，其絕对誤差限为

$$|x-x^*|\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{m-n+1}, \quad (2)$$

这里 m 是一个整数，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 都是 $0, 1, 2, \cdots, 9$ 中的一个数字，而且总可以假定 $\alpha_1\neq 0$。对于形如(1)式的 x^*，当(2)式成立而 $\alpha_1\neq 0$ 时，便說 x^* 是一个**具有 n 位有效数字的有效数**。其中每一位数字 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 都叫做 x^* 的**有效数字**。

例如，3.1416 是 π 的具有5位有效数字的近似值。

再引进一个名詞。若

$$x^*=\pm 10^m(\alpha_1+\alpha_2\times 10^{-1}+\alpha_3\times 10^{-2}+\cdots+ \\ +\alpha_n\times 10^{-(n-1)}+\alpha_{n+1}\times 10^{-n}+\cdots)$$

的絕对誤差限不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{m-n+1}$，我們就說，$\alpha_n$ 是 x^* 的**准确数字**，否則就說它是**存疑数字**。若 α_n 是准确数字則它前面各位数字也都是准确数字。此时，我們也說 x^* 准确到它的第 n 位。

例如，$x=0.1345$，$x^*=0.136$。x^* 的絕对誤差 $\varepsilon(x)$ 不超过0.005：$|x-x^*|<0.005$。所以 x^* 准确到第2位小数。

应該注意，若 x^* 准确到某位数字，把这位数字以后的数字进行舍入，則并不一定得到有效数。上例中，x^* 舍入成 $x^{**}=0.14$ 以后，由于 $|x-x^{**}|>0.005$，x^{**} 不是有效数。

若 x^* 是具 n 位有效数字的有效数，則它是准确到它的最末一位的近似数。还应該指出，它的最末一位数字可能和准确值 x 中的同一位数字不同。例如，3.1416 是 $\pi=3.14159\cdots$ 的准确到小数点以后第四位的近似数，但它的最末一位是 6，而 π 中同一位数字是 5。

有效数不但給出了这近似数的大小，而且还給出了它的絕对誤差限。例如，有效数 3587.64，0.158×10^{-2}，0.1580×10^{-2} 的絕对誤差限由(2)可知依次是 $\frac{1}{2}\times10^{-2}$，$\frac{1}{2}\times10^{-5}$，$\frac{1}{2}\times10^{-6}$ 等。应該注意，在有效数的記法中，0.158×10^{-2} 与 0.1580×10^{-2} 是有区别的。前者只有 3 位有效数字 1，5，8；后者則有 4 位有效数字 1,5,8,0。同样，158×10^3 具有三位有效数字而 1580×10^2 則具有四位有效数字。

有效数字和相对誤差之間，也有着基本的联系，我們把它列成两个定理。

定理 1。形如(1)的近似数 x^*，若具有 n 位有效数字，則其相对誤差限为

$$|\varepsilon_r^*(x)|\leqslant\frac{1}{2\alpha_1}\times10^{-(n-1)} \tag{3}$$

其中 $\alpha_1\neq0$ 是 x^* 的第一位有效数字。

証明： 由 (1) 知 $|x^*|\geqslant\alpha_1\times10^m$，故由 (2) 有

$$|\varepsilon_r^*(x)|=\left|\frac{\varepsilon(x)}{x^*}\right|\leqslant\frac{1}{\alpha_1\times10^m}\times\frac{1}{2}\times10^{m-n+1}=$$

$$=\frac{1}{2\alpha_1}\times10^{-(n-1)}。$$

定理 2。形如 (1) 的近似数 x^*，若其相对誤差 $\varepsilon_r^*(x)$ 滿足

$$|\varepsilon_r^*(x)|\leqslant\frac{1}{2(\alpha_1+1)}\times10^{-(n-1)}$$

則 x^* 具有 n 位有效数字，(至少也准确到它的第 n 位)。

証明：由于 $\varepsilon(x)=x^*\varepsilon_r^*(x)$，而 $|x^*|<(a_1+1)10^m$，故

$$|\varepsilon(x)|=|x^*|\,|\varepsilon_r^*(x)|\leqslant(a_1+1)10^m\times\frac{1}{2(a_1+1)}\times10^{-(n-1)}$$

即

$$|\varepsilon(x)|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{m-n+1}。$$

如果 x^* 中只有 n 位数字，显然 x^* 就是具有 n 位有效数字的有效数。如果 x^* 中所含数字的位数比 n 多，它也可能在經过舍入之后仍能成为具有 n 位有效数字的数。但是不管这个可能性如何，它是准确到第 n 位的近似数。

根据上述事实，可以看出，有效数字的位数可以刻画近似数的精确度。

§ 4. 近似数的簡单算术运算

(一) **近似数的加法**。k 个近似数 $x_i^*>0$ $(i=1,2,\cdots,k)$ 的和 $x^*=\sum\limits_{i=1}^{k}x_i^*$ 的絕对誤差 $\varepsilon(x)$ 等于各个近似数的誤差的代数和。事实上，

$$\varepsilon(x)=\sum_{i=1}^{k}x_i-\sum_{i=1}^{k}x_i^*=\sum_{i=1}^{k}(x_i-x_i^*)=\sum_{i=1}^{k}\varepsilon(x_i)。$$

同时，x^* **的絕对誤差限不超过各近似数的誤差限之和**。由于 $\varepsilon(x_i)$ 可正可負，一般可以互相抵消，因此 x^* 的絕对誤差限通常比相加各数的絕对誤差限之和小。

相对誤差 $\varepsilon_r^*(x)$ 則界于相加諸項的相对誤差中最大者与最小者之間，即

$$\min_i\{\varepsilon_r^*(x_i)\}=\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_r^*(x)\leqslant\varepsilon_2=\max_i\{\varepsilon_r^*(x_i)\}。$$

事实上，由于 $\varepsilon(x)=\sum_{i=1}^{k}\varepsilon(x_i)=\sum_{i=1}^{k}x_i^*\varepsilon_r^*(x_i)$，故

$$\varepsilon_r^*(x)=\frac{\varepsilon(x)}{x^*}=\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i^*}{x^*}\varepsilon_r^*(x_i)\begin{cases}\leqslant\varepsilon_2\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i^*}{x^*}=\varepsilon_2,\\ \geqslant\varepsilon_1\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i^*}{x^*}=\varepsilon_1。\end{cases}$$

据此并利用前述定理 1，2，就可以进一步討論和的有效数字的位数了。

近似数的加法，应該按下面例子中所說的方法进行。

例 1. 求近似数 285.35，196.87，58.43，4.96 的和，其中每一个数都准确到最末一位数字。

$$\begin{array}{rr} & 285.35\\ & 196.87\\ & 58.43\\ +) & 4.96\\ \hline & 546.61\end{array}$$

这是一般的算法，結果中第二位小数可能不准确，因为結果的絕对誤差可能达到 0.02。舍入成 545.6，它的絕对誤差限是 0.02+0.01==0.03，所以它具有四位有效数字。

例 2. 求 3.150950，15.426463，586.3758，与 7684.3876 的和，其中前三个数都准确到最末一位数字，只有第四个数只准确到小数点后第三位。

$$\begin{array}{rr} & 3.150950\\ & 15.426463\\ & 568.3758\\ +) & 7684.3876\\ \hline & 8271.340813\end{array}$$

若按左列办法相加，結果中虽然保持了六位小数，但由于最后一个相加的数只准确到小数点后第三位，相加的結果最多也只能准确到小数点后第三位。所以計算結果中最末两位的工作是沒有意义的和多余的。合理的做法是先将准确小数位数較多的各数都舍入成准确小数位数仅比 7684.3876 的准确小数位数多一位，即舍入成四位小数，然后再

$$\begin{array}{r} 3.1510 \\ 15.4265 \\ 568.3758 \\ +)\ 7684.3876 \\ \hline 8271.3409 \end{array}$$

相加。这样求出的和的絕对誤差限不超过 $3\times(0.00005)+0.0005=0.00065$。舍入成 8271.34，其絕对誤差限不超过 0.005，所以具有 6 位有效数字。

（二）**近似数的乘法。** 討論乘法，除法，乘方和开方等运算的結果的誤差时，最好用相对誤差来討論。設 x_1^*，x_2^* 分别是 x_1，x_2 的近似数。引用微分符号

$$\varepsilon(x_1)=x_1-x_1^*=dx_1^*,$$

$$\varepsilon(x_2)=x_2-x_2^*=dx_2^*,$$

則利用微分公式，可有近似的等式

$$\begin{aligned}\varepsilon(x_1x_2)&=x_1x_2-x_1^*x_2^*=d(x_1^*x_2^*)\\&=x_2^*dx_1^*+x_1^*dx_2^*=x_2^*\varepsilon(x_1)+x_1^*\varepsilon(x_2)。\end{aligned}\tag{1}$$

我們利用这个近似等式还是合理的，因为等式 $x_1x_2-x_1^*x_2^*=d(x_1^*x_2^*)$ 两端相差的只是相对于 $x_2^*dx_1^*+x_1^*dx_2^*$ 而言的高阶小量 $dx_1^*\times dx_2^*$，故可忽略不計。由(1)就有

$$\varepsilon_r^*(x_1x_2)=\frac{\varepsilon(x_1x_2)}{x_1^*x_2^*}=\frac{\varepsilon(x_1)}{x_1^*}+\frac{\varepsilon(x_2)}{x_2^*}=\varepsilon_r^*(x_1)+\varepsilon_r^*(x_2)。\tag{2}$$

由此可得結論：**乘积的相对誤差是各因子的相对誤差之和，乘积的相对誤差限也不超过各个因子的相对誤差限的和。** 显然，这个性质对于含两个因子以上的乘积也是成立的。

根据这个性质和前述定理 1，2，可以推知：两近似数 x_1^*，x_2^* 相乘，若它們各有 n_1 位和 n_2 位有效数字，則乘积 $x_1^*x_2^*$ 一般有 $n=\min(n_1,n_2)-1$ 位有效数字，至少也有 $n-1$ 位有效数字。

为了証明，設 $n_1\leqslant n_2$，而求証 $x_1^*x_2^*$ 具有 n_1-1 位或 n_1-2 位有效数字。

設 α_1,β_1,p_1 依次是 x_1^*，x_2^* 及 $x_1^*x_2^*$ 中的第一位不为零的