

高等学校交流讲义

# 計 算 方 法

JISUAN FANGFA

北京大学、吉林大学、南京大学計算数学教研室編

人 民 教 育 出 版 社

高等学校交流讲义



計 算 方 法

JISUAN FANGFA

北京大学、吉林大学、南京大学計算数学教研室編

人民教育出版社

本书是北京大學計算數學教研室以他們新編的講義為基礎，補充了吉林大學、南京大學所編講義的一部分修改、加工而成的。

本書共分十章：鄰近似數的計算、插值法、一致逼近與平方逼近、數值積分法、綫性代數的計算方法、常微分方程數值解法、橢圓型偏微分方程的數值解法、拋物型偏微分方程的差分方法、雙曲型偏微分方程的數值解法、積分方程的近似解法。

本書可作為綜合大學、高等師範學校計算數學專業有關課程的教材；也可供高等工業學校相近專業選用。

### 簡裝本說明

目前 850×1168 毫米規格紙張較少，本書暫以 787×1092 毫米規格紙張印刷，定價相應減少 20%。希鑒諒。

## 計 算 方 法

北京大學、吉林大學、南京大學計算數學教研室

人民教育出版社出版 高等學校數學用書編輯部  
北京宣武門內大街 27 號

北京市書刊出版業營業許可證出字第 2 號

京 華 印 書 局 印 裝  
新 華 書 店 科 技 發 行 所 發 行  
各 地 新 華 書 店 經 售

統一書號：13010·958 開本 787×1092 1/32 印張 18 3/16 插頁 1  
字數 481,000 印數 1,001—14,000 定價 (6) 1.49  
1961 年 7 月第 1 版 1961 年 8 月北京第 2 次印刷

# 序 言

本书是以北京大学新編計算方法讲义为基础，补充了吉林大学，南京大学所編讲义的一部分，参考四川大学，吉林师范大学，兰州大学等校讲义和已出版的复旦大学所編計算方法等书，吸取了几年来各校在課程內容上进行精簡、加深和更新的經驗，由北京大学計算数学教研室增补、修改、加工而成。

全书共分十章：1. 近似数的計算，2. 插值法，3. 一致逼近与平方逼近，4. 数值积分法，5. 綫性代数的計算方法，6. 常微分方程数值解法，7. 橢圓型偏微分方程数值解法，8. 拋物型偏微分方程的差分方法，9. 双曲型偏微分方程的数值解法，10. 积分方程的近似解法。在第七章末介紹了变分方法，在第九章結合双曲型問題介紹了直綫法。

在編写时，曾經企图使計算方法的教材結合当前的計算实际和大型电子計算机。在傳統的計算方法方面尽量只讲最基本的；手算很有效或在电子計算机上仍然有效的方法。同时也注意讲述在电子計算机上使用的新方法，使讀者学过之后，能用以解决实际問題。

作为基础課的教材，对于計算方法的基本理論作了一定的闡述。

在編写时，对于讲法方面曾企图力求由浅入深、由特殊到一般，在介紹方法和引进概念时力求揭露問題的实质，对于方法与概念之間又着重闡明其联系。

但由于水平所限，經驗不足，做到的还很少。希望使用本书的讀者提出批評和意見，以便再版时改正。

本书可作为綜合性大学、高等师范学校計算数学专业有关課程的教材；也可供計算数学工作者作参考。

北京大学計算数学教研室

1961年4月18日

# 目 录

## 序

第一章 近似数的计算 .....	1
§ 1. 引 言 .....	1
§ 2. 绝对误差和相对误差 .....	2
§ 3. 有效数字 .....	4
§ 4. 近似数的简单算术运算 .....	7
第二章 插值法 .....	17
§ 1. 引 言 .....	17
§ 2. 插值多项式的存在唯一性·拉格朗日插值公式·埃特金逐步插值法 ..	18
§ 3. 牛顿插值公式·均差 .....	23
§ 4. 插值多项式的余式 .....	27
§ 5. 差分 .....	30
§ 6. 插值基点等距离分布时的各种插值公式·函数表的加密 .....	35
§ 7. 反插值 .....	44
§ 8. 等距插值基点的三角插值 .....	47
§ 9. 带导数值的插值公式 .....	50
§ 10. 数值微分 .....	53
第三章 一致逼近和平方逼近 .....	56
§ 1. 引 言 .....	56
§ 2. 维尔斯特拉斯定理 .....	57
§ 3. 最佳逼近概念 .....	63
§ 4. 几个例子·切比晓夫多项式 .....	71
§ 5. 切比晓夫多项式的一个应用——降低逼近多项式的次数 .....	76
§ 6. 最小二乘法、离散情形 .....	79
§ 7. 连续情形、最小平方逼近 .....	86
§ 8. 直交多项式举例 .....	91
§ 9. 实用调和和分析 .....	100
第四章 数值积分法 .....	112
§ 1. 引 言 .....	112
§ 2. 内插求积公式·等距基点情形 .....	114
§ 3. 复化梯形公式、复化辛卜生公式及其应用 .....	123
§ 4. 非等距基点情形、高斯型求积公式 .....	127
§ 5. 其它特例 .....	133
§ 6. 最高三角精确度求积公式 .....	139

§ 7.	反常积分的计算	143
§ 8.	重积分的近似计算	148
<b>第五章</b>	<b>线性代数的计算方法</b>	<b>153</b>
§ 1.	引 言	153
§ 2.	消去法	154
§ 3.	系数矩阵对称时适用的平方根法	169
§ 4.	直交化法	172
§ 5.	矩阵的分块求逆法	180
§ 6.	用迭代法求逆矩阵	183
§ 7.	用迭代法解线性代数方程组 (I) 简单迭代法	184
§ 8.	用迭代法解线性代数方程组 (I) 赛德尔迭代法	204
§ 9.	简单迭代法及赛德尔迭代法收敛性的充分必要条件	208
§ 10.	用迭代法解线性代数方程组 (II) 利用切比晓夫多项式的迭代方法	217
§ 11.	最速下降法	221
§ 12.	求矩阵的特征值与特征向量的克雷洛夫方法	228
§ 13.	求矩阵的特征值与特征向量的改进达尼列夫斯基方法	241
§ 14.	用转轴把实对称矩阵对角化 (雅可比方法)	250
§ 15.	求特征值与特征向量的迭代方法	258
§ 16.	用迭代法解线性代数方程组的加速收敛方法	278
<b>第六章</b>	<b>常微分方程数值解法</b>	<b>281</b>
§ 1.	折线法与改进的折线法	281
§ 2.	龙盖——库塔法	294
§ 3.	亚当姆斯方法	300
§ 4.	亚当姆斯方法的误差估计及收敛性	310
§ 5.	差分方法的稳定性	314
§ 6.	微分方程组和高阶微分方程的解法	318
§ 7.	把常微分方程边值问题化为初值问题求解的方法	325
§ 8.	解边值问题的差分方法以及解所得差分方程组的追赶法	333
<b>第七章</b>	<b>椭圆型偏微分方程数值解法</b>	<b>349</b>
§ 1.	网格法介绍	349
§ 2.	把椭圆型方程边值问题化为差分方程	350
§ 3.	差分方程的解的存在唯一性, 收敛性与误差估计	369
§ 4.	差分方程的解法	375
§ 5.	双调和方程的差分方法	410
§ 6.	变分方法及其它有关的方法	417
<b>第八章</b>	<b>抛物型偏微分方程的差分方法</b>	<b>445</b>
§ 1.	引 言	445

§ 2.	第一边值问题的差分格式 .....	447
§ 3.	第三边值问题 .....	458
§ 4.	稳定性问题 .....	461
§ 5.	收敛性问题 .....	483
§ 6.	用隐式差分格式解一维热传导方程的边值问题举例及追赶法的应用 ...	490
第九章	双曲型偏微分方程的数值解法 .....	501
§ 1.	线性双曲型方程的差分方法 .....	501
§ 2.	拟线性双曲型一阶方程组的特征线法和矩形网格法 .....	524
§ 3.	解偏微分方程边值问题的直线法 .....	541
第十章	积分方程的近似解法 .....	549
§ 1.	引 言 .....	549
§ 2.	机械求积方法 .....	550
§ 3.	近似退化核替代法 .....	558
§ 4.	矩量法 .....	562
§ 5.	对解积分方程的机械求积法的误差估计 .....	566



# 第一章 近似数的計算

## § 1. 引 言

在数值計算中，参与計算的数，一般說来都是近似的。首先，用到的数据是由观测得来的，观测的結果是不可能絕對准确的。其次，在計算过程中还要利用一些无理数，例如， $\pi$ ， $e$ ， $\sqrt{2}$  等，在計算机上，这些数只能近似地表示。

近似数的誤差对計算結果的影响可能是很大的。我們用个例子來說明，設有半径为  $R$  的圓柱和两个互相垂直而又与之相切的平面。試求一个与圓柱及这两个平面都相切的球的体积。从图 1.1 中，容易得出

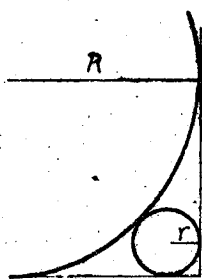


图 1.1

$$r = R \left( \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right).$$

所以球的体积是

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \left( \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right)^3.$$

計算

$$x = \left( \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right)^3,$$

可以利用下列等式得到以下六种算法

$$\begin{aligned} x &= (\sqrt{2} - 1)^6 = (3 - 2\sqrt{2})^3 = 99 - 70\sqrt{2} \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \right)^6 = \left( \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} \right)^3 = \frac{1}{99 + 70\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (1)$$

現在就分別用

$$\sqrt{2} \approx 7/5 = 1.4, \quad \sqrt{2} \approx 17/12 = 1.4166\dots$$

来按 (1) 中六个公式計算得結果如下表。 $\sqrt{2}$  的眞值是  $1.414213\dots$ ， $17/12$  比  $7/5$  更接近于  $\sqrt{2}$  的眞值。

$\sqrt{2}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{17}{12}$
$(\sqrt{2}-1)^6$	$\frac{64}{15625} = 0.004096$	$\frac{15625}{2985984} = 0.005232$
$(3-2\sqrt{2})^3$	$\frac{1}{125} = 0.008$	$\frac{1}{216} = 0.004630$
$(99-70\sqrt{2})$	1	$-\frac{1}{16} = -0.166667$
$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^6$	$\left(\frac{5}{12}\right)^6 = 0.005232$	$\left(\frac{12}{29}\right)^6 = 0.0050199$
$\left(\frac{1}{3+2\sqrt{2}}\right)^3$	$\left(\frac{5}{29}\right)^3 = 0.0051252$	$\left(\frac{12}{70}\right)^3 = 0.0050379$
$\frac{1}{99+70\sqrt{2}}$	$\frac{1}{197} = 0.00507614$	$\frac{12}{2378} = 0.0050462$

由此可見，按照不同公式計算出的結果是很不同的。我們不知道那一個結果更近似於真值。這個例子告訴我們，正確地掌握近似數的基本概念和一些基本運算法則是非常必要的。

## § 2. 絕對誤差和相對誤差

假設某一量的準確值是  $x$ ，其近似值是  $x^*$ 。（在本章中，我們總在表示準確值的字母上加一“\*”號來表示該值的近似值。） $x$  與  $x^*$  的差

$$\varepsilon(x) = x - x^* \quad (1)$$

叫做近似數  $x^*$  的絕對誤差，簡稱為誤差。當  $\varepsilon(x) > 0$  時，就稱  $x^*$  為虧近似數，反之稱為盈近似數。

由於準確值  $x$  一般不能算出， $\varepsilon(x)$  的準確值也不能求出。但是我們可以估計出它的大小的範圍，也就是可以指出一個正數  $\eta$  使

$$|\varepsilon(x)| \leq \eta \quad (2)$$

$\eta$  称为  $x^*$  的绝对误差限。有时我们也用

$$x = x^* \pm \eta \quad (3)$$

来表示不等式 (2)。例如，真空中光速  $c$  的最好的近似值是  $2.997902 \times 10^{10}$  厘米/秒，其绝对误差不超过  $0.000009 \times 10^{10}$  厘米/秒。通常就记成

$$c = (2.997902 \pm 0.000009) \times 10^{10} \text{ 厘米/秒。}$$

绝对误差还不足以刻画近似数的精确度。例如，测量一米的长度时发生了一厘米的误差和测量半米的长度时发生了一厘米的误差是有区别的。前一种测量比较精确。可见要决定一量的近似值的精确度，除了要看绝对误差的大小之外，还必须考虑到该量本身的大小，这就导出了相对误差的概念。

绝对误差与准确值的比，即

$$\varepsilon_r(x) = \frac{\varepsilon(x)}{x} = \frac{x - x^*}{x}, \quad (4)$$

称为  $x^*$  的相对误差。上述前一种测量的相对误差是  $1/100$ ，而后一种测量的相对误差是  $1/50$ ，它是前者的两倍。

由 (4) 看出，相对误差可以从绝对误差求出，反之求出了相对误差，绝对误差也可以求得：

$$\varepsilon(x) = x \cdot \varepsilon_r(x)。$$

相对误差不仅可以表示出绝对误差，而且在讨论对近似数进行运算结果的误差分析时，相对误差更能反映出误差的特性。因此在误差分析中，相对误差显得比绝对误差更重要。

相对误差也不能够准确地求出，因为其中  $\varepsilon(x)$  与  $x$  都不可能准确地求得。但也象绝对误差一样，可以估计它的大小的范围，也就是指出一个正数  $\delta$ ，使

$$|\varepsilon_r(x)| \leq \delta。 \quad (5)$$

$\delta$  称为  $x^*$  的相对误差限。

相对誤差是一个无名数，它沒有量綱。例如，量 100 斤重的东西，发生一斤重的誤差，和量 100 尺长的东西，发生一尺长的誤差。二者的相对誤差都是  $1/100$ 。与此相反，由于绝对誤差是名数，它有量綱，上例中两种測量的绝对誤差就无法作比較。

在实际計算中，由于准确值  $x$  总是不知道的，所以就取

$$\varepsilon_r^*(x) = \frac{\varepsilon(x)}{x^*} \quad (6)$$

作为相对誤差的另一定义。由于一般說来  $\varepsilon(x)$  对  $x$  而言是小量而

$$\varepsilon_r(x) - \varepsilon_r^*(x) = \varepsilon(x) \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{x^*} \right\} = \frac{-1}{xx^*} \left\{ \varepsilon(x) \right\}^2$$

是关于  $\varepsilon(x)$  的高阶小量，所以我們可以用  $\varepsilon_r^*(x)$  代替  $\varepsilon_r(x)$ 。以后談到相对誤差时，都是指  $\varepsilon_r^*(x)$ 。

相对誤差常表成百分数

$$\varepsilon_r^*(x) = \frac{100 \varepsilon(x)}{x^*} \%。$$

相对誤差的 100 倍，也时称为百分誤差。

### § 3. 有效数字

大家都知道用四舍五入去取一个无穷小数的近似值。例如  $\pi = 3.14159265\dots$ ，按四舍五入，取 4 位小数得出  $\pi$  的近似值为 3.1416，取 5 位小数則得出近似值 3.14159。它們的绝对誤差限不超过其末位数的半个单位，

$$|\pi - 3.1416| < \frac{1}{2} \times 10^{-4}, \quad \pi - 3.14159 < \frac{1}{2} \times 10^{-5}。$$

为了在进行大量加法的时候，使由四舍五入产生的舍入誤差不致积累过大，一般当拟舍去的数刚好是拟保留下来的最后一位的半个单位时，对通常的四舍五入規則作以下的补充規定：即当

原数中被保留下来的最后一位数字是偶数，则把它后面余下的数字去掉；如果是奇数，就还在保留下来的最后一位上加1。例如把

$$31.35764, \quad 10.19313, \quad 14.32250, \quad 14.32150$$

按这规则舍入成具5位数字的数后，就是

$$31.358, \quad 10.193, \quad 14.322, \quad 14.322.$$

若把一数  $x$ ，按上述舍入规则舍入成

$$x^* = \pm 10^m (a_1 + a_2 \times 10^{-1} + a_3 \times 10^{-2} + \dots + a_n \times 10^{-(n-1)}) \quad (1)$$

以后，其绝对误差限为

$$|x - x^*| \leq \frac{1}{2} \times 10^{m-n+1}, \quad (2)$$

这里  $m$  是一个整数， $a_1, a_2, \dots, a_n$  都是  $0, 1, 2, \dots, 9$  中的一个数字，而且总可以假定  $a_1 \neq 0$ 。对于形如(1)式的  $x^*$ ，当(2)式成立而  $a_1 \neq 0$  时，便说  $x^*$  是一个具有  $n$  位有效数字的有效数。其中每一位数字  $a_1, a_2, \dots, a_n$  都叫做  $x^*$  的有效数字。

例如，3.1416 是  $\pi$  的具有5位有效数字的近似值。

再引进一个名词。若

$$x^* = \pm 10^m (a_1 + a_2 \times 10^{-1} + a_3 \times 10^{-2} + \dots + a_n \times 10^{-(n-1)} + a_{n+1} \times 10^{-n} + \dots)$$

的绝对误差限不超过  $\frac{1}{2} \times 10^{m-n+1}$ ，我们就说， $a_n$  是  $x^*$  的准确数字，否则就说它是存疑数字。若  $a_n$  是准确数字则它前面各位数字也都是准确数字。此时，我们也说  $x^*$  准确到它的第  $n$  位。

例如， $x = 0.1345$ ， $x^* = 0.136$ 。 $x^*$  的绝对误差  $\varepsilon(x)$  不超过 0.005； $|x - x^*| < 0.005$ 。所以  $x^*$  准确到第2位小数。

应该注意，若  $x^*$  准确到某位数字，把这位数字以后的数字进行舍入，则并不一定得到有效数。上例中， $x^*$  舍入成  $x^{**} = 0.14$  以后，由于  $|x - x^{**}| > 0.005$ ， $x^{**}$  不是有效数。

若  $x^*$  是具  $n$  位有效數字的有效數，則它是準確到它的最末一位的近似數。還應該指出，它的最末一位數字可能和準確值  $x$  中的同一位數字不同。例如，3.1416 是  $\pi = 3.14159\dots$  的準確到小數點以後第四位的近似數，但它的最末一位是 6，而  $\pi$  中同一位數字是 5。

有效數不但給出了這近似數的大小，而且還給出了它的絕對誤差限。例如，有效數 3587.61,  $0.158 \times 10^{-2}$ ,  $0.1580 \times 10^{-2}$  的絕對誤差限由 (2) 可知依次是  $\frac{1}{2} \times 10^{-2}$ ,  $\frac{1}{2} \times 10^{-5}$ ,  $\frac{1}{2} \times 10^{-6}$  等。應該注意，在有效數的記法中， $0.158 \times 10^{-2}$  與  $0.1580 \times 10^{-2}$  是有區別的。前者只有 3 位有效數字 1, 5, 8；後者則有 4 位有效數字 1, 5, 8, 0。同樣， $158 \times 10^3$  具有三位有效數字而  $1580 \times 10^2$  則具有四位有效數字。

有效數字和相對誤差之間，也有着基本的聯繫，我們把它列成兩個定理。

**定理 1.** 形如 (1) 的近似數  $x^*$ ，若具有  $n$  位有效數字，則其相對誤差限為

$$|\varepsilon_r^*(x)| \leq \frac{1}{2a_1} \times 10^{-(n-1)} \quad (3)$$

其中  $a_1 \neq 0$  是  $x^*$  的第一位有效數字。

**證明：**由 (1) 知  $|x^*| \geq a_1 \times 10^m$ ，故由 (2) 有

$$\begin{aligned} |\varepsilon_r^*(x)| &= \left| \frac{\varepsilon(x)}{x^*} \right| \leq \frac{1}{a_1 \times 10^m} \times \frac{1}{2} \times 10^{m-n+1} \\ &= \frac{1}{2a_1} \times 10^{-(n-1)}. \end{aligned}$$

**定理 2.** 形如 (1) 的近似數  $x^*$ ，若其相對誤差  $\varepsilon_r^*(x)$  滿足

$$|\varepsilon_r^*(x)| \leq \frac{1}{2(a_1+1)} \times 10^{-(n-1)}$$

則  $x^*$  具有  $n$  位有效数字, (至少也准确到它的第  $n$  位)。

証明: 由于  $\varepsilon(x) = x^* \varepsilon_r^*(x)$ , 而  $|x^*| < (a_1 + 1)10^m$ , 故

$$|\varepsilon(x)| = |x^*| |\varepsilon_r^*(x)| \leq (a_1 + 1)10^m \times \frac{1}{2(a_1 + 1)} \times 10^{-(n-1)}$$

即

$$|\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{2} \times 10^{m-n+1}.$$

如果  $x^*$  中只有  $n$  位数字, 显然  $x^*$  就是具有  $n$  位有效数字的有效数。如果  $x^*$  中所含数字的位数比  $n$  多, 它也可能在經過舍入之后仍能成为具有  $n$  位有效数字的数。但是不管这个可能性如何, 它是准确到第  $n$  位的近似数。

根据上述事实, 可以看出, 有效数字的位数可以刻画近似数的精确度。

#### § 4. 近似数的简单算术运算

(一) 近似数的加法。  $k$  个近似数  $x_i^* > 0$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ) 的和  $x^* = \sum_{i=1}^k x_i^*$  的绝对误差  $\varepsilon(x)$  等于各个近似数的误差的代数和。事实上,

$$\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^k x_i - \sum_{i=1}^k x_i^* = \sum_{i=1}^k (x_i - x_i^*) = \sum_{i=1}^k \varepsilon(x_i).$$

同时,  $x^*$  的绝对误差限不超过各近似数的误差限之和。由于  $\varepsilon(x_i)$  可正可负, 一般可以互相抵消, 因此  $x^*$  的绝对误差限通常比相加各数的绝对误差限之和小。

相对误差  $\varepsilon_r^*(x)$  则界于相加诸项的相对误差中最大者与最小者之间, 即

$$\min\{\varepsilon_r^*(x_i)\} = \varepsilon_1 \leq \varepsilon_r^*(x) \leq \varepsilon_2 = \max\{\varepsilon_r^*(x_i)\}.$$

事实上, 由于  $\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^k \varepsilon(x_i) = \sum_{i=1}^k x_i^* \varepsilon_r^*(x_i)$ , 故

$$\varepsilon_r^*(x) = \frac{\varepsilon(x)}{x^*} = \sum_{i=1}^k \frac{x_i^*}{x^*} \varepsilon_r^*(x_i) \begin{cases} \leq \varepsilon_2 \sum_{i=1}^k \frac{x_i^*}{x^*} = \varepsilon_2, \\ \geq \varepsilon_1 \sum_{i=1}^k \frac{x_i^*}{x^*} = \varepsilon_1. \end{cases}$$

据此并利用前述定理 1, 2, 就可以进一步討論和的有效数字的位数了。

近似数的加法, 应该按下面例子中所說的方法进行。

例 1. 求近似数 285.35, 196.87, 58.43, 4.96 的和, 其中每一个数都准确到最末一位数字。

$$\begin{array}{r} 285.35 \\ 196.87 \\ 58.43 \\ +) 4.96 \\ \hline 546.61 \end{array}$$

这是一般的算法, 結果中第二位小数可能不准确, 因为結果的绝对誤差可能达到 0.02。舍入成 546.6, 它的绝对誤差限是  $0.02 + 0.01 = 0.03$ , 所以它具有四位有效数字。

例 2. 求 3.150950, 15.426463, 586.3758, 与 7684, 3876 的和, 其中前三个数都准确到最末一位数字, 只有第四个数只准确到小数点后第三位。

$$\begin{array}{r} 3.150950 \\ 15.426463 \\ 586.3758 \\ +) 7684.3876 \\ \hline 8271.340813 \end{array}$$

若按左列办法相加, 結果中虽然保持了六位小数, 但由于最后一个相加的数只准确到小数点后第三位, 相加的結果最多也只能准确到小数点后第三位。所以計算結果中最末两位的工作是沒有意义的和多余的。合理的做法是先将准确小数位数較多的各数都舍入成准确小数位数仅比 7684.3876 的准确小数位数多一位, 即舍入成四位小数, 然后再



$$\begin{array}{r}
 3.1510 \\
 15.4265 \\
 568.3758 \\
 +) 7684.3876 \\
 \hline
 8271.3409
 \end{array}$$

相加。这样求出的和的绝对误差限不超过  $3 \times (0.00005) + 0.0005 = 0.00065$ 。舍入成 8271.34，其绝对误差限不超过 0.005，所以具有 6 位有效数字。

(二) 近似数的乘法。讨论乘法，除法，乘方和开方等运算的结果的误差时，最好用相对误差来讨论。设  $x_1^*$ ,  $x_2^*$  分别是  $x_1$ ,  $x_2$  的近似数。引用微分符号

$$\varepsilon(x_1) = x_1 - x_1^* = dx_1^*,$$

$$\varepsilon(x_2) = x_2 - x_2^* = dx_2^*,$$

则利用微分公式，可有近似的等式

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(x_1 x_2) &= x_1 x_2 - x_1^* x_2^* = d(x_1^* x_2^*) \\
 &= x_2^* dx_1^* + x_1^* dx_2^* = x_2^* \varepsilon(x_1) + x_1^* \varepsilon(x_2). \quad (1)
 \end{aligned}$$

我们利用这个近似等式还是合理的，因为等式  $x_1 x_2 - x_1^* x_2^* = d(x_1^* x_2^*)$  两端相差的只是相对于  $x_2^* dx_1^* + x_1^* dx_2^*$  而言的高阶小量  $dx_1^* \times dx_2^*$ ，故可忽略不计。由(1)就有

$$\varepsilon_r^*(x_1 x_2) = \frac{\varepsilon(x_1 x_2)}{x_1^* x_2^*} = \frac{\varepsilon(x_1)}{x_1^*} + \frac{\varepsilon(x_2)}{x_2^*} = \varepsilon_r^*(x_1) + \varepsilon_r^*(x_2). \quad (2)$$

由此可得结论：乘积的相对误差是各因子的相对误差之和，乘积的相对误差限也不超过各个因子的相对误差限的和。显然，这个性质对于含两个因子以上的乘积也是成立的。

根据这个性质和前述定理 1, 2，可以推知：两近似数  $x_1^*$ ,  $x_2^*$  相乘，若它们各有  $n_1$  位和  $n_2$  位有效数字，则乘积  $x_1^* x_2^*$  一般有  $n = \min(n_1, n_2) - 1$  位有效数字，至少也有  $n - 1$  位有效数字。

为了证明，设  $n_1 \leq n_2$ ，而求证  $x_1^* x_2^*$  具有  $n_1 - 1$  位或  $n_1 - 2$  位有效数字。

设  $a_1, \beta_1, p_1$  依次是  $x_1^*$ ,  $x_2^*$  及  $x_1^* x_2^*$  中的第一位不为零的