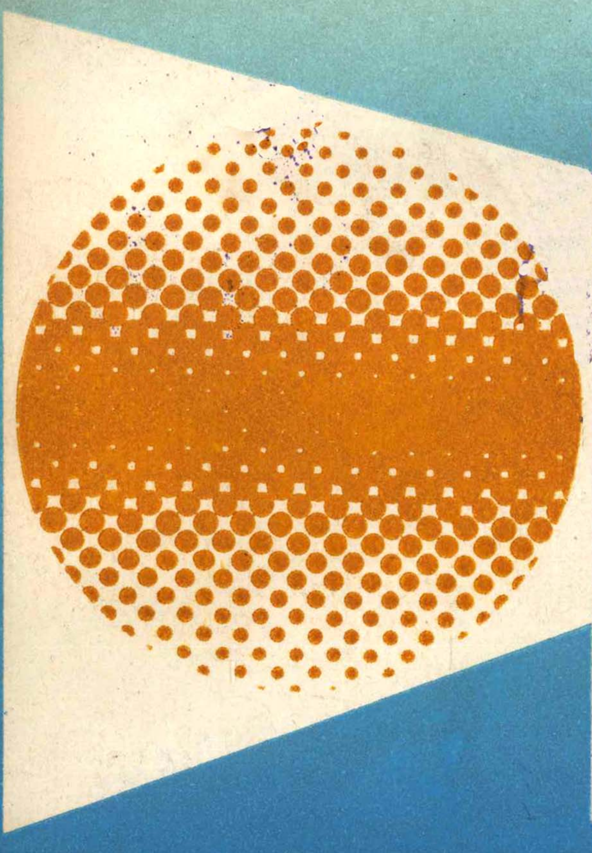
# 常微分方程

蔡　伟　编著



兰州大学出版社

# 常微分方程

蔡 伟 编著

兰州大学出版社

1990·兰州

## 内 容 提 要

本书主要讲了常微分方程的基本概念、一阶微分方程的初等解法和基本定理、高阶微分方程、微分方程组，最后介绍了定性理论和一阶偏微分方程。书末还有“关于矩阵的若当标准形”和“刘维尔定理”两个附录。

整个教材编排严谨，叙述详尽，尤其是一些比较艰深的内容，写得深入浅出，明白易懂。是一本适合于师范院校、教育学院的数学专业、自学者及中学数学教师的教材或参考书。


**常 微 分 方 程**

蔡　伟编著

兰州大学出版社出版

（兰州大学校内）

甘肃省静宁印刷厂印刷　　甘肃省新华书店发行

开本：850×1168毫米1/32　　印张：13.5

1990年9月第1版　　1990年9月第1次印刷

字数：344千字　　印数：0000-3000册

ISBN7-311-00307-5/O·49　　定价：3.38元

# 序

“常微分方程”是高等师范院校数学专业的一门重要的专业基础课，学习这门课程，不仅可以使学生在“数学分析”、“高等代数”等课程中所学得的基础知识得到更充分的应用，而且能够为以后学习“微分几何”、“理论力学”和“泛函分析”等课程提供一些有用的工具和实例.不过,对于未来的中等学校数学教师来说，还有一个不可忽视的问题，这就是：“常微分方程”的学习，应当对他们将后的教学工作，特别是解析几何和高中代数的教学工作，直接有所启发和帮助，而不只是产生一种空泛的“居高临下”的指导作用.多年来，高师院校的不少教师为解决这一问题作了大量的工作，但是就目前的情况看，能够全面体现上述要求的教材尚不多见。因此，这本常微分方程教材的出版，是一件可喜的事情.当然，我们还不能说这项工作已经达到了十分完美的境地，但毕竟是迈出了有意义的一步.

这本书，是作者在多年教学实践的基础上编写、修订而成的.书中除保持了常微分方程传统教材的骨干内容之外，还有选择地吸收了近年来国内外出现的一些新材料、新方法和新的应用实例，因此内容比较新颖，也比较丰富.在编写方法上，作者也作了很大的努力.整个教材编排严谨，叙述详尽，尤其是一些比较艰深的内容，写得深入浅出，明白易懂，处处体现了为读者着想的精神.例如在讲“常微分方程组”时，作者把分量形式和矩阵-向量形式灵活地结合起来，这样既可以减少读者理解上的困难，又可以使表达形式简洁易记.

这本书的两个附录也是很有特色的.关于化矩阵为若当(Jordan)标准形的菲利波夫(филиппов)方法，国内的有关教材尚未作过介绍，它对于常系数线性方程组的求解，是一个有力的工具.刘维尔(Liouville)1841年关于黎卡堤(Riccati)方

程一般没有初等解的著名定理，开了微分方程定性理论的先河，但由于种种原因，在我国的教材中一直没有具体地介绍过这个定理和它的证明，本书恰恰补充了这一空白。

因此，我十分高兴地向师范院校、教育学院数学专业的师生、自学考试的参加者和中学数学教师推荐这本教材，相信它对于提高高师院校“常微分方程”课的教学质量，一定会有所俾益。

苏殿贞

1989年10月

# 目　　录


## 绪　论

§1 常微分方程的实例……………………………（1）
§2 常微分方程的基本概念………………………（8）
　习题……………………………………………（13）

## 第一章　一阶微分方程的初等解法

§1.1 一阶微分方程的几何意义…………………（15）
§1.2 分离变量方程和一阶齐次方程……………（19）
§1.3 一阶线性方程………………………………（31）
§1.4 全微分方程和积分因子……………………（40）
§1.5 导数未解出的一阶方程……………………（49）
§1.6 一阶微分方程的几何应用…………………（60）
　习题……………………………………………（74）

## 第二章　一阶微分方程的基本定理

§2.1 解的存在与唯一性定理……………………（83）
§2.2 方程$y' = f(x, y)$的解的存在与唯一性定理的证明……………………………………（93）
§2.3 解的延拓原理………………………………（100）
§2.4 解对初值的连续性定理……………………（104）
§2.5 解对初值的可微性定理……………………（109）
　习题……………………………………………（115）

## 第三章 高阶微分方程


§3.1 初值问题的解的存在与唯一性定理………… (117)
§3.2 可降阶方程……………………………… (121)
§3.3 线性齐次方程…………………………… (134)
§3.4 线性非齐次方程………………………… (147)
§3.5 常系数线性齐次方程…………………… (154)
§3.6 常系数线性非齐次方程………………… (168)
*§3.7 利用拉普拉斯变换解常系数线性微分方程… (175)
*§3.8 利用算子方法解常系数线性微分方程……… (196)
§3.9 微分方程的幂级数解法和广义幂级数解法… (213)
*§3.10 二阶常系数线性方程的力学应用………… (227)
习题…………………………………………… (236)


## 第四章 微分方程组


§4.1 一般概念………………………………… (244)
§4.2 用消去法解方程组……………………… (249)
§4.3 可积组合与首次积分…………………… (255)
§4.4 线性微分方程组………………………… (270)
§4.5 常系数线性方程组……………………… (289)
§4.6 解的存在与唯一性定理的证明………… (302)
习题…………………………………………… (310)


## 第五章 定性理论简介


§5.1 自治系统………………………………… (313)
§5.2 二维常系数线性方程组的轨线分布………… (326)

§5.3 极限环…………………………………………（334）
§5.4 微分方程解的稳定性……………………………（338）
§5.5 李雅普诺夫直接方法（第二方法）…………（345）
习题……………………………………………（352）

## *第六章　一阶偏微分方程

§6.1 基本概念…………………………………………（355）
§6.2 一阶线性齐次偏微分方程………………………（359）
§6.3 一阶拟线性偏微分方程…………………………（364）
习题……………………………………………（373）
习题答案
附录Ⅰ　关于矩阵的若当标准形
附录Ⅱ　刘维尔定理

# 绪　论

以往，我们已经接触过几种类型的方程，如代数方程、超越方程（三角方程、指数方程、对数方程）等．所谓“方程”，就是一个“条件等式”，其中包含着已知量和未知量．“解方程”，就是在给定的条件下由已知量确定出未知量．

代数方程和超越方程所确定的未知量，是某些特定的值．比如$x^2-1=0$，这里$x=1$或$-1$；$\sin x=0$，这里$x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$．除了这种未知量为数值的方程外，还有一种未知量为函数的方程，它们所确定的，已经不是单个的数值，而是某种函数关系．比如$y^2+\sin^2x-1=0$，这里$y=\pm\cos(x+2k\pi)$（$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$）．我们在数学分析里所遇到的“隐函数方程”$F(x,y)=0$（这里$y=y(x)$，$F(x,y(x))\equiv0$）和$F(x,y,z)=0$（这里$z=z(x,y)$，$F(x,y,z(x,y))\equiv0$以及今后我们会遇到的“函数方程”（如“求满足条件$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$的连续函数$f(x)$”，其中的未知量$f(x)$是指数函数$a^x$），都是未知量为函数的方程．

微分方程也是以函数为未知量的方程，而且可以说是这类方程中最重要的一种．它不仅在数学理论的发展中占有重要的地位，同时在自然科学、工程技术以及社会科学的许多领域中，也有着极为广泛的应用．

## §1　常微分方程的实例

当我们用函数$y=f(x)$（它也可以是多元函数）来反映某种

现象中量的变化情况时，我们往往不能直接建立起$y$与$x$的对应关系，但是能够给出量$x$、$y$与$y$关于$x$的导数$y', y'', \cdots, y^{(n)}$之间的一个关系式，这时我们就得到了一个“微分方程”。

由所建立的“微分方程”，去确定$y$与$x$的直接的对应关系，即确定函数$y=f(x)$，就是“解微分方程”。有时候我们也把这个过程叫做“积分”微分方程。所得的函数，就叫做这个微分方程的“解”。

下面我们来考察几个实例。

**例1**（竖直下抛物体的速度） 把一个质量为$m$的物体从某个高处竖直抛下，除了地球的吸引力之外，物体还受到与速度成正比（比例系数为$k$）的空气阻力的影响。试建立物体的运动速度随下落时间而变化的规律，即确定函数$v=f(t)$。

**解** 由牛顿第二定律，得

$$m\frac{dv}{dt}=F$$

这里$\frac{dv}{dt}$是运动物体的加速度（速度关于时间的导数），$F$是沿着运动方向作用在物体上的外力，这个力是两个力的合力：地球引力$mg$和空气阻力$-kv$（它与速度的方向相反，因而符号为负），于是有

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv. \tag{1}$$

这个关系式包含了未知函数$v$和它的导数$\frac{dv}{dt}$，它是关于未知函数$v$的一个微分方程。解这个方程，意思就是要找一个函数$v=f(t)$，使它满足方程。我们可以很容易地验证，不论常数$C$是什么数，函数

$$v=Ce^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k} \tag{2}$$

都满足方程(1)．这些函数中哪一个给出了我们所要求的$v$对于$t$的依赖关系呢？为了确定它，我们还得利用一个附加条件：假设当物体被下抛时它的初始速度为$v_0$，就是说，函数$v=f(t)$当$t=0$时的值为$v_0$，把$t=0$，$v=v_0$代入公式(2)，得到

$$v_0=C+\frac{mg}{k},\qquad C=v_0-\frac{mg}{k}.$$

这样就确定出了常数$C$．我们所求的$v$对于$t$的依赖关系是

$$v=\left(v_0-\frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}. \tag{2'}$$

由这个式子可以看出，当$t$充分大的时候，初速度$v_0$对于速度$v$的值只有很轻微的影响．

若$k=0$（空气阻力不存在，或很小，以至于我们可以忽略它），那么方程(1)就变成

$$\frac{dv}{dt}=g\ , \tag{1'}$$

而所求的依赖关系，就成了

$$v=v_0+gt, \tag{2''}$$

这可以通过直接代入来验证．

**例 2**（$LRC$电路中的振荡电流） 设有电路如图 1 所示，先将开关拨在 1 处，接通电源，使电容器充电至电压为$E$，然后将开关拨在 2 处，切断电源，使$L$、$C$、$R$形成一个闭合电路．这时电容器开始放电，由于有电感元件$L$的存在，电路中便产生了振荡电流，求电流强度的变化规律．

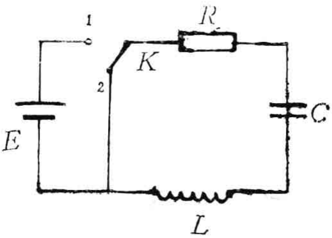



图 1

**解** 以$I=I(t)$表示电路中的电流强度，$V=V(t)$表示电容器两极板间的电压，由欧姆定律，得

$$RI+V+L\frac{dI}{dt}=0,$$

即

$$\frac{dI}{dt}=-\frac{1}{L}V-\frac{R}{L}I.$$

另外，设$Q=Q(t)$为电容器上的电量，由电流强度的定义，$I=\frac{dQ}{dt}$，又$V=\frac{1}{C}Q$，因此有

$$I=\frac{dQ}{dt}=C\frac{dV}{dt},$$

即

$$\frac{dV}{dt}=\frac{1}{C}I.$$

这样我们就得到了一个方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dI}{dt}=-\dfrac{R}{L}I-\dfrac{1}{L}V,\\[2ex]\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{1}{C}I.\end{cases}\tag{3}$$

把(3)式中的第一个式子的两端关于$t$微分，并且把第二个式子代进去，就得到

$$\frac{d^2I}{dt^2}=-\frac{R}{L}\frac{dI}{dt}-\frac{1}{L}\cdot\frac{1}{C}I,$$

即

$$\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dI}{dt}+\frac{1}{LC}I=0.\tag{4}$$

可以验证，当$R^2C-4L>0$时，不论$C_1$和$C_2$是什么数，函数

$$I=C_1e^{\left(-\frac{R}{2L}+\sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}\right)t}+C_2e^{\left(-\frac{R}{2L}-\sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}\right)t}\tag{5}$$

都满足方程(4)。

当$R^2C-4L<0$时，不论$C_1$和$C_2$是什么数，函数

$$I=e^{-\frac{R}{2L}t}\left(C_1\cos\sqrt{\frac{4L-R^2C}{4L^2C}}t+C_2\sin\sqrt{\frac{4L-R^2C}{4L^2C}}t\right) \tag{6}$$

都满足方程(4)。

当$R^2C-4L=0$时，不论$C_1$和$C_2$是什么数，函数

$$I=(C_1+C_2t)e^{-\frac{R}{2L}t} \tag{7}$$

都满足方程(4)。

我们给出附加条件：$t=0$时$I=0$，$E+L\frac{dI}{dt}=0$，就可以把(5)、(6)或(7)中的$C_1$和$C_2$确定下来，从而得到我们所求的$I$关于$t$的依赖关系。

**例3**（曲线方程） 有一曲线，它上面每一点处的切线都与这点的矢径垂直，求曲线的方程。

**解** 设曲线的方程为$F(x,y)=0$。它在点$(x,y)$处的切线斜率为$\frac{dy}{dx}$。这点的矢径的斜率为$\frac{y}{x}$。由于切线与矢径垂直，得$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{y}{x}=-1$，即

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}. \tag{8}$$

容易验证

$$x^2+y^2=C^2 \tag{9}$$

满足方程(8)，它们是一族同心圆。

如果我们要求出这个同心圆族中过点$(x_0,y_0)$的那个圆，可以将$(x_0,y_0)$代入(9)式中，就得$x_0^2+y_0^2=C^2$，从而

$$x^2+y^2=x_0^2+y_0^2 \tag{10}$$

就是我们所要求的曲线。

**例 4**（悬链线） 一根均匀而柔顺的线被悬挂在两个端点处，试求它在自身重量的作用下所形成的曲线的方程。

**解** 假设点$M_0$是这条线的最低点，$M(x,y)$是它上面的任意一点，我们来考察线上的一部分$\widehat{M_0M}$，这个部分在三个力的作用下处于平衡状态（图 2）：

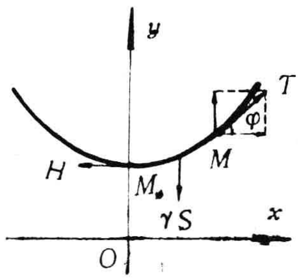



图 2

(1)张力$T$，它沿着$M$点处的切线方向作用，与$x$轴构成夹角$\varphi$；

(2)这段线段的重量$\gamma s$，其中$s$是弧$M_0M$的长度，$\gamma$是这条线的线密度，这个力沿垂直方向作用；

(3)$M_0$处的水平张力$H$。

把张力$T$分解为水平和垂直两个分量，我们就得到平衡方程：

$$T\cos\varphi = H, \qquad T\sin\varphi = \gamma s.$$

第二式除以第一式得

$$tg\varphi = \frac{\gamma}{H}s.$$

设所求的曲线方程为$y=f(x)$，则

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = tg\varphi,$$

因此

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\gamma}{H}s.$$

令

$$a = \frac{H}{\gamma},$$

得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a}s.$$

这里$s$是$\widehat{M_0M}$的弧长，因而仍然与$M(x,y)$有关。

把上式关于$x$微分，得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{a}\cdot\frac{ds}{dx}.$$

由微分学知道，弧长的导数

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

把这个式子代入上面的式子，就得到一个微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{a}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{11}$$

可以验证，不论$C_1$和$C_2$是什么数，函数

$$y=a\operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}+C_1\right)+C_2 \tag{12}$$

都满足方程（11），它们的图象叫做悬链线。

现在我们来确定最低点$M_0$的坐标为$(0,b)$的那条悬链线。因为在最低点处曲线的切线是水平的，因此$\frac{dy}{dx}=0$,这样一来。我们所求的曲线应当满足附加条件：当$x=0$时，$y=b$，$\frac{dy}{dx}=0$。由（12）式得

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{sh}\left(\frac{x}{a}+C_1\right).$$

令$x=0$,得$0=\operatorname{sh}C_1$,因而$C_1=0$。在(12)式中令$x=0,C_1=0$，得 $b=a\operatorname{ch}0+C_2=a+C_2$，因而$C_2=b-a$　于是所求曲线为

$$y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}+b-a. \tag{13}$$

从以上几个实例中，我们已经看出微分方程与科学技术以及数学的其它分支的密切联系。

## §2　常微分方程的基本概念

### 一、微分方程

上一节中我们所得到的几个方程，有一个共同的特点，它们的未知量都是函数，方程中不仅含有未知函数，而且含有未知函数的导数或微分，我们把具有这种特点的方程，称为微分方程.

**定义 1**　含有未知函数的导数或微分的关系式，称为微分方程.

上节的方程(1)、(4)、(8)、(11)都是微分方程.

物理学中所讲的平面上稳定热场的温度分布函数$u=u(x,y)$所满足的方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

也是一个微分方程.

这个方程与上述几个方程有所不同，前几个方程中未知函数都是一元函数，而最后这个方程的未知函数却是一个多元（二元）函数.

**定义 2**　未知函数为一元函数的微分方程，称为常微分方程；为多元函数的微分方程，称为偏微分方程.

在这本讲义里，我们主要讲常微分方程. 为了简单起见，我们往往把常微分方程就叫做“微分方程”，或者直接叫做“方程”.

如果未知函数不是有一个而是有若干个，方程也不是一个而是有若干个，它们构成一个组，我们就把它们叫做微分方程组，上节中的(3)式就是一个微分方程组.

### 二、微分方程的阶

**定义 3**　微分方程中所含的未知函数的最高阶导数（或微

分）的阶数，称为微分方程的阶。

上节中的方程(1)和(8)是一阶常微分方程，方程(4)和(11)是二阶常微分方程，(3)是一阶常微分方程组，本节所举的偏微分方程是二阶偏微分方程。

如果未知函数是$y=y(x)$，那么一个$n$阶常微分方程的一般形式是

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0. \tag{1}$$

应当注意，在上式中，前$n-1$个变元$x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}$可以不出现，但$y^{(n)}$必须出现，否则(1)就不是$n$阶的了。

### 三、线性方程和非线性方程

与代数中线性方程的概念相类似，我们有：

**定义 4** 如果一个微分方程对于未知函数和它的各阶导数来说都是线性的（一次的），就称这个方程为线性微分方程，否则就称为非线性微分方程。

上节中的方程(1)、(4)是线性方程，方程(8)、(11)是非线性方程，(3)是线性方程组，本节所举的偏微分方程是线性偏微分方程。

由定义，一个$n$阶线性常微分方程的一般形式可以写成

$$p_0(x)\frac{dy}{dx^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+p_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+p_n(x)y$$
$$=f(x), \tag{2}$$

其中$p_0(x)\neq 0$。

### 四、微分方程的解

**1．解．**

**定义 5** 如果把一个函数代入一个微分方程后能够把这个方程化为恒等式，就称这个函数是这个微分方程的解，或者说这个