

高等学校试用教材

复变函数教程

朱静航 编

高等教育出版社

高等学校试用教材

复变函数教程

朱静航 编

宋国栋 校

高等教育出版社

内 容 提 要

全书分成八章和两个附录。前五章叙述单变量单值函数的微分、积分、级数、留数理论和应用,第六章论述共形映射,第七章在解析开拓的基础上讲解初等多值函数和黎曼面,第八章讨论调和函数以及复变函数在流体力学上的应用。两个附录分别介绍多元复变函数和复数域的函数逼近的初步知识。

本书可作为高等师范院校数学专业的试用教材使用。

高等学校试用教材

复变函数教程

朱静航 编

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 11.375 字数 275 000

1987年10月第1版 1987年10月第1次印刷

印数 00 001—5,100

书号 13010-01410 定价 2.15 元

序 言

“复变函数论”所研究的对象，主要是复数域里具有解析性质的函数——一种特殊的复变函数类，故亦称“解析函数论”。

复变函数论和其他学科一样，经历了长期积累的过程。它最初孕育于数学分析。它的许多概念、理论以及研究方法，是数学分析里相应概念、理论和方法在复数域的拓广；并在拓广的过程中又出现了许多新概念、新理论、新方法和新应用。从 18 世纪末到 19 世纪前半期，它才逐步发展成为具有独特逻辑结构、完善科学体系的重要数学分支。复变函数论亦称“复分析”。相对地，主要研究实变函数的“数学分析”，又名“实分析”。

关于复变函数的理论和方法，最先在 18 世纪出现于有名的数学家 Euler 的作品中。他曾较详细地研讨过对数函数、指数函数、三角函数和反三角函数等。人们都把他称为复变函数论的缔造人。Lagrange 也是有名的数学家，他继 Euler 之后，系统地讨论和发展了 Euler 的关于幂级数的性质，奠定了幂级数理论的全部基础。到 19 世纪中叶，著名数学家 Cauchy 使复变函数逐步形成为严谨的理论。他系统地研究并发展了积分概念，首创了至今仍在发展的函数结构理论。人们称他为复变函数理论贡献最大的创始人。如 Cauchy 积分理论是复变函数理论讨论的主要课题。Riemann 是对复变函数论有特殊贡献的另一位有名的数学家。他不仅把 Cauchy 未完成的工作予以完成，并创造和奠定了复变函数论的几何理论基础。与此同时另一位有名的数学家 Weierstrass 把函数理论算术化。他重新研究了 Lagrange 关于用级数表示函数的观点，对级数理论作了大量有价值的工作。嗣后 Riemann 和 Weierstrass 的学生们沿着两个不同的方向，形成观点不同的学

派。直到 Cantor 集合论建立后，才使两个观点统一在共同的、坚实的集合论的基础上。

我们知道，任何数学理论的作用和意义，只有在它和客观现实对象相联系时才能最好地表现出来。这种联系由于其具体内容，使理论更加丰富和充实；而随着理论的丰富和充实，它的应用范围又不断扩大。这种联系显然标志着数学理论的生命力。复变函数论的发展也是一样。它的理论一开始就和现实对象流体力学结合起来，因而发展很快。例如，C.-R. 条件(方程)这一判别复变函数为解析的条件，就是 Euler 在研究流体力学时获得的。再如，某些稳定平面场的复势、复速度都是解析函数。势(位)函数就是调和函数，任一调和函数能在物理上表现向量场的势(位)，等等。

复变函数理论的应用范围很广，如应用于代数、解析数论、微分方程、积分方程、计算数学、概率论、理论物理、流体力学、弹性理论、空气动力学、静电场、热场等，并成为解决有关问题的有力工具。由于它的广泛应用，许多新理论、新方法又大量涌现。因此，随着复变函数理论本身的发展及其与其他科学技术的联系，它的内容更加丰富多彩，并且开辟了许多新分支和正在发展的新领域，如复逼近理论、多复变函数理论等，它们的发展正在方兴未艾。

本教程是根据 1980 年部颁教学大纲的要求和学时编写的，鉴于时间有限，只能从大量的内容中选取最基础的内容，即围绕 Euler, Cauchy, Riemann 和 Weierstrass 等人的基础工作，以 Cauchy 理论为中心，围绕解析函数的特征性质(如无穷可微分性、沿闭路积分等于零、展开成幂级数、共形映射等)，来构成本教程的基本内容。这些内容虽说是古典的，但都是最基本的、不可缺少的基础知识、基本理论和基本方法。有的还各自代表不同的分支和科学研究方向。

在这些内容的基础上，还适当引进了这一学科的某些新发展，

为读者提供一些科研方向和课题。如复函数逼近、多复变函数、拟共形映射、整函数与亚纯函数、多项式零点分布等。这些内容尽管是极初步的,但对于巩固和加强理解基础知识,扩大视野,了解发展趋势和科研方向,增强学习兴趣和钻研的积极性,可能都是有益的。这些内容有的加*号,有的作为附录给出,读者可以根据实际情况取舍。

为了高师院校培养目标的需要,第一章从复数的产生、复数构成域、复数无大小讲起,进而建立解析函数概念。第二章从初等函数分类讲起,以 e^z 与 $\ln z$ 为中心,系统地讨论了初等函数的性质。我们把共形映射纳入第六章,把多值性纳入第七章,以分散难点。如果对前两章内容已有些基础,则可以从第三章讲起,用积分定义解析函数,用第四章幂级数定义 $e^z, \cos z$ 等。但对高师院校来说,仍以从头讲起为好。

我们希望教师根据这门课程的部颁教学大纲和时间,围绕各章主题和重点内容,安排课堂讲授重点和课外作业;针对程度不同的学生,提出不同的要求,使绝大多数学生掌握好基本内容;对有余力的学生,鼓励他们学带*号和附录里的某些内容,多作一些习题(或另选习题)①;有些内容可让学生自学。

本教程是在多年使用的讲义基础上,依部颁新大纲(1980年),在新形势下重新改写的。但谬误之处在所难免,务希读者提出批评和指正。在这次改写过程中,承新乡师范学院穆鸿基副教授、吉林工学院刘俊英副教授、东北师大肖荫菴副教授、讲师梁世安等提出过许多宝贵的具体意见,特此一并致谢。

编 者

① 请参考朱静航主编的《复变函数论》(大学自学丛书,辽宁人民出版社,1983)一书的例题和习题解答。

目 录

序 言	1
第一章 复变解析函数	1
§ 1.1* 虚数的产生, i 的引入	1
§ 1.2 复数及其几何表示	3
1° 复数概念	3
2° 复数在平面上的表示	6
3° 无穷远点	11
4° 复数在球面上的表示	12
*5° 球极平面投影变换公式	14
习题(1.1)	15
§ 1.3 平面点集	17
1° 邻域和开集合	18
2° 凝聚点、孤立点	18
3° 两集合间的距离、集合的直径	19
4° B.-W. 定理、H.-B. 定理	19
5° Jordan 曲线	21
6° 区域	22
§ 1.4 复变函数	23
1° 函数概念	24
2° 极限	27
3° 连续性	30
4° 一致连续性	32
§ 1.5 解析函数与 C.-R. 方程	33
1° 导数	33
2° 解析函数	34
3° C.-R. 方程	35
习题(1.2)	40
第二章 初等复变函数	42

§ 2.1 初等代数函数和初等超越函数	43
1°. 代数函数和代数显函数	43
2°. 超越函数和初等超越函数	44
§ 2.2 单叶解析函数	45
§ 2.3 幂函数 $w = z^n$ 与根式函数	45
1°. 幂函数 $w = z^n, n$ 为正整数	45
2°. 根式函数 $w = \sqrt[n]{z}, z \neq 0, n$ 为大于 1 的整数	48
3°. 函数 $w = \frac{1}{z}$	51
§ 2.4* 函数 $w = \frac{z^2 + 1}{2z}$ 及其反函数	54
§ 2.5 指数函数与对数函数	57
1°. 指数函数 e^z	57
2°. 对数函数 $\operatorname{Ln} z$	60
§ 2.6 三角函数和反三角函数	64
1°. 三角函数	64
*2°. 反三角函数	68
*3°. 双曲函数与反双曲函数	69
§ 2.7* 一般的指数函数和幂函数	71
1°. 任意指数的幂	71
2°. 一般的指数函数 $a^z, a \neq 0$	73
3°. 一般的幂函数 $z^\mu, z \neq 0, \mu$ 是任意的复数	73
习题(2.1)	75
第三章 复变函数积分和 Cauchy 理论	77
§ 3.1 复变函数积分及其基本性质	77
1°. 复变函数积分概念和基本性质	77
2°. 复变函数积分的计算举例	82
习题(3.1)	85
§ 3.2 Cauchy 积分 定理	86
1°. Cauchy 积分定理及其 Goursat 证明*	87
2°. Cauchy 定理(复连通区域的情形)	96
3°. 不定积分	98

*4°. 再论对数函数的定义·····	101
§ 3.3 Cauchy 积分公式·····	104
1°. Cauchy 积分公式(边唯一性定理)·····	104
2°. Cauchy 积分公式的推论·····	107
*3°. Cauchy 积分公式的推广·····	108
*4°. 最大模原理·····	109
§ 3.4 高阶导函数的存在·····	111
1°. 解析函数的无穷可微性·····	111
2°. Morera定理及 Goursat 定理·····	114
3°. Cauchy 不等式与 Liouville定理·····	115
4°. 代数基本定理的证明·····	116
习题(3.2)·····	117
第四章 解析函数的级数表达式 ·····	120
§ 4.1 函数项级数的基本性质·····	120
*1°. 常数项级数·····	120
2°. 函数项级数的一致收敛性·····	122
3°. Weierstrass 定理·····	123
§ 4.2 解析函数的幂级数表达式·····	126
1°. 幂级数和 Abel 定理·····	126
2°. 幂级数的收敛半径·····	127
3°. 幂级数和函数的解析性·····	129
4°. 解析函数的幂级数展开式和唯一性·····	130
*5°. 解析函数展开成幂级数的方法举例·····	135
§ 4.3* 用多项式逼近函数·····	138
1°. 解析函数用多项式来逼近·····	139
2°. 解析函数的封闭性·····	141
3°. 关于解析函数的等价定义·····	142
§ 4.4 内部唯一性定理、零点的孤立性·····	142
1°. 解析函数内部唯一性定理·····	143
2°. 解析函数零点的孤立性·····	146
习题(4.1)·····	148
§ 4.5 解析函数的 Laurent 级数表达式·····	151

1°. Laurent 级数	151
2°. 解析函数的 Laurent 展开式	153
3°. 函数在无穷远点的 Laurent 展开式	157
§ 4.6 解析函数在其孤立奇点邻域内的性质	158
1°. 孤立奇点的分类	158
2°. 解析函数在孤立奇点邻域的性质	160
*3°. 有理函数的奇点	165
§ 4.7* 整函数与亚纯函数	167
1°. 整函数	167
2°. 亚纯函数	171
习题(4.2)	173

第五章 留数理论与应用 175

§ 5.1 留数基本定理	175
1°. 函数在有限远点的留数	175
2°. 留数基本定理	182
3°. 函数在无穷远点的留数	184
习题(5.1)	186
§ 5.2 围道积分	187
1°. 形如 $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx$ 的积分的计算	188
2°. 形如 $\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)dx$ 的积分的计算	192
*3°. 形如 $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{imx}dx$ ($m>0$) 的积分的计算	194
§ 5.3 辐角原理、Rouché 定理	198
1°. 对数留数	198
2°. 辐角原理	200
3°. Rouché 定理	202
4°. Rouché 定理的应用	204
习题(5.2)	206

第六章 共形映射 209

§ 6.1 共形映射概念	209
--------------	-----

1°. 解析函数的保域性	210
2°. 导函数的模与辐角的几何意义	211
3°. 共形映射概念	213
4°. 共形映射与解析函数之间的关系	214
*5°. 第二类共形映射	216
§ 6.2 单叶解析函数的映射性质	219
1°. 共形保域性	219
2°. 反函数的存在及其解析性	220
3°. 几个初等函数所构成的共形映射	223
§ 6.3 Riemann 映射定理	226
1°. 共形映射的基本问题	226
2°. Riemann 映射定理	227
*3°. 边界对应定理	228
§ 6.4 分式线性映射	230
1°. 分式线性映射的共形性	230
2°. 分式线性映射的保圆性和对称点的不变性	233
3°. 唯一确定分式线性映射的条件	236
4°. 某些典型区域的共形映射	239
1) 上半平面到上半平面的共形映射	240
2) 上半平面到单位圆内部的映射	240
3) 单位圆域到单位圆域的共形映射	241
4) 圆域 $\Delta_R = \{z: z < R\}$ 变到单位圆域 $\Delta_1 = \{z: z < 1\}$ 的共形映射	242
习题(6.1)	245
§ 6.5 简单区域间的共形映射举例	246
1°. 复合映射	246
2°. 简单区域间的共形映射举例	250
习题(6.2)	255
第七章 解析开拓与初等多值函数	257
§ 7.1 解析开拓	258
1°. 解析开拓概念	258
*2°. 来自实轴上的解析开拓	261

3°. 解析开拓的幂级数方法	264
*4°. 沿连续曲线的解析开拓	266
5°. 奇点和自然边界	267
§ 7.2 对称原理	268
1°. Painlevé 原理	268
*2°. 对称原理	270
§ 7.3 多角形映射	277
1°. Schwarz-Christoffel 公式	277
2°. 两种特殊情况	280
*3°. Schwarz-Christoffel 公式的证明	282
§ 7.4 初等多值函数	286
1°. 多值函数概念	286
2°. 支点和支割线	288
§ 7.5 Riemann 面	290
习题 (7.1)	296
第八章 复变函数理论在其他领域上的应用	298
§ 8.1 调和函数	298
1°. 调和函数与解析函数的关系	299
2°. Poisson 积分与调和函数的基本性质	301
*3°. Laplace 方程的边值问题	306
§ 8.2 复变解析函数的物理意义和应用	311
1°. 复势	312
1) 平面场	312
2) 环流量与复速度	313
3) 源(汇)点、涡点	315
4) 复势	316
*2°. 共形映射在求流动复势时的作用	317
*3°. 飞机翼断面的绕流问题及升力的计算	319
附录 I 多复变函数	326
1°. 基本定义	326
2°. 多复变解析函数概念	327
3°. Cauchy 积分公式	328

4°. 幂级数	329
5°. Taylor 级数	331
附录II 复数域的函数逼近	334
§ II.1 解析函数的逼近	336
1°. 用有理函数逼近有理函数的逼近	336
2°. Runge 定理	340
§ II.2 多项式插值	347

第一章 复变解析函数

在序言里, 我们曾指出这一学科所研究的对象是复数域里的解析函数类. 什么是解析函数? 怎样判别一个复变函数是解析的? 这是本章讨论的主题.

在序言里还说复变函数论最初孕育于“数学分析”, 经过发展又从“数学分析”中分离出来, 并发展成为数学里分析领域的重要分支之一. 它的某些概念如函数、极限、连续、导数等几乎逐字逐句是“数学分析”相应概念的推广或极为类似. 因此, 这一章与“数学分析”相平行地, 从复数构成域、在复数域上定义函数出发, 讨论函数的极限、连续、导数, 进而建立解析函数概念, 从 $f'(z)$ 存在、从偏导数存在且满足 C.-R. 方程来判别 $f(z)$ 的解析性. 在突出主题的同时, 对复数的产生、有无大小等问题作了回答.

在引入解析函数概念之前, 先介绍一些预备知识. 我们从虚数的产生、复数的运算谈起.

§1.1* 虚数的产生, i 的引入

今天, 我们已习惯于负数开平方的运算, 对于虚数及其运算和解方程出现虚根并不陌生. 而历史上对于虚数的产生却出现过截然相反或对立的认识. 人们长时期对于它们的实际意义不了解, 这从它们的名称(虚数)可以看出. 从虚数的地位能在数学上巩固下来到复变函数理论的创立, 其间经历了漫长的岁月. 远在三世纪, 尽管人们能解某些数字系数的一元二次方程, 但对于 $x^2 + 1 = 0$ 这一简单方程却束手无策(那时限于实数范围, $x^2 + 1 = 0$ 自然不能解)

直到 16 世纪 50 年代, 人们在解一般的一元三次方程时, 才发

现了虚数. 如解型如

$$x^3 + px + q = 0 \quad (1)$$

的代数方程, 得出根为

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{R}}, \quad R = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \quad (2)$$

其中 p 与 q 为实数. 人们称(2)为 Carcano 公式. 在实数范围内. 这个公式对于某些方程有效. 例如, 解方程

$$x^3 - 6x + 9 = 0$$

应用(2)能求出一个实根 -3 , 其中 $R = \frac{49}{4}$, $\sqrt{R} = \frac{7}{2}$. 但(2)对于另一些方程便无效. 例如, 解

$$x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x-2)(x+3) = 0$$

时, 显然可得三个实根 $1, 2, -3$. 但因 $R = -\frac{100}{27}$, $\sqrt{R}$ 在实数范围内无意义.

于是人们就突破实数范围这个限制, 创立和引入一种新数——虚数. 经过实践验证, 在新数范围内 Cardano 公式对于解任意一元三次方程都有效, 在实数范围内无解的方程 $x^2 + 1 = 0$ 这时有解了. 嗣后丹麦土地测量者 Westel 给出了复数运算的几何表示. 法国 Argand、德国 Gauss 等人各自给出了复数的几何表示的新论证(后来人们称复平面为 Argand 平面或 Gauss 平面). 正是这种几何表示法, 使虚数在数学中的地位巩固下来. 而在这以前, 它们一直是不可理解的.

直到 19 世纪末, 随着科学技术的发展, 复数概念在流体力学及其他物理学科上被广泛应用, 实践证明了“虚”变量函数的理论, 完全不是虚假的, 而是客观存在与解决实际问题的现实的有力工具之一. 从此复数和复变函数理论不仅在数学里取得了重要地位, 并且由于虚数的产生, 复数的建立, 数域的扩张, 复变函数理论

与实践的密切结合,新理论、新方法和新应用的不断出现,数学也就进入了新阶段.

我们已知虚数 $\sqrt{-4}, \sqrt{-m}$ 等可分别写成 $2\sqrt{-1}, \sqrt{m}\sqrt{-1}$ (m 是实数)的形式. 称 $\sqrt{-1}$ 为**虚数单位**,并用 i 来表示它, $i^2 = -1$. Euler 在他的著作中第一次引入 $i, i = \sqrt{-1}$ ($\sqrt{-1}$ 表示它可能取的两个值中的一个).

§1.2 复数及其几何表示

1°. 复数概念

怎样定义和表示复数?人们依不同的需要创造了多种形式. 19 世纪 40 年代英国 Hamilton 利用“实数对”来定义复数. 所谓**复数**,就是具有一定次序的实数对. 例如: $a, b, c, d, \dots$ 为实数, 则实数对 $(a, b), (c, d), \left(-\frac{1}{2}, \sin 30^\circ\right), (0, 1), (1, 0), (0, 0), \left(\sqrt{2}, -e\right)$ 等都是复数. 我们把 $(1, 0), (0, 0), (-1, 0), (0, 1)$ 分别定义为 $1, 0, -1, i$. 即 $1 = (1, 0), 0 = (0, 0), -1 = (-1, 0), i = (0, 1)$. 从下面定义的运算法则易见, 这样规定是合理的.

设 $\alpha = (a, b), \beta = (c, d)$, 则它们的相等、加法与乘法的运算分别用下列等式来定义;

$$(a, b) = (c, d) \text{ 当且仅当 } a = c, b = d$$

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b), \lambda \text{ 为实数}$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

又设 $\beta \neq (0, 0)$, 置 $\beta^{-1} = \frac{c}{c^2 + d^2} - i \frac{d}{c^2 + d^2}$. 我们称 $\frac{\alpha}{\beta}$ (意即 $\alpha\beta^{-1}$) 为 α 被 β 除的商. 于是

$$\frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \right), c^2+d^2 \neq 0$$

我们把全体复数连同加法和乘法运算一起称为复数系, 记为 C . 依集合构成域的公设, C 构成域:

(i) 它对于加、乘两种运算显然是封闭的, 即两复数的和与积仍是复数:

(ii) 加法和乘法运算满足交换律、结合律和分配律;

(iii) 存在零元 $0 = (0, 0)$ 及幺元 $1 = (1, 0)$ 使

$$(a, b) + (0, 0) = (a, b), (a, b)(1, 0) = (a, b)$$

(iv) 有逆元 $(-a, -b)$ 使 $(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$; 及

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right) \text{ 使 } (a, b)(a, b)^{-1} = (1, 0), \text{ 其中}$$

$$(a, b) \neq 0$$

所以 C 是代数上所谓域的一种.

由上所述, 显然有

$$\begin{aligned} \alpha = (a, b) &= (a, 0) + (0, b) \\ &= (1, 0)(a, 0) + (0, 1)(b, 0) \\ &= 1 \cdot a + ib = a + ib \end{aligned}$$

这里的 $a + ib$ 是复数通常(或古典)的表示形式. 在具体运算中, 这种古典的表示式比数对 (a, b) 要方便, 也易于掌握和记忆. 例如:

$$\begin{aligned} \alpha \pm \beta &= (a \pm c) + i(b \pm d) \\ \alpha\beta &= (a + ib)(c + id) \\ &= (ac - bd) + i(ad + bc) \end{aligned}$$

我们依次称 a 与 b 为复数 $\alpha = a + ib = (a, b)$ 的**实数部分**和**虚数部分**(或**实部**和**虚部**)^①, 分别记为

$$a = \operatorname{Re} \alpha, b = \operatorname{Im} \alpha$$

① 实部(Real part), 虚部(Imaginary part).