自然演绎逻辑导论

ZIRANYANYILUOJIDAOLUN

陈晓平 著

中山大学出版社

第二版前言

关于自然演绎逻辑系统

在这里，笔者将对几个最有影响的自然演绎逻辑系统加以比较，并说明本书所给出的自然演绎系统与它们的相同或不同之处，以及做出这种取舍的原因。此外，还将对本书第一版的修改之处加以说明。

加拿大逻辑学家佩尔蒂埃（F. J. Pelletier）在其文章《自然演绎简史》（1999 年）[①]开宗明义地道出自然演绎逻辑的重要性。他说道："自然演绎是当代哲学家们最为熟悉的一种逻辑，甚至它是许多当代哲学家们关于逻辑所知道的一切。然而，自然演绎却是相当晚近才出现于逻辑学的一个创新"。这一创新"在逻辑史上的重要性不亚于鲁宾逊（J. A. Robinson）于 1965 年发现的分解法（resolution）和弗雷格于 1879 年发现的逻辑方法，甚至不亚于亚里士多德于公元前四世纪发现的三段论。"

自然演绎逻辑的创始人是德国逻辑家根岑（G. Gentzen）和波兰逻辑家雅斯可夫斯基（S. Jaśkowski）。他们两人不谋而合地同在 1934 年各自发表了一篇文章，并且是关于同一个主题即自然演绎[②]。自然演绎的纲领是什么？用根岑的话来说：

> 我的出发点是：逻辑演绎的形式化，尤其是经由弗雷格、罗素和希尔伯特等人发展起来的形式化，与在数学证明实践中所用到的演绎形式是相去甚远的。尽管取得了可观的形式方面的优点作为回报。与此相反，我打算首先建立一种形式系统，它尽可能地靠近实际的推论。其结果就是"自然演绎的演算"。(转引自《自然演绎简史》)

根岑和雅斯可夫斯基都认为，自然演绎的核心是引入假设然后撤除假设的做法。我

---

① F. J. Pelletier, 'A Brief History of Natural Deduction', in *History and Philosophy of Logic*, Vol. 20(1999), pp. 1－31.

② 前者见 G. Gentzen, 'Untersuchungen über das Logische Schliessen', in *Mathematische Zeitschrift* 39(1934), pp. 176－210, 405－431。英译文见'Investigations into Logical Deduction', in M. Szabo, *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, Amsterdam: North-Holland, 1969, pp. 68－31.

后者见 S. Jaśkowski, 'On the Rules of Suppositions in Formal Logic', in *Studia Logica*, Vol. 1(1934)。重印于 S. McCall, *Polish Logic* 1920－1939, Oxford: Oxford University Press, 1967, pp. 232－258.

们知道，弗雷格、罗素和希尔伯特等人发展起来的公理系统，其证明过程是从系统的公理出发，根据少量的推论规则推出一系列定理。与之不同，自然演绎系统没有公理，或者说，可以没有公理，而是通过引入假设（包括前提）作为推演的出发点，运用推演规则推出另外一些命题，并通过撤除假设使这些被推出的命题独立于该假设。当除前提以外的假设都被撤除，所给推论的有效性便被证明；如果没有前提，所证结果便是本系统的一个定理。

依笔者所见，自然演绎系统之所以比公理系统更接近人们的实际推论，其原因是：在人们的推论实践中，逻辑从来都是被作为推论规则用于其他领域的公理或前提之上的，而逻辑真理本身只是推论规则的根据而不是推论的对象。逻辑的公理系统却把人们常用的推论规则大都搁置一旁，而把人们并不太熟悉的逻辑真理作为推论的出发点即公理或推论的目标即定理。与之相反，自然演绎系统则较多地保留了人们熟悉的推论规则，特别是引入然后撤除假设的条件证明规则，从而允许把逻辑真理以外的任何命题作为出发点，也可以把任何命题作为推论的目标，同时把对逻辑真理的推演作为一种特殊情形即无前提证明容纳进来。相比之下，自然演绎系统既符合人们实际运用逻辑推论的习惯，又能达到推演逻辑真理的目的，真可谓“一箭双雕”。因此可以说，自然演绎逻辑系统在很大程度上恢复了逻辑的本来面目。

佩尔蒂埃在其《自然演绎简史》中指出，根岑和雅斯可夫斯基的自然演绎纲领真正得到广泛传播和普遍接受的时间是从20世纪50年代开始的，对于这一局面起到很大促进作用的文献包括科庇（I. M. Copi）的《符号逻辑》（1954年初版）和苏佩斯（P. Suppes）的《逻辑导论》（1957年初版）。① 这两本教科书也是本书的主要参考文献，同时本书参考了近年来美国大学所使用的若干逻辑学教材，其中由伯格曼（M. Bergmann）、穆尔（J. Moor）和纳尔逊（J. Nelson）合著的《逻辑教本》（2004年第四版，1980年初版）② 尤为重要。下面将简要谈一下本书同这三本经典教科书以及根岑和雅斯可夫斯基关于处理自然演绎系统的异同之处。

第一，关于假设域的表示。自然演绎的推论特征是先引入假设然后撤除假设的策略，体现这一特征并为各个自然演绎系统所共有的推论规则是“条件证明规则”（雅斯可夫斯基的术语），亦即“→引入规则”（根岑的术语）。这条规则的每一次使用产生一个子推演，那么，如何把这个子推演表示出来呢？如何标示这个子推演对假设的引入和对假设的撤除？对此，不同的自然演绎系统往往采取不同的方法。根岑给出一种方法即

① 这两本书都有中译本：科庇：《符号逻辑》，宋文坚、宋文淦译，北京大学出版社，1988年；苏佩斯：《逻辑导论》，宋文淦等译，中国社会科学出版社，1984年。

② M. Bergmann, J. Moor, J. Nelson, The Logic Book, 4th edition, New York: The McGraw-Hill Companies, 2004。在后面的论述中，作者只提伯格曼（Bergmann）。

树形方法，但这种方法现在已经很少有人采用了。雅斯可夫斯基给出两种方法，一种是图示法，即把每一个子推演放在一个方框中，被引入的那个假设处于方框内的第一行，方框内的任何一行都依赖于该假设；这也就是说，方框标示出该假设的域，方框外的各行不依赖于该假设或不隶属于该假设域。对于方框外的各行而言，该假设就是被撤除的。

这种图示的方法在菲奇（F. Fitch，1952）① 和科庇以及伯格曼等人那里得到继承和改进，改进的主要之点是只保留方框左边的竖线（菲奇和伯格曼）或竖线两端加短横线和箭头（科庇），竖线的长度标示假设域的范围。本书采纳了柯庇的方式，把竖线上端的横箭头换成短横线，这样做是为了使图示在保持清晰的前提下更为简便。雅斯可夫斯基给出的另一种方法是标记法，即对推演的每一行分别做出标记，用以表明这一行依赖于哪一个假设。这种方法被奎因（W. V. Qine，1950）② 和苏佩斯等人继承和改进。本书没有采用这种方法，因为在笔者看来，这种方法比较麻烦并且容易出错。

第二，关于推演规则。条件证明规则（→引入规则）是每个自然演绎系统共有的，除此之外，不同的自然演绎系统往往采用不同的推演规则。根岑所采用的推演规则都是关于某个逻辑词（联结词或量词）的引入或销除的。具体地说，对于除等值词以外的四个真值函项联结词和两个量词各给一个引入规则和一个销除规则，共 12 条推演规则。这些推演规则在以后的教科书中得到广泛的采用，或者在此基础上略有增减或改变名称。如科庇对根岑的 4 条量词规则全部采用，只是将量词的引入规则改名为“概括规则”，将量词的销除规则改名为“例示规则”，并且附加了一条关于量词否定的置换规则。科庇对根岑的 8 条联结词规则略有增减，并改换名称。如其中的“条件证明规则”和“间接证明规则”分别是根岑的“→引入规则”和“¬ 引入规则”，“合取规则”和“化简规则”分别是根岑的“∧引入规则”和“∧销除规则”，“附加规则”和“二难推论规则”分别是根岑的“∨引入规则”和“∨销除规则”（后者略有不同，它相当于简单构成式二难推论，而科庇采用的是复杂构成式二难推论），“肯定前件规则”是根岑的“→销除规则”。关于联结词规则，科庇比起根岑减少了“¬ 销除规则”而新增了“否定后件规则”、“析取三段论规则”、“假言三段论规则”和“复杂破坏式二难推论”。此外，科庇还增加了 10 条等值置换规则，即双重否定律、德摩根律、交换律、结合律、分配律、假言易位律、蕴涵律、等值律、移出律和重言律。其中双重否定律包含了根岑的“¬ 销除规则”。根岑的推演规则虽然没有这些等值置换规则和其他一些规则，但从他的推演规则可以派生出这些规则，因此，对于根岑的系统来说，这些规则都是逻辑上不必要的。但是，一个明显的事实是，这些规则在实际应用中可以起到简化推

① F. Fitch, *Symbolic Logic*, New York: Roland Press. 1952.

② W. V. Quine, *Method of Logic*, New York: Henry Holt & Co, 1950.

演的作用；或者说，有了它们可以使我们的推论更为自然。

伯格曼的《逻辑教本》关于命题逻辑介绍了两个彼此等价的自然演绎系统即SD和SD+，关于谓词逻辑也介绍了两个彼此等价的自然演绎系统即PD和PD+。其中SD和PD几乎完全采用了根岑的规则系统。SD+则是在SD的基础上增加了由科庇首先增加的前三条推演规则和10条置换规则，PD+是在PD的基础上增加了关于量词否定的置换规则。本书基本采用了科庇的规则系统包括规则的名称。不过，科庇的命题逻辑系统包含21条规则而本书的系统只有20条，少掉的那一条规则是“复杂破坏式二难推论”。另外，科庇关于等值词的置换规则包括两组公式，而本书的那条规则只包括一组公式；科庇关于量词的置换规则即量词否定规则只包括三组公式，而本书的那条规则包括四组公式，并称之为“量词转换规则”。

关于自然演绎的规则系统，雅斯可夫斯基与根岑之间有着明显的区别。首先，雅斯可夫斯基的系统没有把存在量词作为基本逻辑词，因而没有关于存在量词的推演规则。其次，雅斯可夫斯基关于命题逻辑的推演规则并没有给出一个详细的清单，而只是着重给出两个非同寻常的规则即“条件化规则”和“归谬规则”，即科庇所说的“条件证明规则”和“间接证明规则”。这两个规则都引出相应的一个子推演，子推演包括其他规则的应用，这些其他规则被雅斯可夫斯基笼统地称之为“普通规则”，并为他的自然演绎系统所容纳。

这种构造规则系统的做法被奎因和苏佩斯所继承。奎因在他的系统中包括这样一条规则（即TF），允许从给定命题推出任何一个命题或其模式，只要它是被给定命题真值函项地蕴涵的（即重言蕴涵）。我们知道，任何一个重言的蕴涵式都相当于一个推演规则，即其前件真值函项地蕴涵其后件；而重言的蕴涵式是无穷多的，这意味着奎因的自然演绎系统包含无数多条推演规则。与之相似，苏佩斯的自然演绎系统只有三条明确给出的规则：一是规则P，允许在证明过程中随时引入一个假设；另一是规则C.P.，即条件证明规则；再一个就是规则T，它相当于奎因规则TF。不过，苏佩斯又列出一些常用的重言式，作为对规则T的补充说明，但对规则T的应用并不限于这些被列出的重言式。苏佩斯所列出的那些重言式大致与科庇的推演规则相对应。

本书之所以没有采取雅斯可夫斯基、奎因和苏佩斯的规则系统，因为这种规则系统不适合于初学者。初学逻辑的人并不知道哪些蕴涵命题是重言式，当然也就不知道哪些命题是被给定的命题所重言蕴涵的。换言之，如果他们能够准确地判别哪些公式是或不是重言式，那么他们也就不必学习命题逻辑了。

第三，关于存在量词规则的表述。根岑关于量词的推演规则有四条，即全称量词引入（introduction）规则、全称量词销除（elimination）规则、存在量词引入规则和存在量词销除规则。这四条量词规则在总体上得到普遍的接受，尽管在细节和名称上还存在许多分歧。从名称上讲，奎因和科庇等人把这四条规则分别称为“全称概括（generalization）规则”、“全称例示（instantiation）规则”、“存在概括规则”和“存在例示规则”。苏佩斯则把它们分别称为“全称概括（generalization）规则”、“全称限定（specification）规则”、“存在概括规则”和“存在限定规则”。菲奇和伯格曼等人则沿用根岑的叫法。本书采用奎因和科庇的名称，下面的分析将表明，这种叫法更能反映量词规则的本质。

从细节上讲，一个明显的分歧是，存在例示规则是否作为一条关于假设的引入－撤除规则？对此，根岑、菲奇、科庇和伯格曼等人的处理是肯定性的，而奎因、苏佩斯等人的处理是否定性的。① 不过，奎因和苏佩斯对存在例示规则的处理面临一个困境，它违反了关于推演有效性的一个原则，即：一个推演的每一行都是推演所依据的命题的逻辑后承。苏佩斯的规则允许这样的推论：从 $\exists \mathbf{x}\Psi(\mathbf{x})$ 推出 $\Psi(\mathbf{v})$，要求 $\mathbf{v}$ 是一个新的个体词。然而我们知道，“某个具体事物 $\mathbf{v}$ 具有属性 Ψ”不是“有事物具有属性 Ψ”的逻辑后承。为此，苏佩斯不得不把上述有效性原则减弱为：“如果推导中的一个公式不包含歧义名称（即 $\mathbf{V}$），并且它的前提也不包含，那么它就是它的前提的逻辑后承。”② 这就是说，尽管 $\Psi(\mathbf{v})$ 不是 $\exists \mathbf{x}\Psi(\mathbf{x})$ 的逻辑后承，但是由 $\Psi(\mathbf{v})$ 导致的不含 $\mathbf{v}$ 的命题即 $\mathbf{P}$ 则是 $\exists \mathbf{x}\Psi(\mathbf{x})$ 的逻辑后承。这意味着，并非一个有效推演的每一行都是它所依据的那些命题的逻辑后承，只要由它最终可以导出 $\mathbf{P}$。

奎因和苏佩斯所面临的这一困境对于根岑、科庇和伯格曼等人并不存在，因为在他们那里，$\Psi(\mathbf{v})$ 只是作为一个假设而引入的，它不依据任何命题，当然不是也不应是 $\exists \mathbf{x}\Psi(\mathbf{x})$ 的逻辑后承。为此，本书采用根岑、科庇和伯格曼等人关于存在例示规则的表述方式，即把它作为一条假设引入－撤除规则。

第四，**关于一般量词规则的表述**。量词规则是否允许自由个体变项出现于推演中？这个问题也可表述为：用于例示的个体词是否可以是个体变项？对此，以上提到的学者中除伯格曼持否定性的处理外，其他人都是持肯定性的处理。这两种不同的处理方法所导致的不同后果是，后者需要对量词规则给以更多的限制。现以科庇的量词规则为例，他把全称例示规则表述为（所用符号略有改变，以便同本书的规则进行比较）：

$$\forall \mathbf{x}\Psi(\mathbf{x})$$
$$\therefore \Psi(\mathbf{y})$$

其中“$\mathbf{y}$”可以是自由个体变项。本来，运用全称例示规则进行推论是一种最为自然合理的推论，如从“所有人会死”推出“孔子会死”；但是，由于这一规则允许自由个体

① 科庇的《符号逻辑》第四章第二节不把存在例示规则作为假设的引入－撤除规则，但在同章第五节却把它作为假设的引入－撤除规则。鉴于该书把前者称为“对量化规则的初步表述”而把后者作为正式的表述，笔者以后者为依据把科庇归于前一类作者。不过，佩尔蒂埃在其《自然演绎简史》中却把科庇归于后一类作者。

② 苏佩斯：《逻辑导论》，第 104 页。

变项“**y**”出现于结论，这便导致出现某种逻辑错误的可能性。例如，应用这条规则可以进行如下的推演：

$\forall x \exists y(F(x) \leftrightarrow \neg F(y))$

$\therefore \exists y(F(y) \leftrightarrow \neg F(y))$

此推演的结论显然是假的，因为它说的是：有一个体 y 是 F 当且仅当它不是 F；这等于说，y 既是 F 又不是 F。但是，此推演的前提可以是真的。这意味着，这是一个无效推论。为了避免这类无效推论，对这一全称例示规则加以如下限制：公式 $\Psi(\mathbf{x})$ 表示任一命题或命题函项（即开语句），公式 $\Psi(\mathbf{y})$ 表示用“**y**”替换 $\Psi(\mathbf{x})$ 中 **x** 的每一出现的结果，并且这一替换必须满足一个条件，即：如果 **y** 是一变项，凡 **x** 在 $\Psi(\mathbf{x})$ 中自由出现的地方，**y** 在 $\Psi(\mathbf{y})$ 中也自由出现。[①] 以上无效推论便违反了这个限制条件，因为：前提中“$\forall x$”以后的开语句 $\exists y(F(x) \leftrightarrow \neg F(y))$ 相当于 $\Psi(\mathbf{x})$，x 在其中是自由出现的，结论 $\exists y(F(y) \leftrightarrow \neg F(y))$ 相当于 $\Psi(\mathbf{y})$，y 在其中没有自由出现。

请注意，这个限制条件仅当 **y** 为一个体变项时才起作用。如果 **y** 为一个体常项如 a，以上推演成为：

$\forall x \exists y(F(x) \leftrightarrow \neg F(y))$

$\therefore \exists y(F(a) \leftrightarrow \neg F(y))$

这一结论没有包含自相矛盾因而并非一定是假的，事实上，此推论是有效的。究其原因，导致前面无效推论的关键是，用以例示 x 的是变项 y 并且被量词 $\exists y$ 所约束。与之不同，当用以例示 x 的不是变项而是常项，这种情况是绝对不会发生的，因为一个常项不可能被任何量词所约束；相应地，以上赋予全称例示规则的限制条件便成为多余的。

在科庇的自然演绎系统中，这一条件限制不仅是针对全称例示规则的，而且是针对全部四条量词规则的，因为四条量词规则都允许自由个体变项出现。可以设想，如果禁止自由个体变项出现在量词规则中，那将使量词规则得到多么大的简化。[②] 科庇为何要让自由个体变项出现于推演过程中呢？他的说法是：“在为某一给定命题构造有效性的形式证明时，我们由之开始的前提和我们以之结束的结论都是命题。但是，每当使用存在例示或全称概括规则时，中间各行中至少要有一些行必须包含自由变项，并因而成为命题函项而不是命题。”[③]

事实上，科庇所说的出现在前提和结论之间的包含自由个体变项的命题函项（开

① 科庇：《符号逻辑》，第 124 页。

② 事实上，科庇在《符号逻辑》第四章第二节中给出这样一个不含自由个体变项的量词规则系统，只是存在例示规则没有采用假设引入－撤除的方式。科庇把它们称为“初步的量化规则”，而把他在同章第五节给出的容纳自由个体变项的量词规则看作是对前者的扩展。

③ 科庇：《符号逻辑》，第 121 页。

语句）是可以避免的，伯格曼在其《逻辑教本》所给出的自然演绎系统就是如此，它使推演的每一行只出现命题而不出现命题函项，从而禁止自由个体变项的出现，进而使量词规则得以简化。**本书采取了伯格曼在量词规则中禁止自由个体变项出现的做法。**

不过，本书第一版和第二版在对量词规则的表述上并不完全一样，这里涉及表述的简明性和逻辑的严格性之间的张力和取舍。如果说在兼顾简明性和严格性的前提下，旧版本更注重表述的简明性，新版本则更注重表述的严格性。对此，不妨以存在概括规则和存在例示规则加以说明。

本书第一版关于存在概括规则的表述是：

$\Psi(\mathbf{a})$

$\therefore \exists \mathbf{x}\Psi(\mathbf{x})$

而第二版本关于存在概括规则的表述是：

$\Psi(\mathbf{a}/\mathbf{x})$

$\therefore \exists \mathbf{x}\Psi(\mathbf{x})$

新版本的存在概括规则的前提是 $\Psi(\mathbf{a}/\mathbf{x})$，而不是 $\Psi(\mathbf{a})$，$\Psi(\mathbf{a}/\mathbf{x})$ 表示用个体常项 $\mathbf{a}$ 替换 $\Psi(\mathbf{x})$ 中的 $\mathbf{x}$ 的每一次出现所得的结果。这看上去有些别扭，似乎概括之前先要进行例示。这样做的必要性何在？其必要性在于：存在概括规则并不像全称概括规则那样要求其结论不含个体常项 $\mathbf{a}$，也就是说，存在概括规则允许只把前提中 $\mathbf{a}$ 的部分出现替换为 $\mathbf{x}$，使得其结论 $\exists \mathbf{x}\Psi(\mathbf{x})$ 亦即 $\Psi(\mathbf{x})$ 中可以包含 $\mathbf{a}$。为此，当旧版本用前一种方式表述存在概括规则时，必须把这一点作为规则的一部分附加其上。这样处理，尽管在直观上简单明了而且在实际运算中也不会出错，但是从理论上讲是不准确的。因为前提 $\Psi(\mathbf{a})$ 中的复合谓词"$\Psi(\ )$"是不含 $\mathbf{a}$ 的（"$\Psi(\ )$"是通过去掉 $\Psi(\mathbf{a})$ 中 $\mathbf{a}$ 的每一次出现而得到的），一旦结论中含 $\mathbf{a}$，其复合谓词就不是 $\Psi(\ )$ 而是 $\Psi'(\ )$；相应地，所得结论就不是 $\exists \mathbf{x}\Psi(\mathbf{x})$ 而是 $\exists \mathbf{x}\Psi'(\mathbf{x})$。与之不同，新版本的存在概括规则的前提是 $\Psi(\mathbf{a}/\mathbf{x})$，其中的复合谓词"$\Psi(\ )$"可以含有 $\mathbf{a}$，只要结论 $\exists \mathbf{x}\Psi(\mathbf{x})$ 中的"$\Psi(\ )$"含有 a，因为 $\Psi(\mathbf{a}/\mathbf{x})$ 只不过是用 $\mathbf{a}$ 替换 $\Psi(\mathbf{x})$ 中 $\mathbf{x}$ 的每一次出现的结果，并未对"$\Psi(\ )$"有丝毫的改变。由此可见，新版本对存在概括规则的表述虽然显得不那么自然，但却是准确的，而且无需附加任何条款。这种对存在概括规则的表述方式也正是伯格曼等人所采用的。

关于存在例示规则，一个关键的步骤是在 $\exists \mathbf{x}\Psi(\mathbf{x})$ 之后引入新名假设 $\Psi(\mathbf{a}/\mathbf{x})$。如何保证 $\Psi(\mathbf{a}/\mathbf{x})$ 中的个体常项 a 是一个新名呢？本书第一版采取了科庇和苏佩斯共用的方法，即要求 a 不出现在引入新名假设 $\Psi(\mathbf{a}/\mathbf{x})$ 之前的任何一行。这样做的一个后果是，当把新名 $\mathbf{a}$ 作为例示常项时，全称例示的步骤必须在引入新名假设之后才能进行。然而，这一要求在逻辑上是不必要的。实际上，附加于存在例示规则上的这一限制条件可以弱化为：①新名 $\mathbf{a}$ 不出现在前提和任何尚未撤除的假设中；②新名 $\mathbf{a}$ 不出

现在$\exists \mathbf{x}\Psi(\mathbf{x})$中。不过，这种弱化了的条件限制反倒不如强化的条件限制来得简单明了。正因为此，本书第一版采用强化的条件限制，尽管在注脚中给出弱化的限制条件。出于对准确性的重视，新版本的存在例示规则采用了弱化的条件限制而把强化的条件限制作为一种辅助性的策略。

第五，关于常项和变项。常项和变项属于逻辑学中最基本的概念。一般而言，常项相当于专名，变项相当于通名。在逻辑学中还区分了对象语言和元语言，相应地，也就有了对象专名和元专名、对象通名和元通名的区别，亦即对象常项和元常项、对象变项和元变项的区别。不过，在逻辑学的文献中似乎只有元变项（metavariable）成为专门的术语，而其他相关概念只能从上下行文中去辨认。专就这一点而言，并不是什么大问题，但重要的是，不少作者常常将这几个概念在一定程度上混淆起来，其中也包括笔者在本书第一版中的有关处理。

如同科庇的《符号逻辑》以及其他人的一些著作，本书的旧版本不仅引入个体常项（如a、b、c）和个体变项（如x、y、z），还引入命题常项（如A、B、C）和命题变项（如p、q、r），但却始终没有明确地告诉读者：**个体变项属于对象语言（即一阶逻辑）的变项，而命题变项则属于元语言的变项，因为本系统中只有个体变项可以受到量词的约束，而命题变项却不能被量词所约束**（个体常项和命题常项均属对象语言）。在具体做法上，正如把F(a)作为F(x)的一个替换例子，也把$A \wedge B$和$A \rightarrow B$等分别作为$p \wedge q$和$p \rightarrow q$等的一个替换例子。$p \wedge q$和$p \rightarrow q$等由于含有命题变项而成为命题形式，$A \wedge B$和$A \rightarrow B$等由于只含有命题常项而成为具体命题。这些表述给读者造成一种错觉，似乎命题变项如同个体变项一样都属于对象语言。

个体变项如同个体常项可以成为对象语言的元素，因为个体变项可以通过量词的约束而构成对象语言的命题。与之不同的是，命题变项不能像命题常项那样成为对象语言的元素，因为命题变项不能通过量词的约束而成为对象语言的命题，而只能通过元语言中量词的约束而成为元语言的命题。

本书的第一版所面临的一个困境是：一方面，一阶逻辑肯定要把命题形式和推论形式作为研究对象；另一方面，似乎只有把命题变项引入对象语言才能表达命题形式和推论形式，而不限于只能表达具体命题和具体推论。这便是旧版本未把命题变项明确地宣布为元变项的内在原因。为摆脱这一困境，在新版本中提出“常项变项”和“变项变项”的概念（见第八章第一节）。通常所谓的常项在一定意义上也是变项，如数学公式中的系数，它只是相对于自变量是常数，但在不同的场合中系数可以取不同的数值。类似地，命题常项如A虽然在一定的语境下代表某一具体命题，但在不同的语境下它所代表的具体命题可以是不同的。简言之，相对于一定语境，A是命题常项，离开特定语境，A便成为命题变项；这便是“常项变项”的意思。既然如此，只用命题常项（即常项变项）同样可以表达命题形式和推论形式。所以，第二版只把命题常项引入系统，

而明确地把命题变项作为元变项，并用黑体大写字母表示之。同时，用黑体小写字母如**a**代表个体常项的元变项，其值包括a、b、c等对象语言的个体常项；用**x**代表个体变项的元变项，其值包括x、y、z等对象语言的个体变项，等等。这样处理将使我们的表述更为清晰准确。事实上，这样的表述在伯格曼的《逻辑教本》中都已采用，只是没有提出“常项变项”和“变项变项”的概念。

关于命题变项的问题，苏佩斯在其《逻辑导论》中专设一小节加以讨论①。在此，不妨对他关于命题变项的处理作一评论。苏佩斯区分了**语句变项**和**命题变项**：语句变项的值是语句的**名称**，语句变项用大写字母P、Q、R和S来表示；而命题变项的值是语句本身，命题变项用小写字母p、q、r和s来表示。苏佩斯用其他大写字母如A、B、C、D等表示语句本身即命题常项。他的这一区分也可以表述为：语句变项的值域是命题常项的名称，包括“A”、“B”、“C”、“D”等；命题变项的值域是命题常项，包括A、B、C、D等。在此，苏佩斯沿用加引号的方法表示一个词句的名称而不是一个词句本身。作了这种区分之后，苏佩斯认为，对逻辑系统的表述，使用语句变项比使用命题变项更为适当。其理由如下：

(1) 每一个语句Q都是或真或假的。

(1) 中使用了语句变项Q。然而，如果将其中的语句变项换成命题变项q，则在表述上会出现问题。这种替换的结果是：

(2) 每一个命题q都是或真或假的。

现令命题常项A表示：吉伦尼莫死了。用A作为q的例示常项对(2)进行例示后得到

(3) A是或真或假的。

亦即

(4) 吉伦尼莫死了是或真或假的。

(4) 有两个主要动词即“死了”和“是或真或假的”，不合乎句法，因而是无意义的。与之不同，(1)则不会导致这种情形。因为对(1)进行例示的不是命题常项A，而是命题常项的名称“A”，例示的结果是

(5)“吉伦尼莫死了”是或真或假的。

显然，这是一个合乎句法的句子，因而是有意义的。为了不放弃命题变项q，我们也可考虑把(2)改为：

(6) 对于每一个命题q，“q”是或真或假的。

用命题常项A对(6)进行例示的结果是

(7)“A”是或真或假的。

---

① 见苏佩斯：《逻辑导论》，第152～154页。

亦即

(8)“吉伦尼莫死了”是或真或假的。

(8)与(5)相同，这似乎达到用命题变项而不用语句变项的目的。然而，(6)却违反了一个逻辑规则。这个逻辑规则是：**处于引号外边的量词不能约束处于引号里边的变项**。如果允许违反这一规则，那将会出现如下的语句：

(9)对于每一个 q，“q”是字母表上的第十七个字母。

用 A 作为 q 的例示常项对(9)进行例示的结果是

(10)“吉伦尼莫死了”是字母表上的第十七个字母。

显然，这是一个假句子甚至是无意义的。可见，以上挽留命题变项 q 的策略是不成功的，因此，我们应当放弃命题变项 q 而采用语句变项 Q。

笔者认为，苏佩斯的以上论证颇具启发性，但其结论是错误的。其错误的症结在于混淆了引号的两种用法即提及和分组。通常的用法是，给一个词或句加上引号，意味着这个词句是被**提及**而不是被**使用**；被提及的是这个词句的**名称**，而不是使用这个词句的**意义**。如(9)中的引号就是这种用法。另一种用法是，给一个词句加上引号，相当于给一个词句加上括号，它只起分组结合的作用，而不改变词句的意义。如(6)中的引号实际上就是这种用法，因而我们可以将(6)改写为：

(11)对于每一个命题 q，(q)是或真或假的。

在不引起混淆的情况下，括号可以省略。既然(6)中的 q 是一不可分割的整体，所以对它加括号是不必要的。即(11)相当于

(12)对于每一个命题 q，q 是或真或假的。

(12)就是(2)。在这种理解下，用常项 A 对(2)进行例示的结果仍然是(3)，但(3)不相当于(4)，而是相当于：

(13)(吉伦尼莫死了)是或真或假的。

正如处于括号外边的逻辑词是主逻辑词，处于括号外边的动词即“……是或真或假的”是主要的动词。显然，(13)是有意义的。

这样，苏佩斯关于采用命题变项 q 的困惑就被消除了。不过，需要强调，(2)、(11)和(12)都不属于对象语言(即一阶逻辑)，而是属于元语言，既然其中的命题变项 q 是被量词约束的。有鉴于此，笔者主张采用命题变项而不采用苏佩斯所说的语句变项，并把命题变项看作元变项而不是对象变项。

需要指出，苏佩斯采用语句变项的主张是不妥的，因为逻辑学关注的是命题或语句，而不是命题或语句的名称。事实上，如果把(5)中的“吉伦尼莫死了”仅仅当作句子的名称，那么(5)便成为无意义的，因为一个名称无所谓真或假。正确的做法是，把(5)的引号看作括号，从而，(5)等同于(13)。可见，区分引号的两种用法即**提及和分组**是非常重要的。

由以上讨论可以看到，变项和常项尽管是一对常用的概念，但是其用法却并不简单。本书第二版对它们的处理是非常小心的。在正式讨论命题的符号化以前，仍然沿用习惯做法即用小写字母p、q、r、s等表示命题变项，因为此时命题变项是相对于用自然语言表述的命题，即一个字母符号可以代入不同的自然语言命题。然而，在正式讨论命题的符号化的时候，就把原来作为命题变项的p、q、r、s改写为从A到Z的大写字母，并称之为命题常项（亦即常项变项），而用黑体字的大写字母**P**、**Q**、**R**、**S**等表示元命题变项（亦即变项变项）。一个命题常项代表某一自然语言命题，而元命题变项可以代入任何一个用命题常项构成的命题。这一改变之所以必要，因为论域发生了变化：原来只讨论两层语言，即自然语言命题和表示它们的符号；后来则讨论三层语言，即自然语言命题、表示它们的符号命题和可以代入各种符号命题的符号。相应地，原来只需要一种符号即命题变项，后来则需要两种符号即命题常项和命题变项，亦即常项变项和变项变项。这两种变项的意义是不同的，一个是用以代入不同自然语言命题而另一个是用以代入不同符号语言命题；一个属于对象语言而另一个属于元语言。

第六，**关于元理论的处理**。元理论关注一个逻辑系统的整体性质，主要包括语法和语义以及二者之间的关系。应该说，元理论的难度和深度远远高于对象理论，而且，对于掌握推论技巧来说，对元理论的掌握并不是必不可少的。那么，作为一门逻辑导论课是否应当包括元理论呢？如果包括，那么以何种方式进行论述呢？对此，不同的作者有着不同的处理。从近年来美国大学使用的逻辑导论教科书来看，不包括元理论的课本不占少数；甚至苏佩斯的《逻辑导论》也不含元理论。那些包括元理论并以自然演绎为主的教科书中，对元理论的处理大致分为两类。一类是简要地介绍公理系统，从而建立自然演绎系统与公理系统之间的等价关系，进而通过证明公理系统的可靠性和完全性等元逻辑性质来间接证明自然演绎系统也具有同样的性质。如科庇的《符号逻辑》就是如此。另一类是直接论证自然演绎系统的元逻辑性质而不借助于公理系统，如伯科曼的《逻辑教本》就是这样做的。

本书的第一版没有包括对元理论的讨论，第二版则增加了部分元理论即关于命题逻辑的元理论，而没有包括谓词逻辑和模态逻辑的元理论。关于命题逻辑元理论的讨论并非紧跟命题逻辑的章节之后，而是放在谓词逻辑和模态逻辑的章节之后。因为本书作为逻辑导论教材，并不要求读者对元理论有一个全面的把握，而只是为了给出一个范例，让读者通过此范例而对现代符号逻辑的一个基本特征有所了解，这个基本特征是将语法和语义严格区分开来的。在此之前，本书在章节的安排上对语义和语法各有侧重，但未加以严格区分。这对于初学者或许是有益的，因为自然语言中的推论在很大程度上是把语法和语义结合在一起的。事实上，科庇的《符号逻辑》在最后引入元理论之前也是这样处理的。这样做的目的是：**试图把逻辑学教学的可接受性和严格性兼顾起来**。本书关于命题逻辑元理论的讨论在很大程度上参照了伯科曼的《逻辑教本》。不过，由于这

两本书所采用的自然演绎的规则系统有所不同，致使二者在证明过程中的许多细节上有所不同。仅就命题逻辑的元理论而言，本书新增的第八章应该说是严谨的和全面的。

第七，**关于模态逻辑和集合论**。科庇的《符号逻辑》和苏佩斯的《逻辑导论》都设专门章节来讨论集合论。他们对集合论的重视除了其本身的重要性以外，在很大程度上受到历史背景的影响，即现代符号逻辑在其建立过程中是与数学基础的研究密切相关的，而数学基础的重要内容之一就是集合论。这两本教科书试图与数学基础结合起来的目的在它们各自的前言中都已表明，甚至《逻辑导论》标明是作为美国大学本科数学用书，尽管苏佩斯本人是美国斯坦福大学的哲学教授。这两本教科书以及其他大多数逻辑导论教科书都没有把模态逻辑包含进来。然而，自 20 世纪 60 年代以来，模态逻辑取得长足的发展，其标志就是关于模态逻辑的可能世界语义学的建立。可能世界语义学为哲学逻辑的发展提供了一个广阔的平台，使得已经初步建立起来的各个哲学逻辑分支，如道义逻辑、认知逻辑和时态逻辑等有了一个统一的语义学框架，并促进了新的哲学逻辑分支的产生和发展。可以说，在现代逻辑的领域中，哲学逻辑的重要性已经可以同数学逻辑相提并论了。

本书主要是作为人文学科和社会科学学生的教科书，自然地，其侧重点是同哲学结合而非同数学结合。因此，本书没有包括集合论而是包括模态命题逻辑，并且是在自然演绎的框架中将其展开的。把自然演绎方法用于模态命题逻辑的努力早在 20 世纪 50 年代就开始了，其中包括菲奇的《符号逻辑》(1952 年)。本书的模态命题逻辑部分主要参考了康尼迪克（K. Konyndyk）的《模态逻辑导论》(1986 年)①。为了保持全书的一致性，本书对一些技术细节作了必要的调整和修改。

作　者

2005 年 10 月于广州

① K. Konyndyk, *Introcuctory Modal logic*, University of Notre Dame Press, 1986.

第一版前言

现代演绎逻辑的系统很多，但从大的方面可以分为两类，即自然演绎系统和公理系统。自然演绎系统与公理系统的主要区别在于，公理系统中的推演必须以少数几个公理（或公理模式）为前提，而自然演绎系统中的推演则可以以任何命题为前提。这样，对于一个具体推理的证明，在公理系统中，必须首先把该推理转化为一个命题，然后再从公理出发推出该命题；而在自然演绎系统中，则可直接从该推理的前提推出该推理的结论。因此，自然演绎系统比起公理系统来更加接近人们的实际思维，从而应用起来更加简便。本书采用自然演绎系统。

除了采用自然演绎系统以外，本书的另一个特点是把现代逻辑的基础部分与传统逻辑的精华部分有机地结合起来。例如，在传统逻辑中占居核心地位的三段论逻辑，在本书中作为命题逻辑与谓词逻辑的过渡环节；传统逻辑颇为重视的同一律、矛盾律、排中律和充足理由律以及词项（或概念）等内容，在绪论中也给以适当的讨论和处理。

本书所阐述的各个逻辑分支即命题逻辑、谓词逻辑、模态逻辑和三段论逻辑等均为演绎逻辑的基本内容，并且主要是在自然演绎系统的框架内被展开的，故本书名曰《自然演绎逻辑导论》。

本书是作者在多年教学的基础上写成的，其油印本从 1988 年开始作为武汉大学哲学系的教材使用。在此正式出版之前，作者作了进一步的修改和增补。本书不要求读者预先具备任何逻辑基础知识，因此，适用于大学文科学生的逻辑导论课教材，也适合于广大读者自学。

在本书的编写过程中，作者得到武汉大学哲学系张巨青教授和田龙九教授、北京大学哲学系宋文坚教授以及武汉大学哲学系张掌然和孙思等同事的热情支持和帮助。为使本书得以正式出版，武汉大学教务处和社会科学研究处给予了慷慨资助。对于以上诸同志和机构，作者在此一并表示深切的谢意。

作　者

1991 年 4 月于武昌

目　录