实用中小学课堂教学方法大系·中学卷

中学数学

课堂教学方法

KETANG JIAOXUE FANGFA SHIYONG QUANSHU

实 用 全 书

内蒙古大学出版社

EDUCATION

◆实用中小学课堂教学方法大系

中学数学课堂教学方法实用全书

（下）

本书编委会

☆

内蒙古大学出版社

第十一部分

中学数学思维能力的培养与思维方式的训练

◆数学思维的含义和结构

人在学习数学的认识活动中,思维占有重要的地位。数学思维作为结果,指数学知识本身。数学思维作为过程指的是获取数学知识和解决数学问题时的思维过程。数学思维过程是人脑和数学对象相互作用的过程。学生在获取数学知识的思维过程中,以已有的数学概念和事实为基础,通过数学判断和推理等形式来认识数学对象,掌握新知识。学生在解决数学问题的思维过程中,运用已有的数学知识和经验,灵活地处理在新的具体情境下或各种不同的抽象水平上的新问题。

数学思维的对象,可以看作是一个数学概念、规律、方法及其综合形成的知识块所组成的包括横向组合形式和纵向层次发展的知识结构。数学思维结构是个体在数学活动中,以数学知识结构为基础在头脑中建构、形成的具有数学特点的信息操作系统。

数学思维结构是数学思维研究的主体。研究数学思维结构,探讨知识在思维能力形成过程中所起的作用,探讨内容的选择与形成和发展学生数学思维的关系,有助于选择适宜的数学内容,合理编排和处理知识系统以形成完善的教学结构。研究数学思维结构,弄清学生原有的基础,揭示其思维发展规律,有助于运用恰当的教学方法及灵活的教学组织形式开展教学活动,使学生掌握科学的知识结构,形成合理的思维结构。

研究数学思维结构,应着眼于数学思维的主要方面及其相互关系。湖南张天孝老师认为,数学思维包括数学思维方式(内容),数学思维品质,数学思维能力和数学思维方法四个主要方面。

数学思维方式(内容)是对数学思维结果的总结。从这个意义上说数学思维方式是指数学思维过程中知识和信息的吸收、运用、转化和组合的原理,它是学习者在数学活动中学习数学知识和掌握方法的基础上形成的,是数学知识与主体的认识长期相互作用的结果。对数学教学来说,学生的数学思维方式主要是指对应思维、函数思维、可逆思维、空间思维、程序化思维和结构化思维。

1. 对应思维

对应是数学中的重要思维方式,即使在一年级课本中出现的也不少。在计数中每个集合都被它元素的个数对应,在序列中每件东西被它的序号对应。对应对两个集合的等值提供了最简单最直接的计量方法。如果两个集合的各个元素之间能够一对一的对应,它的量是等值的,如果不做一对一的对应,就产生了“多”和“少”的观念。因此,对应的过程是整数结构的基础。在分数问题中量和率的对应,在比例问题中抽象的份数与具体量的对应,在 $a\times b=c$ 这一基本数量关系中,行程问题中的速度、时间、路程,分别对应于商品问题中的单价、数量、总价,工作问题中的工效、时间和总量。对应的思维方式在小学数学学习中有着广泛的应用。

2. 函数思维

函数思维就是人的思维对两个集合间联系的把握。它反映了数学自身的内在联系,是对事物及其关系的变化性、相互联系和相互转化的认识,它要求从联系中去发现数学结论与解题方法。这种思维方式的基本

过程是:从运动和变化中提出数学对象,运用因果、相似关系解决数学问题;将解决结果返回到原来的问题情境中,重视说明数学对象的丰富内容。

3. 可逆思维

数学的许多概念都是成对的,运算也是互逆的。这种相反相成的对立统一关系,反映在人的头脑中就形成了一种可逆思维。思维的可逆性,意味着心理过程中思维方向的转变,即从正向思维转为逆向思维。皮亚杰把可逆思维能力作为儿童智慧发展的重要标志。原苏联心理学家克鲁捷茨的研究也证明凡是数学能力强的学生,在一个方向上形成了联系,就意味着相反的方向上建立了联系,因而他们能迅速地辩认或理解逆向问题,数学能力差的学生则往往感到困难。

4. 空间思维

空间关系是数学的基本内容之一,它与数量关系是有机地联系在一起的,空间思维是头脑中构成物体的空间形状、大小及其位置关系的简略结构,并能将实物的一些操作在头脑中进行相应的思考。

5. 程序化思维

程序化的思维方式是按一定步骤的有序思考。在思考问题时,把任务分解化小为能被清晰感知的组成部分;把过程分解成小步子,找出各步间的逻辑关系。

6. 结构化思维

结构化的思维方式表现为用统一的观点处理数学内容,从相互联系相互作用的内在规律上揭示数学知识。它具有三个显著的特点,即整体性、转换性和自我调节性。研究数量关系的结构形式,可以运用迁移规律解决同构异素问题。某些问题,尽管在具体内容上不同,但实际上都具有相似的结构形式,教学时可以使形式超脱内容,把不同题材中共同的结构形式分离出来,进一步抽象化,并把它符号化,只研究结构形式之间的关系。通过合理的结构去掌握知识,从思维过程上说是简单的,在时间上是经济的,可以减轻学生记忆的负担,提高思维的敏捷性。

由于数学思维方式是数学思维结果(数学内容)的总结,而数学内容是互相融洽的,所以数学思维方式也是融合的,在思维过程中综合起作用。

数学思维品质是数学思维发生和发展中所表现出来的个性差异。在小学数学教学活动中,经常可以发现有的学生思维敏捷,思路宽,有独创性;而有的学生思维呆板,思路狭窄,这就是思维品质的差异。数学思维是数学认识活动的高级阶段,完成这种活动必须而且直接影响活动效率的是数学思维品质。学生数学思维品质的好坏,虽然与遗传因素有一些关系,但主要还是靠学习数学知识和解决数学问题的思维活动的实践中得到锻炼和发展。在小学数学教学中,需要着重培养和训练的思维品质有:数学思维的深刻性、灵活性、独创性、批判性和敏捷性。

思维能力是在一定的思维品质基础上形成的分析问题和解决问题的能力,数学思维能力是数学思维品质在解决问题实践中的具体化。在小学数学教学活动中,经常可以见到有的学生善于思考,领悟力强,思维敏捷、灵活;而有的学生遇到难题一筹莫展,抓不住问题的本质和关键找不到解决门路。这就是思维能力的差异。如果数学思维能力不强,那以即使思维再灵活,再有批判性,到了面对实际问题时也束手无策。在小学数学教学中,需要着重培养和训练的思维能力主要有:数学形象思维能力,数学抽象思维能力,数学收敛思维能力和数学发散思维能力。

思维方法是比思维能力更具体的东西,它是人们思维中处理各种问题的基本方法。思维方法大体上可分为两个层次,一个层次是各科都要用到的逻辑思维方法,如演绎、归纳、分析、综合、类比等等;另一个层次是每个学科自身所特有的基本方法,如数学中的化归方法,模型方法,公理化方法等等。数学思维能力的训练,就是通过数学材料进行智力活动方法的训练。换句话说,数学的学习过程是数学知识内容与数学思维方法的结合。归纳、类比、化归、假设是小学生学习数学常用的方法。

综合上所述,数学思维方式、数学思维品质、数学思维能力和数学思维方法构成了数学思维结构的基本框架。数学思维结构是数学认知结构的最重要的方面,数学认知结构的建构与发展主要是数学思维结构的建构与发展。

数学思维的模式

数学的载体是数、式、图,但数、式、图并不是数学所独有。李白的诗就善用数,他的"飞流直下三千尺,疑是银河落九天"、"白发三千丈,缘愁似个长",脍炙人口。但作为理性与逻辑的考察却十分荒谬:头发再长也不会是庐山瀑布的十倍。因为他是文学的形象思维的模式,而不能用数学的思维模式去理解。即使是与数学有密切联系的物理、化学等自然科学,主要是观察与实验的思维模式,与数学思维也有所区别。我们有理由说,数学是有它突出特点的思维模式。数学思维反映在数学的概念、法则、定理甚至符号之中,反映在数学内容之中,也反映在教与学之中,数学知识错综复杂,千差万别,作为数学思维的模式却很有限,但确是数学的精髓:纵观知识,横看数学,安徽省铜陵县一中朱秀山老师总结数学思维的模式有如下几种:

1. 操作模式的数学思维:数学方法、法则

数学思维的最初级的模式是法则和方法以及公式等的直接运用。如加减乘除的法则,幂的运算法则,整式的乘除法则,等等。表现为"有章可循"可以操作的一种程度。这里讲操作,当然是思维,它们往往并不简单、单纯,常常是多种法则的联合运用,即便是最简单的自然数的加法,也有进位问题,只不过这种思维有相对固定的程式而已。

重要法则的反复操练,不仅可以熟悉数学知识,形成技能,也是练就数学基本功的重要手段。

法则的灵活运用就是技巧,较常用的技巧就是一种方法。方法和技巧是操作模式的数学思维中的较高层次,有理性的参与。方法的运用,提高了法则的效率,方法的发现和运用既要有运用法则的基本功,也需要有必要的变式的训练,还需要教师的指点,更需要学生对法则方法的渐进深刻的理解。仅会法则的刻板运用,至多只不过是一台计算器,至多只感受到数学大海浪花撞击的一点水珠。我国人民历来讲究法则的操练和方法的运用。"熟能生巧"的成语就是这个意思的概括。我国古代的数学经典《九章算术》就包括了202个"术"。这个"术"事实上就是方法。

外国的小高斯,在计算100以内的自然数和时,就成功地运用了"凑整"方法。

在这种模式下,初中的换元法、待定系数法、消元法、十字相乘法等都应属于这个范畴,这个思维模式的直接结果是熟悉数学知识与形成数学技能。

2. 机理模式的数学思维:数学原理

机理模式的数学思维,表现为一种适应范围广、高层次的方法,充满了理性与逻辑性,常以数学原理的形式出现。有时虽然也需"操作",但是从属地位,且不一定有固定的程度。它与操作模式的重要区别是:前者突出"为什么是这样",而后者常表现为"一定要这样"。

中学的数学原理主要有:分析原理、综合原理、反证原理、同一原理、构造原理、等价原理、数学归纳原理、对称原理、分类原理、分解原理、抽屉原理,等等。

我们特别指出的是"反证"和"数学归纳"。这些被称为"数学家最精良的武器"常被认为是"方法"。不错,"反证"和"数学归纳"的运用,常有固定的"程序"一面,但更重要的是它的"机理"。优秀教师在讲述反证法时,都不在"程序"上大做文章,而首先讲叙"林肯当辨护律师"的故事。讲"数学归纳法"时讲多米诺现象,讲成排自行车倒下等问题,就是讲这里的核心"理",而程序只不过是外壳。"反证"实质上是逻辑学中排中律在数学中的运用。"数学归纳"实质上是利用自然数的有序性和传递性进行数学思维。

如果没有经过法则和方法的认真操练,难得扎实的数学基本功,但如果不能上升到数学原理上去思维,思考法则和方法,势必是机械的数学。反过来,如果仅仅是从原理上学习数学,而不是从法则训练的基础上去提炼,则数学原理成为无源之水,无本之木。美国的"新数"运动的失败就在于此。因此,法则的操练和原理的领悟二者不可偏废。

著名学者杨振宁曾将高斯计算100以内自然数和的故事讲给他的孩子们听。大家都懂,也很欣赏,但一年之后都忘了。陈省身教授在谈及此事时,感慨地说:"不同的是,我们了解这个推论的美,听过之后,永远不忘。具有数学意识的人还会举一反三。我们的数学教育就是要培养听过不忘和举一反三的人。"这大概就是杨振宁

之所以杨振宁,陈省身之所以陈省身吧!

数学中的许多概念往往是数学原理的反映,它们常常是在不能让学生作较多操作训练的情况下而让学生接受的,所以概念往往成为学生接受的难点。大多数的概念是"分类"的产物。至于象什么是"排列"什么是"组合"也实在是"构造"的结果。

数学的原理是能够让学生接受的。但用数学原理去思维,去进行数学思维并不是一件简单的事。只有在牢固掌握法则的基础上去揭示、去分析、去领悟。

3.动态模式的数学思维:数学思想

学习数学的最基本的要求是理解,依赖背诵来学习数学是行不通的。如果你要问数学爱好者爱好数学的原因,他们的回答除了"成功"和"有趣"之外,必就是学习数学不需要"死背",而"辛辛苦苦的数学中差生"中的大多数都是企图通过"背诵"得到高分。优生的"有趣"就是数学的魅力,不死背就是要理解。不仅是局部的而且是广泛的融汇贯通,这就是动态模式的数学思维:数学思想。表现为一种辨证性,运动性的和总体形的思维形式。

中学的数学思维有转化思想、运动思想、数形结合思想、优化思想、类比思想、化归思想、极限思想、集合与对应思想、理论联系实际思想、普遍性与特殊性思想,等等。

作为这种模式的数学思维的数学思想,是沟通数学知识与数学知识之间、数学知识与实践之间那种辩证、运动和活化的内在联系的思维形式,具有更深刻的、居高临下的理解知识的思维模式。例如,平面几何里的圆周角、弦切角、圆内角和圆外角,认为都是角的边在运动而得的不同结果,没有必要一一记住这些定义、定理和公式。射影定理、相交弦定理、切线定理、割线定理、切割线定理的关系也是如此。正如我国著名数学家华罗庚教授所说:"学习知识就是一个不断地由薄到厚,和由厚到薄的过程。"这里由厚到薄的薄,不是知识少了,而是精了,就是理解的上升、就是知识的融汇贯通。作为思维,就是通过这种动态模式的数学思维。没有这种思维,就无法学习数学。一个小孩子即使到6—7岁才会数到100个,没有人担心他数到200个时要到10—14岁。人类掌握数学知识也是如此。三、四千年前的古埃及、巴比伦的数学文献中,就把一万(即10^4)称为"黑暗",即这在当时已经模糊不清,不可想象了。10^8是"黑暗的黑暗",被认为是人的智慧所不及的了,公元七世纪,欧洲最有学问的英国修士倍达说:"世界上有很多难做的事情,但是没有比算术四则再难的了。"直到十八世纪,人们对分数的运算仍十分畏惧。1735年,英国一本算术教科书的作者说:"为了照顾学生们……,我们把通常称为分数的破碎数的运算单独叙述。部分学生在看到这些分数时,灰心到就此停止学习,他们嚷声说'不要再往下了!'"可见畏惧到何等程度!现在,被人们称为"信息时代"和"知识爆炸",于是有人说人类的大脑将"不堪重负",既然,人类已经如此轻松地认识了"黑暗"和算术四则及分数运算,人类也必能同样轻松地处理"爆炸"。人类有动态的思维模式,那种"不堪重负"的担心必是杞人忧天。

4.工具模式的数学思维:数学意识

许多优秀学生在领受数学之美,感叹数学之精妙之余,常不由自主地问:数学家如何创造了数学?数学家在处理似乎与数学无关的问题时,他的技法为何如此高超?这种创造,这种处理,就是工具模式的数学思维:数学的意识。的确,不可通约量的出现,无穷小量的矛盾,几个简单悖论的提出和解决,把数学一次又一次推向新的高度。欧拉研究"七桥问题"揭开了近代图论的第一页。集合控制论的创立,更把人类引向电脑时代。

数学意识是人类用数学思维处理问题的方式。数学意识有抽象化意识、量化意识、模型化意识、符号化意识和利用工具意识,等等。数学意识具有数学再生与创造的品格,具有用来解决挑战性问题的能力的品格。

数学意识是一个工作母机,它不仅解决数学问题的本身,而且开辟新的数学领域。正因为如此,数学才如此枝繁叶茂,并且深入社会的每一个角落。当今西方提出"问题解决"正是培养数学意识的做法。

只有提高了数学意识,"工具的数学"才能作为"数学的工具"服务于生产生活与社会活动中。

在数学思维与数学知识的关系上,方法是知识的积累,原理是知识的消化,思想是知识的掌握,而意识是知识的运用。

数学意识是学习者在走出校门若干年后，什么法则都忘记了、什么概念都淡化了，什么公式都模糊了而保留下来的东西，并且是终生受益的东西。

几种思维模式是伴随知识的深入而滚动发展、循环上升的。低层次的数学知识，无论是数学原理或是数学思想，都只能提供一个狭小的阵地。随着数学知识领域的扩大，也为数学思维提供了广阔的空间。也正因为如此，人类才不断地化难为易，化神奇为浅显。

如果一个人仅仅是解决了问题，并不一定表明他思维的高超。除了他知识水平外，还应看他用什么模式的思维去解决的。我们斩头去尾，从中间说起：如果一个初中生，他没有学过"排列与组合"问题，要解决"十个人开会，每人互相握手，一共握手多少次的问题"可能有多种方法。第一种，他在纸上写了张、王、李……等十人的姓名，然后两两配对，一一数之，可得结果；第二种，他把设想中的十人列成一个表，如同比赛的场次表，分类而得，不难得到解决；第三种，他先分析两人开会，三人、四人开会的握手次数，找出人数增加和握手次数的增多的关系，而得到解决；第四种，他把人抽象成点，握手是两点连线，握手次数是十边形的边数与对角线条数的和，从而解决问题。可以说，第一种是握手法则的操作思维，第二种主要是分类或分解原理的机理思维，第三种是运动思想的动态思维，第四种是用抽象化，模型意识的工具思维。一种比一种具有更高的档次。这四种思维模式可概括为：

方法有章可循，原理依理则明，
思想动态联系，意识化为利刃。

也应注意到，即使较低层次的数学知识，也蕴藏着大量较高层次的数学思维模式。但是，如果没有较高模式的数学思维的领悟，必然难以承受较深数学知识的压力。正因为如此，数学思维的引导，具有比数学知识的学习更重要的地位。

◆数学的四种基本思维模式与数学

关于提高学生运算能力的研究成果累累，但是太多且细反而有在庐山云雾中之感，甚至会迷入唯技巧的歧途。所以江苏省南京市江宁县秣陵中学周素华老师提出在解题中以强化思维训练，理出整体控制、顺向探源、逆向思考、发散创新作为四个基本的框架思维模式。

1. 整体控制思维是"三论"（控制论、系统论、信息论）的核心

要实现熟练的整体控制思维就应以牢固的数学基础知识和基本的技能技巧为基础、为标准，注意整体衡量问题所处的主干位置以及可能涉及的知识范围，要避免零枝碎节的纠缠。这样可以大大提高运算的成功率。

例 1 已知：$z_1=1-\cos\theta+i\sin\theta$，$z_2=1+i\sin\theta$，求 $\arg z_1+\arg z_2$。

通过计算 $\arg z_1$ 与 $\arg z_2$ 进行解答，弯子多而繁琐，如果引导学生在复数与三角函数的诸多性质及其联系中定位，从整体上加以控制，就会注意到：

(1) 求得 $\arg z_1$ 与 $\arg z_2$ 对于求 $\arg z_1+\arg z_2$ 只是充分的并非必要的。

(2) z_1 与 z_2。的辐角之和等于 $z_1\cdot z_2$ 的辐角。

由此，便可以发现简便的解题途径。

略解：$\because z_1\cdot z_2=2sin\theta$，

当 $\sin\theta\geqslant0$ 时，$Rez_i\geqslant0$，$\mathrm{Im}z_i\geqslant0\ (i=1,2)$，所以 $\arg z_1+\arg z_2=\dfrac{\pi}{2}$。

当 $\sin\theta<0$ 时，$Rez_i\geqslant0$，$\mathrm{Im}z_i<0\ (i=1,2)$，

所以 $\arg z_1+\arg z_2=\dfrac{7\pi}{2}$。

例 2　若 a、b、c 为实数，$A=a^2-2b+\dfrac{\pi}{2}$，$B=b^2-2c+\dfrac{\pi}{3}$，$C=c^2-2a+\dfrac{\pi}{6}$，证明：A、B、C 中至少有一个值大于零。

由于 a、b、c 的任意性，很难直接判断 A、B、C 值的符号，不妨引导学生进行整体思维，如将 A、B、C 相加，则可得 $A+B+C=(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+\pi-3>0$。于是由上式知道，$A$、$B$、$C$ 至少有一个值大于零。

这样即使枝节问题也可能在整体控制下得到顺利解决，或者可避免忽视问题的存在性而造成失误。

2. 顺向思维在解答数学问题中是经常运用的，引导得当，能收到奇巧的效果。

例 3　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上定义如下：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & \text{当 } x=0,\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \text{当 } x \text{ 是 } (0,1) \text{ 内的有理数},\\ 1 & \text{当 } x \text{ 是 } (0,1) \text{ 内的无理数},\\ 0 & \text{当 } x=1。\end{cases}$$

若已知 $f\{f[f(x)]\}=\frac{1}{2}$，那么 x 是怎样的数？

分析及简解：$f\{f[f(x)]\}\Rightarrow\frac{1}{2}\Rightarrow f[f(x)]=0\Rightarrow$

$f(x)=1\Rightarrow x$ 是 $(0,1)$ 内的无理数。

本题解题的过程就显示了从外至内层层脱去所有 f 的过程，这是一种典型的顺向的程序化模式。有时在使用穷举法、类比法、结构代换等时，往往都可进行顺向思维。

3. 逆向思维在解题过程中同样具有举足轻重的作用

一般地说，顺向思维受阻或头绪繁琐的情况下，就应该迅速向逆向思维转换。

例 4　如果二次函数 $y=mx^2+(m-3)x+1$ 的图象与 x 交点至少有一个在原点的右侧，试求 m 的取值范围。

若从正面求解，要分别就“两交点均在原点右侧”，“一个交点在原点右侧”等情况一一解答，这样做虽然能行得通，但运算繁琐，为此可引导学生从反面思考。

解：当函数图象与 x 轴的交点均不在原点的右侧时，由一元二次方程有两非正实数根的条件，得：

$$\begin{cases}\Delta=(m-3)^2-4m\geqslant 0\\ \dfrac{3-m}{m}\leqslant 0\\ \dfrac{1}{m}\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m\geqslant 9\text{ 或 }m\leqslant 1\\ m<0\text{ 或 }m\geqslant 3\\ m>0\end{cases}$$

因此得 $m\geqslant 9$。其对立面为 $m<9$，但因为是二次函数，所以 $m\neq 0$，且与 x 轴有交点，故 $\Delta\geqslant 0$，即 $m\geqslant 9$ 或 $m\leqslant 1$。于是，二次函数图象与 x 轴的交点至少有一个在原点右侧的条件是 $m\leqslant 1$ 且 $m\neq 0$。

例 5　解不等式 $\sqrt{5-4x-x^2}\geqslant x$.

本题如顺向求解，就得需要解两个不等式组再求并集，但右引导学生从反面求解，就能化难为易。

解：设全集 $I=\{x|5-4x-x^2\geqslant 0\}=\{x|-5\leqslant x\leqslant 1\}$。

由 $\sqrt{5-4x-x^2}<x$，得：

$$\begin{cases}5-4x-x^2\geqslant 0\\ 5-4x-x^2\leqslant 0\\ x\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\left\{x\left|\frac{\sqrt{14}-2}{2}<x\leqslant 1\right.\right\}\text{。令其为}$$

A。

据此即得原不等式的解集应是 A 的补集 $\overline{A}$，

$$\overline{A}=\left\{x\left|-5\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{14}-2}{2}\right.\right\}\text{。}$$

此外如用逆向猜想法、减元法、降次法、旋转变换等都可找到思维逆向的本质。

4. 发散(多向)性思维具有独创品质

如在教学中引导学生多侧面、立体式的思维，可以简化运算过程。

例 6　已知 $a,b\in R$，

$$A=\left\{(x,y)\left|\begin{cases}x=1+a\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}a\neq 0,\theta\in R\right.\right\},$$

$$B=\left\{(x,y)\left|\begin{cases}x=t\\ y=mt+b,\end{cases}m,t\in R\right.\right\},$$

问是否存在实数 a,b，使 $A\cap B\neq\varnothing$ 总成立？

初知 A 表示椭圆 $\frac{(x-1)^2}{a^2}+y^2=1$ 上的点集，B 表示直线 $y=mx+b$ 的点集。要使 $A\cap B\neq\varnothing$，只须椭圆方程和直线方程联立的方程组恒有实数解。但这样运算量大，因此可以引导学生利用数形结合的思想方法，可知本题等价于过点 $(0,b)$，斜率为 m 的直线 $y=mx+b$ 与椭圆 $\frac{(x-1)^2}{a^2}+y2=1$ 恒有公共点，只须点 $(0,b)$ 落在椭圆内或椭圆上。

简解：欲使 $A\cap B\neq\varnothing$ 总成立，由题设只须点 $(0,b)$ 落在椭圆内或其上。故 $\frac{(0-1)^2}{a^2}+b^2\leqslant 1$。所以当

$-\frac{\sqrt{a^2-1}}{|a|}\leqslant b\leqslant\frac{\sqrt{a^2-1}}{|a|}$ $(|a|\geqslant 1)$ 时总有 $A\cap B\neq\varnothing$。

类似一题多解、添辅助线、结构代换等解题技巧，大都可以从发散思维派生出来。

◆数学思维教育对提高人的素质的意义

数学是一门思维的科学，由于它的高度抽象、逻辑性强和不断创造新的精神产品的特征，深刻地影响着人们的思维习惯和思维抗议式。同时，数学思维不仅仅是一种数学现象，而且是一种深刻的文化现象。江西余干二中周鸿生老师总结数学教学中的思维教育对提高人的素质的作用是：

1. 数学思维教育可以促使人的先天素质得到发展，使人的生理、心理素质得以显化出来，即使人的固有的内在本性外化出来

人的遗传素质虽有差别，但它并不是人的发展中的决定因素。在不同环境特别是教育的影响下，人的遗传素质可以向肯定的方向或否定的方向发展。而数学思维教育则在人的先天素质的外化和发展的过程中起着独特的作用。

(1)从数学学习的特点来看。数学是思维的科学，学生学习数学知识基本上是在演绎体系下展开的，数学学习中的“再创造”比其它学科要求更高，需要较强的逻辑推理能力；同时，数学是高度抽象概括的理论，比其它学科更抽象、更概括。其概括程度之高，使数学脱离了具体实物，仅考虑形式的数量关系和空间关系。有人把

数学誉为“思维的体操”,“用符号表示的哲学”。数学的这些不同于其它学科的特点,使数学思维教育在外化和发展人的先天的素质的过程中起着其它学科、其它形式的教育所不能替代的作用。

(2)从数学思维教育的特点来看。探索是数学思维教育的生命线。数学必须注意揭示知识的发现过程,揭示知识从已知到未知的激烈而曲折的矛盾运动,注意点拨和引导学生的思维,真正把数学作为思维科学来教学,把数学知识作为砥砺学生智力的磨刀石,这必将对外化和发挥学生的先天素质起着难于估量的作用。

(3)从人的思维发展的特点来看。儿童从出生到成人,身心发展是一个由低级到高级,由量变到质变的连续不断的发展过程。童年期的学生的思维特点具有较大的具体性和形象性,少年期的抽象思维已有很大的发展,青年期抽象思维则已居于主导地位。数学以抽象性和逻辑性的特点,顺应人的思维发展规律并为这种发展提供了最理想的强有力的工具,决定了它在促进人的思维素质发展过程中的独特作用。

2.数学思维教育可以使人类在历史进程中所形成的固有本质转移于新生的个体中,即使人类的固有本质内化于个体

(1)从数学思维是一种人类文化现象来看。美国数学家克莱因说过:“数学是人类最高超的智力成就,也是人类心灵最独特的创作。音乐能激发或抚慰情怀,绘画使人赏心悦目,诗歌能动人心弦,哲学使人获得智慧,科技可改善物质生活,但数学却能提供以上的一切”。数学是一个巨大思想的历史,它包括数学知识的演变,创造这些知识的人,产生这些人和这些知识的客观条件,还有这些知识的社会作用,与人类其它文化领域的相互影响,可见数学是一种历史的、社会的、文化的现象。要使学生认识到这一点并非易事。只有进行数学思维教育,在日常教学渗透这种文化观点和历史观点,不是把数学当作纯粹技巧的堆砌而是当作思维科学,不是把数学仅仅当作一种数学现象而是当作一种文化现象,我们才能培养出不但有才和学、而且有德和识的人才。这种教学的必然结果,是使历史长河中形成的人类的本质内化到人体上来。

(2)从中华民族的素质来看。民族素质不仅取决于每个国民的素质,它还包括一个国家一个民族在长期的历史进程中所形成的民族特性。这些素质作为民族意识通过民族文化世代传递下来,形成自己的特色。整个民族的素质既依赖于个人的素质,而又构成个人素质发展的条件。中华民族勤劳、勇敢、坚韧不拔、敢于自立于民族之林而著称于世。数学思维教育所需要的非智力品质,如兴趣、情感、意志等,则恰恰是我们民族素质的重要组成部分。数学思维教育为这些素质内化到个体提供了肥沃的土壤。

3.数学思维教育有利于我们按照一定社会的要求造就合格的社会成员,这是将外在特定的社会本质对象化于个体的过程,即个体社会化

社会主义教育的根本目的,是提高人的素质,即培养为社会主义现代化建设服务的、德智体全面发展的合格人才,数学思维教育对提高社会主义现代化建设中的公民素质究竟有什么意义呢?

(1)从数学思维教育在德育中的作用来看。数学思维的逻辑性与组织性,是数学对于一般文化修养所提供的不可缺少的素养。它能潜移默化地培养青年人树立一系列具有道德色彩的特性。这些特性中包括正直、诚实、遵纪守法的习惯,尊重真理的习惯和严肃认真的工作态度;数学思维的深刻性、批判性、创造性则能培养人坚韧不拔的意志,敢于打破陈规陋习和勇于开拓的创造精神;数学思维中审美能力的培养,则能培养人们具有正确的审美观点、高尚的情操、文明的行为习惯以及朝气蓬勃的精神面貌。在数学教学中通过思维教育来进行德育,尽管是摆在我们面前的一个有待开拓的新课题,但它的前景是非常广阔的。

(2)从数学思维影响人的思维方式来看。数学中的抽象思维,要求我们从本质上看问题,对于复杂的事物、现象,能有意识地区分主要因素与次要因素、本质与表面现象,从而抓住本质解决问题;数学思维中的整体意识,影响着人们由着重对事物单方面的研究,转向着重对事物多方面的整体研究,由着重对事物实体的研究,转向着重对事物的各种类型的联系和结构的研究;数学思维中的化归思想,意味着用联系、发展的运动变化观点观察问题、认识问题,要求人们有意识地对问题进行转化,变为已经解决和易于解决的问题。数学思维能力的意义,已经超

越了数学的范围本身,它影响着人们运用科学的思维方式去考虑问题、处理问题。一个具备了数学思维能力的人,看问题时一定会从全局上把握,并注意整个问题的各个细节及它们之间的联系,善于抓住问题的实质,把不容易解决的问题分解、转化为易解决的问题,这正是现代社会公民所应具备的思维素质。它对于我们在改革开放中,破除陈腐的传统观念和落后的思维方式,形成适合新形势的新观念及思维方式,具有深刻的意义。

(3)从数学具有方法论的意义来看。按照马克思的看法,一种科学只有成功地运用数学时,才算真正达到完善的地步。在当前科学日益数学化的时代,数学已经成为一种应用十分广泛的、横向联系的公共研究方法。数学在自然科学中的作用,自不待言。历史学引进数学方法,产生了计量史学;语言学引进数学方法,产生了数理语言学、计算语言学;在文学领域里,可用数学方法对艺术作品作结构分析等。另外,在哲学、法学、社会学、心理学、经济学、科学学、考古学、人类学等领域都可以找到数学的足迹。可见,数学方法及其思维对提高各类专业人才的素质的作用是无法估量的。

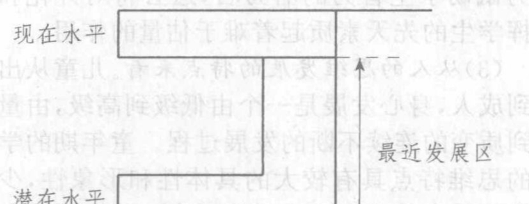
◆思维的"最近发展区"及其开发

当前,培养学生数学思维能力的问题越来越引起广大数学教育工作者的重视。随着现代数学教育改革的不断深入,数学思维的培养和训练日益成为人们关注的热点。实践证明,数学教学因素是促进数学思维的发展的一个重要的可控制因素。具体到数学思维能力的培养,我们不仅要整体把握,更要有一种层次性把握,使数学教学既非轻而易举让学生感到乏味也非高不可攀令学生丧失信心。因此,中科院自然科学史研究所付海伦等老师研究认为思维"最近发展区"思想有利于数学思维能力的形成和螺旋式地向前发展:

1.思维的"最近发展区"即"教学的最佳期"

"最近发展区"是前苏联心理学家维果茨基提出的,其涵义即指学生的潜在发展水平,在此水平上,学生还不能独立地完成学习任务,但经启发、帮助和努力,就能完成任务。因此,"最近发展区"就是经过努力后所达到的较高一层的智能发展区。

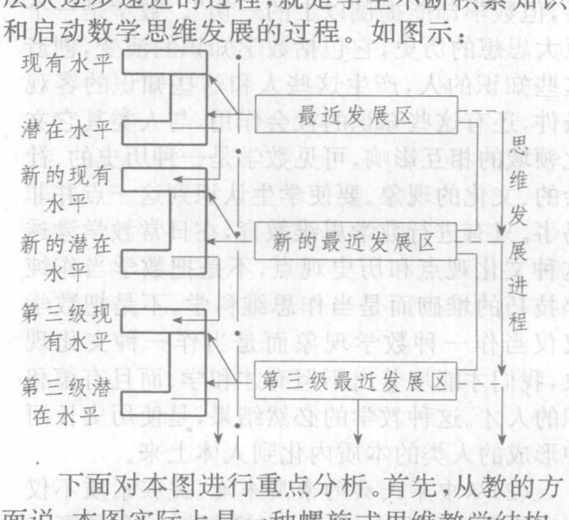
"最近发展区"的基本点在于"发展"。维果茨基认为至少可以确定学生有两个发展水平,第一个是现有发展水平,是由已完成的发展程序的结果而形成的学生心理机能的发展水平,表现为学生能独立地、自如地完成教师提出的智力任务;第二个就是潜在发展水平,是那些尚处于形成状态,表现为学生还不能独立地完成任务,但在教师帮助下,在集体活动中,通过训练和自己的努力才能完成智力任务。这两个水平之间的幅度即为"最近发展区"。如图所示:



他认为这两种水平之间的"最近发展区",是"教学的最佳期"。在"教学最佳期"进行的教学是促进学生发展的最佳教学。

2.思维教学就是不断地将"最近发展区"转变为"现有水平"的螺旋式向前发展的过程

数学思维能力的形成必须是依靠数学知识基础上的发展运动,数学思维的教学应从学生的思维的潜在水平开始,通过教学把潜在水平转化为新的现有水平,在新的现有水平的基础上,又出现新的思维潜在水平,并形成新的思维最近发展区,于是教学又从新的思维潜在水平开始……这种循环往复不断转化和思维发展区层次逐步递进的过程,就是学生不断积累知识和启动数学思维发展的过程。如图示:



下面对本图进行重点分析。首先,从教的方面说,本图实际上是一种螺旋式思维教学结构。

数学思维能力的形成和发展，就应该采取这种螺旋式优化教学结构。因为通过数学基础知识的学习，学生首先就具有了数学基本技能，容易转化为一般的数学能力，关键的问题是了解学生，分析他们的思维结构，看他们的现在水平如何，潜在水平怎样，从而找出“最近发展区”，然后组织从潜在水平开始的思维教学。下面举一例说明：

例 1 将函数 $y=f(2x)$ 图象上所有点的横坐标向右平移 1 个单位，得到图象的解析式是什么？

这个问题实际上就是分辨应得 $y=f(2x-1)$ 还是 $y=f2[(x-1)]$ 的问题。为此，解决本题应首先选择学生熟悉的三角函数。学生的现有水平是将 $y=\sin x$ 图象上所有点的横坐标向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，画出图来容易得到解析式为 $y=\sin(x-\frac{\pi}{3})$，而潜在水平是由 $y=\sin x$ 的图象过渡到 $y=\sin 2x$ 的图象，这中间就有个“最近发展区”，教学就可以从潜在水平开始，分析离到 $y=sin2x$ 图象上所有点的横坐标向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位后得到的解析式为 $y=\sin 2(x-\frac{\pi}{3})$，这样就使之达到一个新的现有水平。在此基础上，对比所求的问题，又会出现新的潜在水平。即由函数 $y=\sin 2x$ 的图象到函数 $y=f(2x)$ 图象性质的过渡，从而又形成了新的最近发展区，然后教学又从新的潜在水平开始……如此循环往复，螺旋上升，问题即可迎刃而解，学生的知识不断积累，思维能力也趋于形成和发展了。

其次，从学的方面考虑，上述结构，学生在不断地完成“平衡—不平衡—平衡”的过程，并在此过程中不断得到心理上的满足，这种状态的多次重复便会产生某种心理需要，是构成兴趣、情感、意志的基本因素。学生之所以对数学学习产生厌倦感，很大原因在于教师不真正了解学生，老师教学仅仅停留在学生现有水平上，没有挖掘他们的潜能，从潜在水平开始的“最近发展区”的教学，由于学生接触到的知识刚好符合自己思维的“最近发展区”，他们经过努力使问题得到圆满解决，就会感到解答问题的极大乐趣，同时数学能力的形成也处于内驱力的兴奋状态，西方心理学著作中称“内驱力是一种唤起的内部激动状态”。这样教学的结果，会使学生始终保持在一个旺盛求知的氛围里，并从解决问题的过程中得到成功的情绪体验，从而产生较为稳定和持久的兴趣。

3. 思维教学的关键在于对学生最近发展区的开发和创设

数学思维的教学，必须重视研究学生的“最近发展区”，这是优化学生的思维品质、提高思维能力的重要手段之一，重视对学生最近发展区的开发和创设研究，将会明了学生在学习数学过程中的各种阶梯和困难，从而把握“教学的最佳期”，给学生的数学方法及思维途径以有效的指导。那么，如何在数学思维教学中开发和创设最近发展区呢？

(1)对难建立的数学概念要唤起学生对已有知识的联想。前苏联教育家苏霍姆林斯基认为：实践证明，当课堂上所讲的教材里既包含一定“份额”的已知的东西又包含一定“份额”的新的东西，才能唤起建立在思维本质上面的稳定的兴趣……。揭示出已知的东西与新东西之间的内部的深刻联系，这是激发兴趣的奥妙之一。讲授新课要唤起学生对原有知识的回忆和联想，培养能力也要以原有能力为基础，尤其是对抽象难以建立和接受的概念更应如此。例如讲反正弦函数，可先回忆反函数的概念，突出反函数存在的条件是一一映射，在此基础上，针对正弦函数 $y=\sin x$，对 x 施加什么条件，与 y 才是一一对应的？这样以旧寓新　新旧相融，不仅搞清了反正弦函数的本质，而且便于记忆和应用。

(2)把教学层次和要求设置在学生的最近发展区。教学就是把学生的“最近发展区”转化为“现有水平”的过程，教学层次和要求要从学生的思维水平和知识水平出发，妥善地安排其学习内容，既非轻而易举使学生感到乏味，贻误了学生思维向高一级发展的时机，也不能大大超过学生的智能“最近发展区”。使学生高不可攀而丧失信心。应该把教学层次和要求设置在学生的“最近发展区”，让学生“跳起来摘到果子”。例如“将复数的代数式化为三角式”这一节，其内容是学生力所能及的，如果要让学生解决问题，就不能简单提出：“怎样把复数的代数式化为三角式？”这样太抽象、太空洞的问题，学生会感到束手无策，如果换一种方式提问：“已知 a 和 b 为不同时为零的实数，求 r 和 θ，使得 $a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)(r>0,0\leqslant\theta<2\pi)$”，则属于学生能力的最近发展区，学生通过努力，最终能够“跳起来摘到果子”。

(3)重视解题策略和方法训练，顺利实现知识和方法的迁移。学生这所以感到某个内容难学，问题难解，主要是由于该内容或问题的抽象程度高，综合性强，若离开学生现有思维水平越远，则难度越大，为减少这种思维的跳跃性，适当地采取一些解题策略或方法训练是很有必要的。比如采取“以退求进”、化归、模型化等策略，

安排预备练习,采取“铺垫”等做法,有意识地为学生的后继学习作好准备,增设阶梯,使“较远发展区”转化为依次递进的“最近发展区”。

例 2 二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根 n 次方的和以 S_n 求证:$S_n=-\frac{bS_{n-1}+cS_{n-2}}{a}(n=3,4,5,\cdots)$。

分析:要直接找出问题解法是困难的,为此应给学生创设一个最近发展区,先“退”到简单的情况:$n=3$,以探求途径。

设方程两根为 x_1、x_2,则 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$,$x_1x_2=\frac{c}{a}$。

$\therefore S_3=x_1{}^3+x_2{}^3=(x_1^2+x_2^2)(x_1+x_2)-x_1x_2(x_1+x_2)=S_2(-\frac{b}{a})-\frac{c}{a}S_1=-\frac{bS_2+cS_1}{a}$

由 S_3 的启示,可找到解题的途径,即可循着这条途径“进”到 S_n:

$\therefore S_n=(x_1^{n-1}+x_2^{n-1})(x_1+x_2)-x_1x_2(x_1^{n-2}+x_2^{n-2})=S_{n-1}(-\frac{b}{a})-\frac{c}{a}S^{n-2}=-\frac{bS^{n-1}+cS^{n-2}}{a}$

本题通过“以退求进”的做法,为学生解题创设了最近发展区,若不先“退却”,一时很难想到上述这种变形技巧。

数学思维与数学教学内容、方法的层次性

同样采用的同一本教材,上得同一节课,不同思维素质的教师去讲,产生的效果为什么会出现如此大的悬殊呢?究其根源,这就反映出数学教学内容、方法的层次性问题,同时伴随着数学思维能力的层次性问题。山西省吕梁地区教育局教研室刘应平老师着重从如下几方面研究了数学思维与数学教学内容、方法的层次性问题。

1. 数学教学内容、方法的层次性

(1)什么是层次。层次就是在自然界长期发展和演化过程中,物质运用由简单到复杂、由低级到高级、由量变到质变,由无序到有序,逐渐形成的类似阶梯样的序形。每一节阶梯在实际中都是展开了一个面,所以每节阶梯都可以看作一个层次,这样由低层到高层渐次形成了今天的自然和社会。我们把这种现象称为层次性。

化学中各元素所形成的离子的电子层结构,根据每层所分布的核外电子数,反映出它固有的性质的活泼性,每一门学科都有它的发展史,也都具有其层次性。数学是一门具有悠久发展历史的学科,它的层次性更直观,更明显。著名的数学家华罗庚曾讲过,这是把一本书读厚了又读薄了的结果。可见,数学绝不是那单纯抽象的,僵化的静态物,而是那由抽象上升到具体的、活生生的、有血有肉的被你理解的公理体系。

(2)概念教学的三个层次。首先,概念是反映事物特有属性的一种思维形式,要进行正确的数学思维活动就必须做到概念明确,也就是必须明确概念的内涵和外延,这是概念学习的第一个水平层次,是对概念学习的基本要求。

其次,正确认识这些概念之间的关系,是概念学习的第二个水平层次,这个层次(及后述第三层次)是教学成果得到巩固、深化的重要环节。概念间的关系主要有同一、从属、交叉、并列等诸种,通过对一些概念(特别是易混概念)进行比较、分析,将有助于明确它们之间的联系与区别。如“无理式”、“根式”及“方根”等概念就常常纠缠不清,如果用一些具体实例对照着鉴别,充分认识它们之间的交叉关系,就容易收到较好的教学效果。对于并列的全异关系,又分为矛盾关系和反对关系两种。明了这些关系,对于正确进行概念的概括是十分有利的。如“有理数”和“无理数”就是一对具有矛盾关系的概念,而“正实数”与“负实数”却是两个具有反对关系的概念,因为它们的共同邻近属概念“实数”,还包括零这个特殊数。

概念学习的第三个水平层次是在一定的学习阶段上,通过概念的系统化、条理化,形成相应的概念体系。如在学习了几何体的体积计算后,应通过复习从体上把握教材的逻辑结构,充分认识各种几何体求积公式间的辩证关系,只有在这个层次上,才能引导学生克服概念掌握上的孤立、离散状况,为数学理论的应用及进一步学习打下坚实的基础。正如斯托利亚尔指出的:“掌握概念的体系是掌握作为其组成部分的演绎理论的必要条件”。

(3)公式教学的层次性。公式是中学数学贯穿始末的重要内容。公式教学本身就是传授知识的一个重要内容,它又是和培养能力同步进行的。因此,结合公式的具体特点,寓“培养能力,发展能力”于公式教学的各个层次之中,就能收到较好的教学效果。

首先,公式教学的最低层次就是把公式引入,如何抓住公式的结构特征,把公式记住。公式的引入,需能把学生深深吸引住,这样将大大

激发学生的求知欲望，使他们处于积极的思维状态，从而引导他们自觉地去探索新的知识。当我们导出一个公式时，还必须根据这个公式的结构特点，介绍或引导学生设法记住这个公式，只有记住公式，应用时才能左右逢源，得心应手。

其次，公式教学才能进入第二层次，来着重研究公式的推导，公式的特例以及它的几何解释。任何一个公式，都有其来龙去脉，有意识地让学生参与推导公式的过程，不但可以使学生掌握公式，而且能挖掘出推导公式过程所隐含的各种数学解题方法，对帮助学生提高分析问题，解决问题以及形成技能技巧的能力都是十分有益的。

一般说来，公式中的数学对象是具有普遍意义的，但为便于研究具体的问题，不但要对公式中的数学对象的特殊情况加以分析，导出更简单的公式，而且对抽象的数学公式作出隐藏在它背后的几何图形，这对于进一步加深第一层次的记忆是极有好处的。

第三，公式教学的第三层次，不但教公式的变式，而且要教公式的应用，这是公式教学的最终目的，也是培养能力的重要环节之一。

任何一个公式都蕴涵着一定的数学对象间的关系，深刻认识公式所反映的这种关系和形式，对公式进行适当变式，可以帮助学生提高运用公式（活用、巧用）的能力。

这里仅以基本不等式为例，说明公式应用的五个层次。基本不等式指：

$a^2+b^2\geqslant 2ab, a+b\geqslant 2\sqrt{ab}\,(a,b\in R)$

第一个层次——套着用公式

这一层次的思维是模仿式的，思维量极小，几乎是平静状态下的思维，这种静态思维是必要的，对理解和巩固公式会起积极作用，但这种积极作用极其有限，所以过多地套用公式的训练是没有意义的。

例 1　求函数 $y=3x^2+\dfrac{1}{2x^2}$ 的最小值。

解　直接运用基本不等式得

$y\geqslant 2\cdot\sqrt{3}\,x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}\,x}=\sqrt{6}$，

当且仅当 $3x^2=\dfrac{1}{2x^2}$，即 $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt[4]{6}}$ 时，y 达到它的最小值 $y_{\min}=\sqrt{6}$。

第二个层次——凑着用公式

如果习题形式不符合公式的模式，则须通过适当变形，凑成公式的模式，然后用公式得出结果。这一层次的思维打破了静态，思维开始低速度流动，向发散方向前进。

例 2　求证：$\log_{n+1}(n+2)<\log_n(n+1)$。

证　$2\log_{n+1}(n+2)\log_{n+1}n$

$\leqslant\log_{n+1}^2(n+2)+\log_{n+1}^2 n$

$=[\log_{n+1}(n+2)+\log_{n+1}n]^2$

$-2\log_{n+1}(n+2)\cdot\log_{n+1}n$

$\therefore 4\log_{n+1}(n+2)\cdot\log_{n+1}n$

$\log_{n+1}^2(n+2)n\leqslant[\log_{n+1}(n+1)^2]^2=4$

即　$\log_{n+1}(n+2)<\log_n(n+1)$。

$\left(\text{注意}(n+2)n<\left(\dfrac{n+2+n}{2}\right)^2=(n+1)^2\right)$

第三个层次——逆着用公式

一般公式均有左右两端，从左向右较顺，由右向左用常很不习惯，这种逆向思维促使人们对公式深刻理解，诱发新的认识。

例 3　求证：$\dfrac{1}{2}(1+n)\geqslant\sqrt[n]{n!}$（$n$ 为自然数）

证　$\sqrt[n]{n!}=\sqrt[n]{1\times2\times3\times\cdots\times n}$

$\leqslant(1+2+3+\cdots+n)/n$

$=\dfrac{(n+1)n}{2n}=\dfrac{n+1}{2}$

第四个层次——变着用公式

每个公式本身均可作各种变化，为了能在更广阔的背景中运用公式，就需要对公式本身进行各样的形变，产生各种不同形式的新公式，这一层次的思维量极大，思维奔腾了。这样可培养学生思维的高度灵活性，对发散思维的诱发和创造能力的培养都起促进作用。

例 4　已知：$a_1,a_2,\cdots a_n>0$，求证：

$\dfrac{a_1^2}{a_2}+\dfrac{a_2^2}{a_3}+\cdots+\dfrac{a_n^2}{a_1}\geqslant a_1+a_2+\cdots+a_n$。

证　将公式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 变形，则有

$a^2\geqslant(2a-b)b$

$\therefore a^2/b=2a-b$，由此得：

$\dfrac{a_1^2}{a_2}+\dfrac{a_2^2}{a_3}+\cdots+\dfrac{a_n^2}{a_1}$

$\geqslant 2a_1-a_2+2a_2-a_3+\cdots+2a_n-a_1$，

$\geqslant a_1+a_2+\cdots+a_n$。

第五个层次——横着用公式

某一分科的公式，不但应研究它在本分科内的应用，还应注意它在其他分科内的应用，开拓应用范围，这是学习知识的目的——用知识去解决问题。这一层次的思维需更多独创精神。

例 5　椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 的切线与两坐标轴交于 A、B。求 $|AB|$ 的最小值。

解　设切点为 $(a\cos\theta,b\sin\theta)$，则切线方程为

$b\cos\theta\cdot x+a\sin\theta\cdot y=ab$。

令 $x=0$,得纵截距 $y=b/\sin\theta$,

令 $y=0$,得横截距 $x=a/\cos\theta$。

$$\begin{aligned}\therefore\quad |AB|&=\sqrt{b^2/\sin^2\theta+a^2/\cos^2\theta}\\&=\sqrt{b^2(1+\mathrm{ctg}^2\theta)+a^2(1+\mathrm{tg}^2\theta)}\\&=\sqrt{a^2+b^2+(b^2\mathrm{ctg}^2\theta+a^2\mathrm{tg}^2\theta)}\\&\geqslant\sqrt{a^2+b^2+2ab}\\&=a+b=|AB|_{\min}。\end{aligned}$$

第四,公式数学不但要从横的方面与别的公式加强串联,而且还要从纵的方面加以推广,这是公式教学的最高层次。

(4)数学方法的层次性

数学方法有计算、证明、作图等几条线,证明与作图问题可归结为数学计算,无容否认,计算是一条主线,中学的数学计算呈现出明显的层次性:

第一层次　算术、代数运算。

第二层次　超越式运算。

第三层次　求导数,求不定积分。

中学以第一、二层次的运算为主,可以作如下更细致的极次划分:

第一级次:算术运算。

第二级次:有理数的运算——运算法则可分解为两个部分:符号法则与绝对值的运算,后者归纳为算术运算。

第三级次:整式运算——运算法则的基础是加乘运算与指数运算律,是有理数运算法则的一般化。

第四级次:分式运算——只要能归结为整式运算,以下就认为是容易完成了。

第五级次:根式运算——一般是归结为有理式运算,如化简:

$$\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}\div\frac{1}{\sqrt{x^3}-1},$$

可令 $u=\sqrt{x}$,即归结为

$$\frac{u+1}{u^2+u+1}\div\frac{1}{u^3-1},$$

第六级次:超越式运算,如对数式运算和三角运算——它们总是设法归结到代数运算。当然,也要同时运用一批超越运算法则,比如化简

$$\frac{\sin2\alpha+1}{1+\cos2\alpha+\sin2\alpha},$$

运用三角公式化为:

$$\frac{2\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha},$$

以下就相当于完成代数运算了。

数学计算的真谛在于不断地将较高层次的计算化归为较低层次的计算,以至最后归于最简单的算术运算,计算过程的首要任务是实现从较高层次到较低层次的转化,即不断使问题"初等化",有时也将一个较初等的计算问题转化为较高层次的演算也可能是有利的,限于篇幅,例子从略。

2. 数学思维的层次性

数学是锻炼人的思维体操,数学思维是进行数学活动(比如数学学习、教学、研究与应用等)过程中的思维,它具有连贯性、顺序性和发展性的特点,认真地分析它的思维过程,有助于发展学生的思维能力,提高解题效率,下面分三方面来作具体研究:

(1)数学的思维的特点。数学教学过程简单地说包括知识发生和应用两个阶段。第一个阶段主要是指揭示和建立新旧课题,知识间的内在联系,使学生得到新知识的过程;第二阶段主要指在课堂上应用基础知识和基本技能技巧,解决数学问题并形成能力的过程,而在这两个教学阶段,学生的思维活动过程主要表现为如下特点:连贯性、顺序性和发展性。

思维的连贯性,是指在教学中教师提出某一教学课题后,学生针对这一课题所进行的一系列思考的承前启后的特征,他们先是要搞清课题有关的"什么是"的问题,次则要搞清课题有关的"为什么"的问题,最后学生还需要对所研究的课题进行具体化(由抽象到具体),达到初步应用,这样学生的思维才算完成了对课题知识体系认识的一次循环。

思维的顺序性是与连贯性有别的,它是学生思维活动的另一个层次。学习的思维过程,必须遵循一定的程序进行,由总课题到围绕着总课题的具体课题,形成了一个循序渐进的层次分明的体系,某一课题明确以后,便要及时进入另一课题,不能跳跃或倒退,体现着学生思维过程始终在环环相扣地进行。

教学过程中学生思维的发展性,体现在学生的思维循着课题的难度渐渐增加而积极向前的发展趋势;体现在思维围绕课题的一次循环之后,向更高一次循环跃进的兴趣和欲望。

如果在教学中不注意学生的这种思维活动特性,我们的教学过程是无法收到良好效果的。例如,不重视学生思维的连贯性,不把学生为明确某一课题的思维活动进程当做一个连续过程来看待,使学生思维嘎然而止,就会造成学生思

路的紊乱。长久下去,不但会影响学生掌握知识,而且更重要的是阻碍学生思维能力的发展。

(2)简单数学思维层次例说。根据数学思维的特点,在涉及到某一个小问题时,我们又可按低、中、高思维层次来研究问题,如平面几何教学中,有关多角度、多层次、全方位识图问题较为典型:

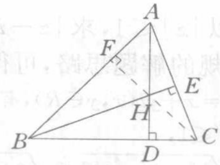


图1

例 6　已知图中 AD、BE、CF 为 $\triangle ABC$ 三条高线,相交于 H,问图中共有多少对相似三角形?

分析　抓住高线的特点,从"有一组对应角相等的两直角三角形相似"出发,直视(低层次思维)易见

$Rt\triangle AHF \backsim Rt\triangle CHD$、

$Rt\triangle BFH \backsim Rt\triangle CEH$

$Rt\triangle BHD \backsim Rt\triangle AHE$;

用重迭式视图(中层次思维),可见

$Rt\triangle AHE \backsim Rt\triangle ACD$,

$Rt\triangle CHE \backsim Rt\triangle CAF$,

$Rt\triangle CDH \backsim Rt\triangle CBF$、

$Rt\triangle BDH \backsim Rt\triangle BCE$、

$Rt\triangle BFH \backsim Rt\triangle BEA$、

$Rt\triangle AFH \backsim Rt\triangle ABR$;

用半迭式视图(高层次思维)可发现

$Rt\triangle ACD \backsim Rt\triangle BCE$、

$Rt\triangle BAE \backsim Rt\triangle CAF$、

$Rt\triangle ABD \backsim Rt\triangle CBF$。

综上共有12对相似三角形。

(3)解决问题的思维层次。心理学的研究表明,人们在创造性解决问题的过程中,总是力求逐步缩小探索的范围,即在如下的三个层次中不断地发现并提出新的辅助问题:

一般性解决,即基本逻辑水平上的解决,它力求明确解题的大体方向。

功能性解决,即基本数学方法水平的解决,它力求明确解题所用基本数学方法(如配方法、换元法等)。

特殊性解决,即具体的解决,它力求明确解题的具体方法、技巧和程序。

在解决问题的阶段,人们往往循着上述层次来发现问题,推进解决问题的思维进程,如果思维在某一层次上受阻,则就逼使思维返回到上一个或两个层次中去。

例 7　设正三棱锥 $P-ABC$ 底面边长为 a,侧棱长为 $2a$(图 2),求截面 AEF 周长的最小值。

一般性解决:使复杂的,生疏的问题转化为简单的、熟悉的问题,是解决问题的一般方法,将立体问题转化为平面问题,是解决立体几何问题的一般方法。

功能性解决:如何转化为平面问题,考虑到问题特点,可以通过侧面展开解决。

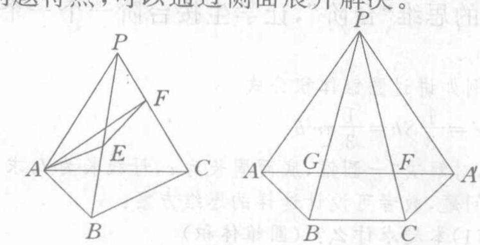


图2

特殊性解决:要使 $\triangle AEF$ 周长最小,即展开图中折线 $AEFA$ 最短,应有 A、E、F、A 共线,设 $\angle APB=\theta$,则

$$\sin=\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}a/2a=\frac{1}{4}$$

$$\sin\frac{3\theta}{2}=3\cdot\frac{1}{4}-4\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{11}{16}$$

$$\therefore AA'=2\cdot a\sin\frac{3\theta}{2}=\frac{11a}{4}$$

可见一般性解决和功能性解决是解题过程的两个重要思维层次,突出这两个思维层次,对于暴露数学思维活动过程和发展学生数学观念系统都具有重要意义。

综上所述,获取提高课堂教学的最佳效果,一方面,要求教师深刻理解每节课教学内容的层次性,并能根据学生的差异性来灵活采取不同层次的教学方法,另一方面,要求教师强化提高自己的数学思维能力。只有双管齐下,才能达到应有的教学效果。

◆数学教学中思维能力训练手段的几个关系

数学思维在思维科学中具有极其特殊的重要地位,中学数学教学几乎无时无刻不在引导学生进行思维活动。作为数学教师在课堂教学中怎样逐步培养和提高学生的思维能力,使之合乎逻辑性、合理性,达到清晰、严密、敏捷的程度,这就需要我们精心地设计思维训练的方案,其中包括训练的目的、内容和手段。江苏省射阳县教师进修学校蔡中科老师就中学数学思维训练手段方面的几种关系进行了研究:

1."渐进性"训练和"跳跃性"训练

所谓"渐进性"训练,是指根据循序渐进的原则进行训练。表现在研究某一具体数学问题时,根据其难易程度,将一个复杂的思维过程有目的地分解成若干个简单的思维活动,即设计一定的思维"台阶",让学生按台阶一个一个地"爬"。

例如讲过圆锥体积公式

$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\pi r^2h$

之后,对解决"一圆锥,底面周长为 c,母线长为 l,求 V"这一问题,教者可设计这样的思维方案:

(1)本题求什么?(圆锥体积)

(2)应该用什么公式?($V=(1/3)\pi r^2h$)

(3)需要什么条件?(r,h)

(4)怎样求 r?(根据圆的周长求,$r=c/(2\pi)$)

(5)怎样求 h?(由母线 l 和 r,通过勾股定理求出)

则问题可解。

所谓"跳跃性"训练是指从提高学生思维敏捷性的目的出发,有计划地、有步骤地、有可能地让学生思维活动多个台阶地"跳"。

例如,已知 $|z|\leqslant 1$,求 $|z-i|$ 的最大值的一种解法:

解 1 $|z-i|^2=(z-i)(\overline{z-i})$ (1)

$=(z-i)(\bar{z}+i)$ (2)

$=z\bar{z}+(z-\bar{z})i+1$ (3)

$=(z\bar{z}+1)-2Im(z)$ (4)

$\leqslant 2-2Im(z)$ (5)

又 $\because -1\leqslant Im(z)\leqslant 1$,

$\therefore$ 当 $|z|=1, Im(z)=-1$ 时,

$|z-i|^2_{\max}=4, |z-i|_{\max}=2$。

在讲解上述解题过程时,教者可有意地省去(2)、(4)让学生思考"为什么"(思维活动的跳跃不是省略必要的解题过程)。

看上去,这两种训练手段是一对矛盾,其实,它们是辩证的统一体。前者是基础,后者是提高,不管"爬"也好、"跳"也罢,两者都要根据量力性和因材施教的原则去进行,即从教学对象的接受能力,教学内容的难易程度两方面去考虑安排。对难度大的、学生接受比较困难的要"爬",以便降低思维坡度;对难度小的、学生容易接受的要"跳",以求逐步提高思维跨度。总之,该爬则爬,当跳则跳。如果该爬的地方跳了,则会出现欲速不达的现象;倘若该跳的地方爬了,亦会导致容量减少,厚度不够的结果。同样,教者不去有计划地逐步引导学生由爬变跳,则不利于提高学生思维的敏锐度,让思维能力始终停留在初级水准。好比下棋一样,只能看上"一步",而不能看上"几步",无形中阻碍了学生判断力、洞察力的发展。

2."引导性"训练和"放手性"训练

所谓"引导性"训练,是指教者按照解答或分析某一数学问题的途径,有目的地进行引导,让学生的思路在教者的指拨下展开,以期顺利地解决问题。

我们仍以 $|z|\leqslant 1$,求 $|z-i|$ 的最大值"为例,教者按常规的解题思路,可得下解:

解 2 设 $z=x+yi(x,y\in R)$,有

$x^2+y^2\leqslant 1$,

$|z-i|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}\leqslant\sqrt{2-2y}$。

$\because |g|\leqslant 1$

$\therefore$ 当 $y=-1, x=0$ 时,

$|z-i|_{\max}=2$。

"放手性"训练,是指教者有意识地让学生进行"发散性"思维,充分地多方位进行包括正确的、错误的;清晰的、含糊的;复杂的、简捷的解题思路的猜想和探讨。

对于上题,如果放手让学生广泛讨论,还可得以下多解:

解 3 设 $z=r(\cos\theta+isin\theta)(0\leqslant r\leqslant 1)$,

$|z-i|=\sqrt{r^2cos^2\theta+(r\sin\theta-1)^2}$

$\sqrt{r^2-2r\sin\theta+1}$。

当 $r=1, \sin\theta=-1$ 时

$|z-i|_{\max}=2$;

解 4 设 z 是单位圆内或圆上的点,$|z-i|$ 表示点 z 与点(0,1)的距离,当 $z=-1$ 时,$|z-i|_{\max}=2$;

解 5 z 是单位圆上或圆内的点,$|z-i|$ 表示将点向下平移 1 个单位,显然新圆上或圆内点的最大模为 2,即

$|z-i|_{\max}=2$。

解 6 根据 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$ 得 $|z-i|\leqslant|z|+|-i|\leqslant 2$,$z=-i$ 时等号成立

$\therefore$ $|z-i|_{\max}=2$。

目前,在我们的实际教学中,教者往往出于"完成任务"的需要,总是按自已所准备的解题思路诱使学生"就范"。似乎对前者有所"垂青",对后者采取较少。其实,这两者乃是对立的统一,是思维训练中不可割裂、不可忽视的两个方面。我们把前者称之谓"收",后者称之谓"放"。无论是"收"还是"放",教者的主导地位没有变,也不能变。在充分"放"的基础上抓住契机有目的地"收",将使学生的主动性、思维的积极性得到最大程度的发挥和调动,教者的主导作用得

到更为饱满、出色的体现。如果只偏向“收”、舍不得“放”，长此以往，势必会束缚学生的思维个性，跳不出教者划定的“圈子”，解题思路狭窄，使学生的思维达不到一定的广度，影响了创造力的提高。如果只“放”不“收”，不去进行适当的引导，将一些盲目的、甚至错误的思维活动进行“拨乱反正”；不去进行很好的比较、将几种思维活动进行优劣评估；不去进行高度的归纳、将学生的思维活动进行质的提炼，势必使学生的“发散性”思维停留在浅表层、达不到一定的深度，有时还会出现“失控”。当然要使“放”、“收”结合得体，达到预期的效果，这就需要教者一要有扎实的知识基础，二要有充分的课前准备，三要有一定的引导功夫其中包括由“具体到抽象”、“由已知到未知”、“由特殊到一般”的启发式教学的各种手段。只有这样，教者才能驾驭课堂，以不变应万变、循循善诱，稳操胜券。

3.“正面性训练”和“反面性训练”

所谓“正面性训练”，是指教者按正确的思路进行正面引导，启发学生思维。这是常见的训练形式，不再举例赘述。

所谓“反面性训练”，是指教者为纠正某种易发性错误而设置的思维圈套，故意地将学生引入歧途，然后通过分析，让学生发现上了当。

例如，已知$\triangle ABC$的周长是6，$BC=2$，求$\triangle ABC$的最大面积。

教者开始可设置这样的解题思路：

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A$。

由题意得　$AB+AB=4$（定值）

$\because\sqrt{AB\cdot AC}\leqslant\frac{AB+AC}{2}$，

$\therefore AB\cdot AC\leqslant\left(\frac{AB+AC}{2}\right)^2=4$，

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A。$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{AB+AC}{2}\right)^2\cdot\sin A$$
$$=2\sin\leqslant 2。$$

$\therefore$　$\triangle ABC$的最大面积是2。

乍看上去，这种解答正确无误，学生也不介意，以为这个问题已解决了。这时教者指出这种解法错了，学生势必感到惊讶，随之必然会对整个解题过程进行反思。经过教者的启发诱导，发现错误出在前一个不等号中等号成立的条件是$AB=AC$，此时$\angle A=60°$；后一个不等号中等号成立的条件是$\angle A=90°$。前后矛盾，犯了逻辑错误，于是启发学生思考它的正确解法：

由海伦公式

$$S_{\triangle ABC}=\sqrt{3(3-AB)(3-AC)(3-2)}$$
$$\leqslant\sqrt{3\cdot\left(\frac{3-AB+3-AC}{2}\right)^2}=\sqrt{3}。$$

（当然还有其它解法）

此例使学生懂得了在求最值问题时，应用不等式有几处放大（或缩小），必然使它们取得等号时的条件一致。

通过这一“正”一“反”的训练，学生由“大误”到“大悟”，其效果显然比仅进行“正面性”训练要强得多。俗话说，吃一堑，长一智”。教者在思维训练中，根据问题的需要不时地进行一种“反面性”引导，学生必然在思想中筑起一条防线，谨防再上老师的“当”，而对每一步推导、变形，都要认真地琢磨一番，不能“师云亦云”。这对于增强学生的思维嗅觉，培养优良的思维品质、提高识别力都有一定的帮助作用。

4.“直观性”训练和“抽象性”训练

列宁说：“从生动的直观，到抽象的思维，再由思维到实践、是认识真理、是认识客观实在的辩证道路。”通过直观获得的知识是生动的，是活的领悟，最容易使学生接受并且最容易巩固，因而“直观性”训练是一种从“感性”到“理性”的训练手段，也是启发式教学的重要方面。这是我们教者所必须掌握的一种教学方法。

然而，随着年级的升高、数学知识的抽象性也愈来愈强，有的知识也难以“直观化”。这就需要我们数学教师要将“抽象性”训练提到一定的位置。另外，从学生今后学习高级知识的需要出发，要有所侧重地对学生进行“抽象性”训练，对有些可直观化的知识，也应逐步抽去其具体形象进行思维，以便养成抽象思维的习惯，使学生在学习中利用直观而不依赖直观。笔者认为数学知识的教学，形象思维只是抽象思维的一种辅助手段，抽象思维是以形象思维为基础的一种较高级的思维形式。所以，我们在实际教学中要把“直观性”训练和“抽象性”训练紧密有机地结合起来、使之融为一体、相得益彰。

例如，当实数a在什么范围内取值时，曲线c：$\frac{(x-a)^2}{2}+y^2=1$和曲线$y^2=\frac{1}{2}x$有公共点。

如果仅从抽象的数的知识方面思维，容易得出下面的错误解答：

解　由$\begin{cases}\frac{(x-a)^2}{2}+y^2=1,\\ y^2=\frac{1}{2}x,\end{cases}$