圣才®学习网
www.100xuexi.com

中国精算师资格考试辅导系列

中国精算师

精算模型过关必做1000题（含历年真题）

主编：圣才学习网
www.100xuexi.com

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

中国精算师资格考试辅导系列

中国精算师
精算模型过关必做1000题

（含历年真题）

主编：圣才学习网
www.100xuexi.com

中国石化出版社

内 容 提 要

本书是一本中国精算师资格考试科目“精算模型”过关必做习题集，基本遵循中国精算师资格考试指定教材《精算模型》（肖争艳主编，孙佳美主审，中国财政经济出版社）的章目编排，共分14章，根据最新《中国精算师资格考试－考试指南》中“精算模型”的考试内容和要求精心编写了约1000道习题，其中包括了部分**历年真题、样题和教材习题**，所选习题基本覆盖了考试指南规定需要掌握的知识内容，并对全部习题进行了详细的分析和解答。

圣才学习网｜精算师（www.100xuexi.com）提供中国精算师资格考试辅导方案（辅导班、题库）。圣才考研网（www.100exam.com）提供全国所有高校各个专业的考研考博辅导班（保过班、面授班、网授班等）、国内外经典教材名师讲堂（详细介绍参见本书书前彩页）。购书享受大礼包增值服务【100元网授班＋20元真题模考＋20元圣才学习卡】。本书特别适用于参加中国精算师资格考试的考生，也可供各大院校精算和统计专业的师生参考。

图书在版编目（CIP）数据

中国精算师精算模型过关必做1000题：含历年真题/圣才学习网主编．—北京：中国石化出版社，2011.8
（中国精算师资格考试辅导系列）
ISBN 978－7－5114－1086－3

Ⅰ．①中…　Ⅱ．①圣…　Ⅲ．①精算师－资格考核－习题集　Ⅳ．①F224.0－44

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第142956号

中国石化出版社出版发行

地址：北京市东城区安定门外大街58号
邮编：100011　电话：（010）84271850
读者服务部电话：（010）84289974
http://www.sinopec-press.com
E-mail：press@sinopec.com.cn
北京市庆全新光印刷有限公司印刷
全国各地新华书店经销

*

787×1092毫米16开本21.75印张4彩插518千字
2011年7月第1版　2011年7月第1次印刷
定价：49.00元

序　　言

中国精算师资格考试是中国保险监督管理委员会立项，由中国精算师协会组织实施的一项国家级职业资格考试。中国精算师分准精算师和精算师两个层级。准精算师部分由八门科目组成，每门均为3小时笔试；精算师部分分为寿险和非寿险两个方向，每门均为4小时笔试。考生一次可以报考一科或多科，报考科目不受科目代码顺序限制。考试成绩采取10分制，6分以上(含6分)为通过。各科目成绩“通过”后，没有时间限制，终身有效。

为了帮助考生顺利通过中国精算师资格考试，我们根据最新《中国精算师资格考试－考试指南》和指定教材编写了中国精算师资格考试辅导系列(图书)，并精心制作了中国精算师资格考试名师课程、题库、光盘等：

1. 中国精算师数学(包括图书、课程、题库、光盘)
2. 中国精算师金融数学(包括图书、课程、题库、光盘)
3. 中国精算师精算模型(包括图书、课程、题库、光盘)
4. 中国精算师经济学基础(包括图书、课程、题库、光盘)
5. 中国精算师寿险精算(包括图书、课程、题库、光盘)
6. 中国精算师非寿险精算(包括图书、课程、题库、光盘)
7. 中国精算师会计与财务(包括图书、课程、题库、光盘)
8. 中国精算师精算管理(包括图书、课程、题库、光盘)

本书是一本中国精算师资格考试科目“精算模型”过关必做习题集，基本遵循中国精算师资格考试指定教材《精算模型》(肖争艳主编，孙佳美主审，中国财政经济出版社)的章目编排，共分14章，根据最新《中国精算师资格考试－考试指南》中“精算模型”的考试内容和要求精心编写了约1000道习题，其中包括了部分**历年真题、样题和教材习题**，所选习题基本覆盖了考试指南规定需要掌握的知识内容，并对全部习题进行了详细的分析和解答。

需要特别说明的是：对于考试动态、最新的考试大纲以及相关考试资料，圣才学习网｜精算师(www.100xuexi.com)会及时根据当年的大纲对本书进行修订和说明，读者可以登陆网站查看并下载相关修订部分。本教材参考了众多的配套资料和相关参考书，书中错误、遗漏不可避免，敬请指正和提出建议。

圣才学习网编辑部

目　录

第1章　绪论(略)

第2章　生存分析的基本函数及生存模型

单项选择题(以下各小题所给出的5个选项中，只有一项最符合题目要求，请将正确选项的代码填入括号内)

1. 设 X 服从 $\theta=1$ 的指数分布，令 $y=g(x)=\sqrt{x}$，则随机变量 Y 的危险率函数为(　　)。

A. 1　　B. y　　C. $2y$　　D. y^2

E. $2y^2$

【答案】B

【解析】解法①：因为 $y=g(x)=\sqrt{x}$ 是严格递增的，且 $x=m(y)=y^2$，则 $F_Y(y)=F_X(y^2)$。由于 X 服从 $\theta=1$ 的指数分布，即 $F_X(x)=1-e^{-x}$，有 $F_Y(y)=1-e^{-y^2}$，于是 $f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=2y\cdot e^{-y^2}$，故

$$h_Y(y)=\frac{f_Y(y)}{1-F_Y(y)}=\frac{2y\cdot e^{-y^2}}{e^{-y^2}}=2y$$

解法②：因为 $y=g(x)=\sqrt{x}$ 是严格递增的，且 $x=m(y)=y^2$。已知 X 服从 $\theta=1$ 的指数分布，故 $h_X(x)=h_X[m(y)]=1$，所以

$$h_Y(y)=h_X[m(y)]\cdot\frac{dx}{dy}=\frac{dx}{dy}=2y$$

2. 令 $y=g(x)=-\ln S_X(x)$，则 Y 的概率密度函数为(　　)。

A. $-e^{-y}$　　B. $-e^{y}$　　C. e^{-y}　　D. e^{y}

E. $1-e^{-y}$

【答案】C

【解析】由于 $S_X(x)$ 由1递减到0，则 $\ln S_X(x)$ 由0递减到 $-\infty$，所以 $y=g(x)=-\ln S_X(x)$ 由0递增到 $+\infty$。令 $Z=S_X(x)$，则 Z 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，即对所有 z 值，$f_Z(z)=1$。

对于 $y=-\ln z$，其反函数为 $z=m(y)=e^{-y}$，故 $\frac{dz}{dy}=-e^{-y}$，其中 y 是 z 的递减函数。所以

$f_Y(y)=-f_Z[m(y)]\cdot\frac{dz}{dy}=(-1)\cdot\frac{dz}{dy}=e^{-y}$。

3. 设某随机变量 X 的生存函数为：$S(x)=ax^3+b$，$0\leqslant x\leqslant k$。若 $E(X)=45$，则 $Var(X)=$(　　)。

A. 90　　B. 120　　C. 135　　D. 450

E. 500

【答案】C

【解析】由生存函数的性质 $S(0)=1$，得：$b=1$。

又由 $S(k)=0=ak^3+b=a\cdot k^3+1$，解得：$a=-\frac{1}{k^3}$。

从而

$$E(X)=\int_0^k S(x)dx=\int_0^k\left(-\frac{x^3}{k^3}+1\right)dx=45$$

则 $k=60$。由于 $f(x)=-\frac{dS(x)}{dx}=\frac{3x^2}{k^3}$，则

$$E(X^2)=\int_0^k x^2 f(x)dx=\int_0^k x^2\frac{3x^2}{k^3}dx=\frac{3}{5}k^2$$

所以

$$Var(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{3}{5}\times 60^2-45^2=135$$

4. 设 X_1 与 X_2 是两个相互独立的随机变量，如果 $Z=\max(X_1, X_2)$，$Y=\min(X_1, X_2)$，则下列选项错误的是(　　)。

A. Y 的生存函数是 X_1 与 X_2 生存函数的乘积

B. 若 X_1 与 X_2 都服从指数分布，则 Y 也服从指数分布

C. 若 X_1 与 X_2 都服从指数分布，则 Z 不服从指数分布

D. Z 的累积分布函数为 X_1 与 X_2 累积分布函数的乘积

E. Z 的密度函数为 X_1 与 X_2 密度函数的乘积

【答案】E

【解析】A 项，

$$\begin{aligned}S_Y(y)&=P(Y>y)=P[\min(X_1, X_2)>y]=P(X_1>y, X_2>y)=P(X_1>y)\cdot P(X_2>y)\\&=S_{X_1}(y)S_{X_2}(y)\end{aligned}$$

B 项，设 $X_1\sim exp(\lambda_1)$，$X_2\sim exp(\lambda_2)$，则有：

$$S_Y(y)=S_{X_1}(y)S_{X_2}(y)=e^{-\lambda_1 y}\cdot e^{-\lambda_2 y}=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)y}$$

即 $Y\sim exp(\lambda_1+\lambda_2)$；

C 项，设 $X_1\sim exp(\lambda_1)$，$X_2\sim exp(\lambda_2)$，则：

$$F_Z(y)=F_{X_1}(y)F_{X_2}(y)=(1-e^{-\lambda_1 y})(1-e^{-\lambda_2 y})\neq 1-e^{-\lambda y}$$

即 Z 不服从指数分布；

D 项，

$$\begin{aligned}P(Z\leqslant y)&=P(\max(X_1, X_2)\leqslant y)\\&=P(X_1\leqslant y, X_2\leqslant y)=P(X_1\leqslant y)P(X_2\leqslant y)\\&=F_{X_1}(y)\cdot F_{X_2}(y)\end{aligned}$$

E 项，$F_Z(y)=F_{X_1}(y)F_{X_2}(y)$，所以 Z 的密度函数为：

$$f_Z(y)=f_{X_1}(y)F_{X_2}(y)+F_{X_1}(y)f_{X_2}(y)$$

5. 已知随机变量 X 的危险率函数为 $h(x)=3x^4$，$x\geqslant 0$，作变换 $Y=\ln X$，则 Y 的危险率函数为(　　)。

A. $\frac{3}{5}e^{5y}$　　B. $5e^{3y}$　　C. $5e^{-3y}$　　D. $3e^{-5y}$

E. $3e^{5y}$

【答案】E

【解析】解法①：由 $h(x)=3x^4$ 得：$S(x)=e^{-\int_0^x h(y)dy}=e^{-\int_0^x 3y^4dy}=e^{-\frac{3}{5}x^5}$。又 $Y=\ln X$，则

$$P(Y>y)=P(\ln X>y)=P(X>e^y)=S_X(e^y)=e^{-\frac{3}{5}e^{5y}}$$

所以

$$S_Y(y)=e^{-\frac{3}{5}e^{5y}},\ S'_Y(y)=e^{-\frac{3}{5}e^{5y}}\cdot\left(-\frac{3}{5}e^{5y}\cdot 5\right)=-e^{-\frac{3}{5}e^{5y}}\cdot(3e^{5y})$$

故

$$h_Y(y)=\frac{-S'_Y(y)}{S_Y(y)}=\frac{e^{-\frac{3}{5}e^{5y}}\cdot 3e^{5y}}{e^{-\frac{3}{5}e^{5y}}}=3e^{5y}$$

解法②：因为 $Y=\ln X$ 是严格递增的，且 $x=e^y$。所以

$$h_Y(y)=h_X(e^y)\frac{dx}{dy}=3e^{4y}e^y=3e^{5y}$$

6. 已知随机变量 X 服从 0 到 20 上的均匀分布，$f_X(x)=1/20$，随机变量 $Y=4X^2$，则 Y 的危险率函数 $h_Y(16)=$(　　)。

A. 0.0016　　B. 0.0023　　C. 0.0026　　D. 0.0032

E. 0.0035

【答案】E

【解析】当 $y>0$ 时，有

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(4X^2\leqslant y)=P\left(0\leqslant X\leqslant\frac{\sqrt{y}}{2}\right)=\int_0^{\frac{\sqrt{y}}{2}}\frac{1}{20}dx=\frac{\sqrt{y}}{40}$$

所以

$$f(y)\Big|_{y=16}=\frac{1}{40}\times\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}\Big|_{y=16}=\frac{1}{40\times 8}$$

故 $h_y(16)=\frac{f(y)}{S(y)}\Big|_{y=16}=\dfrac{\frac{1}{40\times 8}}{1-\frac{\sqrt{16}}{40}}=0.0035$。

7. 设 X_1 与 X_2 是两个相互独立的随机变量，且 $X_1\sim exp(\lambda_1)$，$X_2\sim exp(\lambda_2)$，$\lambda_1>\lambda_2$。设 $Y=\min(X_1, X_2)$，$Z=\max(X_1, X_2)$，已知 $S_Y(2)=0.24$，$S_Z(2)=0.86$，则 $\lambda_1-\lambda_2=$(　　)。

A. 0.112　　B. 0.490　　C. 0.590　　D. 0.602

E. 0.612

【答案】B

【解析】由 $S_Y(2)=P(Y>2)=P[\min(X_1, X_2)>2]=P(X_1>2)P(X_2>2)=e^{-2(\lambda_1+\lambda_2)}=0.24$，

$S_Z(2)=P(Z>2)=P[\max(X_1,\ X_2)>2)=1-P[\max(X_1,\ X_2)\leqslant 2]$
$=1-P(X_1\leqslant 2)P(X_2\leqslant 2)=1-(1-e^{2\lambda_1})(1-e^{-2\lambda_2})=0.86$

可得$\begin{cases}e^{-2\lambda_1}e^{-2\lambda_2}=0.24\\ e^{-2\lambda_1}+e^{-2\lambda_2}=1.1\end{cases}$，解得：$e^{-2\lambda_1}=0.3$，$e^{-2\lambda_2}=0.8$。

所以$\lambda_1=-\frac{\ln 0.3}{2}$，$\lambda_2=-\frac{\ln 0.8}{2}$，故$\lambda_1-\lambda_2=0.490$。

8. 已知：$S(x)=\frac{1}{100^2}\cdot\left(\frac{x-100}{x+1}\right)^2$，则$\mu_{10}=($　　$)$。

A. 0.354　　B. 0.204　　C. 0.304　　D. 0.564
E. 0.654

【答案】B

【解析】由于$\mu_X=\frac{-S'(x)}{S(x)}=\frac{202}{(x+1)(100-x)}$，所以$\mu_{10}=\frac{202}{(10+1)(100-10)}=0.204$。

9. 寿命X是随机变量，则60岁的人的寿命不超过80岁的概率为(　　)。

(1)$\frac{S(60)-S(80)}{S(60)}$；(2)$\frac{F(80)-F(60)}{1-F(60)}$；(3)$\frac{F(80)+F(60)}{1-F(60)}$；(4)$\frac{S(60)+S(80)}{S(60)}$

A. (1)(2)　　B. (1)(3)　　C. (2)(4)　　D. (3)(4)
E. (4)

【答案】A

【解析】由已知可得：

$$P\{X\leqslant 80\mid X>60\}=\frac{P\{X\leqslant 80\cap X>60\}}{P\{X>60\}}$$
$$=\frac{1-S(80)-(1-S(60))}{1-(1-S(60))}=\frac{S(60)-S(80)}{S(60)}$$

10. 已知生存函数为$S(x)=1-\frac{x}{105}(0\leqslant x\leqslant 105)$，则其平均寿命为(　　)。

A. 50.5　　B. 52.5　　C. 55.5　　D. 58.5
E. 60.5

【答案】B

【解析】解法①：由已知生存函数得其密度函数为：

$$f(x)=-S'(x)=\frac{1}{105}$$

故其平均寿命为：

$$E(X)=\int_0^{\infty}xf(x)dx=\int_0^{105}\frac{x}{105}dx=52.5$$

解法②：平均寿命为：

$$EX=\int_0^{\infty}S(x)dx$$
$$=\int_0^{105}(1-\frac{x}{105})dx$$
$$=52.5$$

11. 已知某细菌的死亡力为$\mu_x=\frac{1}{\omega-x}$，$0\leqslant x\leqslant\omega$，$\omega$为极限年龄，则其$x$岁的生存函数是

(　　)。

A. $\frac{\omega-x-t}{\omega-x}$　　B. $\frac{t}{\omega-x}$　　C. $\frac{1}{\omega-x}$　　D. $\frac{\omega-x+t}{\omega-x}$

E. $1-\frac{x}{\omega}$

【答案】A

【解析】由已知条件得:

$$S(t;x) = exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s}ds\right) = 1-\frac{t}{\omega-x} = \frac{\omega-x-t}{\omega-x}, 0 \leqslant t \leqslant \omega-x$$

12. 设 $S(x)=\frac{1}{1+x}$，则剩余寿命 $T(y)$ 中位数为(　　)。

A. $1+y/2$　　B. $1+2y$　　C. $1+y$　　D. $1-y$

E. $1-2y$

【答案】C

【解析】设 $m(y)$ 为剩余寿命中位数，则

$$P(T(y)>m(y))=P(T(y)\leqslant m(y))=1/2$$

即$\frac{S[y+m(y)]}{S(y)}=1/2$，所以 $m(y)=1+y$。

13. 假设某人群的生存函数为 $S(x)=1-\frac{x}{100}$，$0\leqslant x<100$，则下列计算中，正确的是(　　)。

(1)一个刚出生的婴儿活不到50岁的概率为0.5；

(2)一个刚出生的婴儿寿命超过80岁的概率为0.8；

(3)一个刚出生的婴儿会在60～70岁之间死亡的概率0.1；

(4)一个活到30岁的人活不到60岁的概率为0.43。

A. (1)(2)(3)　　B. (1)(2)(4)

C. (1)(3)(4)　　D. (2)(3)(4)

E. (1)(2)(3)(4)

【答案】C

【解析】由已知可得:

(1)$P(X\leqslant 50)=F(50)=1-S(50)=\frac{50}{100}=0.5$

(2)$P(X>80)=S(80)=1-\frac{80}{100}=0.2$

(3)$P(60<X\leqslant 70)=P(X>60)-P(X>70)=S(60)-S(70)=0.1$

(4)$P(X\leqslant 60\mid X>30)=\frac{P(30<X\leqslant 60)}{P(X>30)}=\frac{S(30)-S(60)}{S(30)}=0.43$

14. 已知某群体的生存函数为 $S(x)=\frac{\sqrt{100-x}}{20}$，$0<x\leqslant 100$，则$\frac{f(75)}{F(75)}=$(　　)。

A. 0.0020　　B. 0.0025　　C. 0.0050　　D. 0.00667

E. 0.00825

【答案】D

【解析】由已知得：$f(x)=-S'(x)=\dfrac{1}{40\sqrt{100-x}}$，$F(x)=1-S(x)=1-\dfrac{\sqrt{100-x}}{20}$

所以$f(75)=\dfrac{1}{40\sqrt{25}}=0.005$，$F(75)=1-\dfrac{\sqrt{25}}{20}=0.75$，

故$\dfrac{f(75)}{F(75)}=\dfrac{0.005}{0.75}=0.00667$。

15. 已知 $S(x)=\left(1-\dfrac{x}{100}\right)^2$，$0\leqslant x<100$，则下列计算中正确的是(　　)。

(1)$S(75)=0.0625$　(2)$F(75)=0.9375$　(3)$f(75)=0.5$　(4)$\mu_{75}=0.08$

A. (1)(2)(3)(4)　　B. (1)(2)(3)

C. (1)(3)(4)　　D. (1)(2)(4)

E. (2)(3)(4)

【答案】D

【解析】由已知得：$f(x)=-S'(x)=\dfrac{1}{50}\left(1-\dfrac{x}{100}\right)$，$\mu_x=-\dfrac{S'(x)}{S(x)}=\dfrac{f(x)}{S(x)}=\dfrac{2}{100-x}$，故

(1)$S(75)=\left(1-\dfrac{75}{100}\right)^2=\dfrac{1}{16}=0.0625$

(2)$F(75)=1-S(75)=\dfrac{15}{16}=0.9375$

(3)$f(75)=\dfrac{1}{50}\left(1-\dfrac{75}{100}\right)=\dfrac{1}{200}=0.005$

(4)$\mu_{75}=\dfrac{2}{100-75}=\dfrac{2}{25}=0.08$

16. 已知剩余寿命 $T(x)$ 和 $T(y)$ 相互独立，且 $E[T(x)]=E[T(y)]=4$，$\mathrm{Cov}[T(xy),T(\overline{xy})]=0.09$，则 $E[T(xy)]$等于(　　)。

A. 2.0　　B. 2.8　　C. 3.7　　D. 4.0

E. 4.3

【答案】C

【解析】根据题意有：

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}[T(xy),T(\overline{xy})]&=E[T(xy)\cdot T(\overline{xy})]-E[T(xy)]E[T(\overline{xy})]\\&=\mathring{e}_x\cdot\mathring{e}_y-\mathring{e}_{xy}\cdot\mathring{e}_{\overline{xy}}\\&=\mathring{e}_x\cdot\mathring{e}_y-\mathring{e}_{xy}\cdot(\mathring{e}_x+\mathring{e}_y-\mathring{e}_{xy})\\&=(\mathring{e}_x-\mathring{e}_{xy})(\mathring{e}_y-\mathring{e}_{xy})\end{aligned}$$

由已知有：$\mathring{e}_x=\mathring{e}_y=4$，故$(4-\mathring{e}_{xy})^2=0.09$，故 $\mathring{e}_{xy}=3.7$。

17. 已知 $T(0)$的分布为：$F_0(t)=\begin{cases}t/100, & 0<t\leqslant 100\\ 1, & t>100\end{cases}$，则新生婴儿在 30 岁和 50 岁之间死亡的概率为(　　)。

A. 0.2　　B. 0.5　　C. 0.6　　D. 0.7

E. 0.9

【答案】A

【解析】由题意知：$P[30<T(0)<50]=F_0(50)-F_0(30)=50/100-30/100=0.2$。

18. 某一产品的死亡力为μ_{x+t}，经一精算师测算，死亡力应修正为$\mu_{x+t}-C$。原来的产品损坏概率为q_x，死亡力修正后一年内该产品损坏的概率减半，则常数$C=$(　　)。

A. $\ln\left(1+\frac{1}{2}q_x\right)-\ln(1-q_x)$　　B. $\ln\left(1-\frac{1}{2}q_x\right)+\ln(1-q_x)$

C. $\ln\left(1-\frac{1}{2}q_x\right)-\ln(1+q_x)$　　D. $\ln\left(1-\frac{1}{2}q_x\right)-\ln(1-q_x)$

E. $\ln\left(1-\frac{1}{2}q_x\right)+\ln(1+q_x)$

【答案】D

【解析】由于$q_x^{old}=1-e^{-\int_0^1\mu_{x+t}dt}$

$q_x^{new}=1-e^{-\int_0^1(\mu_{x+t}-C)dt}=1-e^{-\int_0^1\mu_{x+t}dt}\cdot e^C$

则$\frac{1}{2}q_x^{old}=q_x^{new}$，即$\frac{1}{2}(1-p_x)=(1-p_x\cdot e^C)$

故常数C为：$C=\ln\left(1-\frac{1}{2}q_x\right)-\ln(1-q_x)$

19. 设$S(x)$是生存函数，函数$\varphi(x)=\frac{2}{75}x^{-\frac{1}{3}}$且$\varphi(x)+S'(x)=0$，则生存函数$S(x)$的极限年龄$\omega$为(　　)。

A. 121　　B. 122　　C. 125　　D. 128

E. 130

【答案】C

【解析】由$\varphi(x)+S'(x)=0$知：$S'(x)=-\varphi(x)$，即$\varphi(x)$为未来寿命X的概率密度函数。所以$\int_0^\omega\varphi(x)dx=\int_0^\omega\frac{2}{75}x^{-\frac{1}{3}}dx=1$，即$\frac{1}{25}\omega^{\frac{2}{3}}=1$，解得$\omega=125$。

20. 已知某生存分布为$5\leqslant x\leqslant 15$的双截尾指数分布，参数$\lambda=0.02$，该生存分布随机变量未来寿命的中位数为(　　)。

A. 9.7504　　B. 8.7504　　C. 6.7504　　D. 4.7504

E. 1.7504

【答案】D

【解析】由已知条件得：$S(x)=e^{-\lambda x}=e^{-0.02x}$，故

$$F(x\mid 5\leqslant X\leqslant 15)=\frac{P(5\leqslant X<x)}{P(5\leqslant X\leqslant 15)}=\frac{S(5)-S(x)}{S(5)-S(15)}$$
$$=\frac{e^{-0.02\times 5}-e^{-0.02x}}{e^{-0.02\times 5}-e^{-0.02\times 15}}=\frac{1}{2}$$

解得：$x=9.7504$。

所以该生存分布随机变量未来寿命的中位数为：$9.7504-5=4.7504$。

21. 某产品的寿命生存函数为$S(x)=1-0.0025x^2$，$0\leqslant x\leqslant 20$，则该产品中值年龄时的未来期望寿命为(　　)。

A. 1.0965　　B. 2.0965　　C. 3.0966　　D. 12.142

E. 14.142

【答案】C

【解析】由 $S(x)=1-0.0025x^2=\frac{1}{2}$，解得：$x=14.142$，即为其中值寿命，故

$$\begin{aligned}
\mathring{e}_{14.142} &= \int_0^{+\infty} xP'(T(y) \leqslant x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{20-14.142} x \cdot P'(14.142 < x \leqslant 14.142 + x \mid X > 14.142)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{5.858} x \cdot \left(\frac{F(14.142+x)-F(14.142)}{S(14.142)}\right)'\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{5.858} x \cdot \frac{f(14.142+x)}{S(14.142)}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{5.858} x \cdot \frac{[0.0025(x+14.142)^2]'}{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{5.858} x \cdot 0.005(x+14.142)\mathrm{d}x \\
&= \left(0.01 \times \frac{x^3}{3} + 0.07071x^2\right)\Big|_0^{5.858} \\
&= 3.0966
\end{aligned}$$

22. 已知生存函数为 $S(x)=1-\frac{x}{100}(0\leqslant x\leqslant 100)$，某人现在为 30 岁，则他在 60 岁到 80 岁之间死亡的概率及其平均余命分别为(　　)。

A. 2/7，35　　B. 3/7，50　　C. 1/7，35　　D. 2/7，50

E. 3/7，35

【答案】A

【解析】设此人的剩余寿命为 T。由于 ${}_tp_{30}=\frac{70-t}{70}$，则 T 的密度函数为 $f_{30}(t)=\frac{1}{70}$，所以

$$P\{30 < T < 50\} = \int_{30}^{50} \frac{1}{70}dt = \frac{2}{7}$$

平均余命为：

$$\mathring{e}_{30} = \int_0^{+\infty} tf_{30}(t)dt = \int_0^{70} \frac{t}{70}dt = 35$$

23. 下列表达式中与 ${}_kp_x$ 等价的是(　　)。

A. $\frac{S(x+k+1)}{S(x+1)}$　　B. $\frac{S(x+k-1)}{S(x)}$

C. $p_x \cdot p_{x+1} \cdot \cdots \cdot p_{x+k-1}$　　D. $p_{x+1}\, p_{x+2} \cdots p_{x+k}$

E. $p_{x-1}\, p_x \cdots p_{x+k-1}$

【答案】C

【解析】${}_kp_x = \frac{S(x+1)}{S(x)} \cdot \frac{S(x+2)}{S(x+1)} \cdots \frac{S(x+k)}{S(x+k-1)} = \frac{S(x+k)}{S(x)} = p_x \cdot p_{x+1} \cdot \cdots \cdot p_{x+k-1}$

24. 已知死亡服从 Makeham 死亡分布，$h_{20}=0.003$，$h_{30}=0.004$，$h_{40}=0.006$，则 ${}_{10}p_{10}$(　　)。

A. 0.98315　　B. 0.97555　　C. 0.97315　　D. 0.98555

E. 0.97355

【答案】C

【解析】由已知可得：

$$h_{20}=A+Bc^{20}=0.003 \quad (1)$$
$$h_{30}=A+Bc^{30}=0.004 \quad (2)$$
$$h_{40}=A+Bc^{40}=0.006 \quad (3)$$

利用$\frac{h_{40}-h_{30}}{h_{30}-h_{20}}=c^{10}=2$，可得 $c=2^{0.1}$。

把 c 的值代入(1)和(2)得：

$$A+4B=0.003$$
$$A+8B=0.004$$

解得，$B=0.00025$，$A=0.002$，则

$$h_x=0.002+0.0025\times 2^{0.1x}$$

$$S(x)=exp[-Ax-\frac{B}{mc}(c^x-1)]=exp[-0.002x-0.0036067(2^{0.1x}-1)]$$

所以${}_{10}p_{10}=S(20)/S(10)=0.97315$。

25. 已知 $S(x)=\left(1-\frac{x}{100}\right)^2$，$0\leqslant x\leqslant 100$。设剩余寿命为 T，则一个 50 岁人的剩余寿命的期望和标准差之和为(　　)。

A. 24.32　　B. 28.45　　C. 29.42　　D. 29.65

E. 32.54

【答案】B

【解析】由已知条件得：

$${}_tp_{50}=\frac{S(50+t)}{S(50)}=\left(\frac{100-50-t}{100-50}\right)^2=\left(\frac{50-t}{50}\right)^2$$

所以 $E[T(50)]=\mathring{e}_x=\int_0^{50}{}_tp_{50}dt=\int_0^{50}\left(\frac{50-t}{50}\right)^2dt=\frac{50}{3}$,

又 $E[T^2(50)]=\int_0^{50}2t\cdot{}_tp_{50}dt=\frac{1}{50^2}\int_0^{50}2t(50-t)^2dt=\frac{1250}{3}$,

所以 $Var[T(50)]=E[T^2(50)]-E^2[T(50)]=\frac{1250}{3}-\left(\frac{50}{3}\right)^2=\frac{1250}{9}$,

故 $E(T(50))+\sqrt{Var(T(50))}=\frac{50}{3}+\sqrt{\frac{1250}{9}}=28.45$。

26. 设新生婴儿的生存函数为 $S(x)=1-\frac{x}{100}(0\leqslant x<100)$，则对于一个 40 岁的人，下列计算中正确的是(　　)。

(1)生存函数为$\frac{60-t}{40}$；　(2)死亡力函数为$\frac{1}{60-t}$；　(3)密度函数为$\frac{1}{60}$。

A. (1)(2)(3)　B. (1)(2)　C. (1)(3)　D. (2)(3)

E. (1)

【答案】D

【解析】由生命函数之间的关系，得：

(1)$S_{T(40)}(t)={}_tp_{40}=\dfrac{S(t+40)}{S(40)}=\dfrac{60-t}{60}$，$0\leqslant t<60$

(2)$\mu_{T(40)}(t)=-\dfrac{S'(t+40)}{S(t+40)}=\dfrac{1}{60-t}$，$0\leqslant t<60$

(3)$f_{T(40)}(t)={}_tp_{40}\,\mu_{T(40)}(t)=\dfrac{60-t}{60}\times\dfrac{1}{60-t}=\dfrac{1}{60}$，$0\leqslant t<60$

27. 已知生存函数为 $S(x)=1-\dfrac{x}{\omega}(0\leqslant x<\omega)$，且$\mathring{e}_{20}=40$，则 $Var[T(20)]=($　　$)$。

A. 512.6　　B. 533.3　　C. 542.5　　D. 565.5

E. 572.4

【答案】B

【解析】由 $S(x)=1-\dfrac{x}{\omega}$，知 $X\sim U(0,\ \omega)$，

$${}_tp_{20}=\frac{S(20+t)}{S(20)}=\frac{\omega-20-t}{\omega-20}=1-\frac{t}{\omega-20}，即\ T(20)\sim U(0,\ \omega-20)，$$

故$E[T(x)]=\dfrac{\omega-x}{2}$，$Var[T(x)]=\dfrac{(\omega-x)^2}{12}$，所以$E[T(20)]=\mathring{e}_{20}=\dfrac{\omega-20}{2}=40$，解得：$\omega=100$，故

$$Var[T(20)]=\frac{(\omega-20)^2}{12}=\frac{(100-20)^2}{12}=533.3$$

28. $\mathring{e}_x$ 为 x 岁的个体的剩余寿命的均值，$\mu(x)$为其死亡力函数，则$\mathring{e}_x\mu(x)-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathring{e}_x=($　　$)$。

A. $\dfrac{S(x+t)}{S(x)}$　　B. -1　　C. 0　　D. 1

E. $\dfrac{1}{S(x)}$

【答案】D

【解析】由题意可得：

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\mathring{e}_x=\frac{d}{\mathrm{d}x}\int_0^{\infty}{}_tp_x\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\left[\frac{d}{\mathrm{d}x}{}_tp_x\right]\mathrm{d}t$$

而$\dfrac{d}{\mathrm{d}x}{}_tp_x=\dfrac{d}{\mathrm{d}x}\dfrac{S(x+t)}{S(x)}=\dfrac{S(x)[-S(x+t)\mu(x+t)]-S(x+t)[-S(x)\mu(x)]}{[S(x)]^2}$

$$=\frac{S(x+t)\mu(x)-S(x+t)\mu(x+t)}{S(x)}={}_tp_x[\mu(x)-\mu(x+t)],$$

故$\dfrac{d}{\mathrm{d}x}\mathring{e}_x=\dfrac{d}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^{\infty}{}_tp_x\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}{}_tp_x[\mu(x)-\mu(x+t)]\mathrm{d}t$

$$=\mu(x)\int_0^{\infty}{}_tp_x\mathrm{d}t-\int_0^{\infty}{}_tp_x\mu(x+t)\mathrm{d}t$$

$$=\mathring{e}_x\mu(x)-\frac{-1}{S(x)}\int_0^{\infty}S'(x+t)\mathrm{d}t$$

$$=\mathring{e}_x\mu(x)-\frac{-1}{S(x)}S(x+t)\Big|_0^{\infty}=\mathring{e}_x\mu(x)-1,$$

即$\mathring{e}_x\mu(x)-\dfrac{d}{\mathrm{d}x}\mathring{e}_x=1$。

29. 假设 X 服从[0，10]均匀分布，设中心死亡率为 m_x，则 m_5 为(　　)。

A. $\frac{3}{8}$　　B. $\frac{2}{9}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{1}{3}$

E. $\frac{1}{7}$

【答案】B

【解析】已知 X 服从[0，10]均匀分布，所以生存函数和 X 的概率密度分别为：

$$S(x)=\frac{10-x}{10},\ f(x)=\frac{1}{10},\ 0\leqslant x\leqslant 10$$

根据定义，有 $m_5=\frac{\int_5^6 f(x)\mathrm{d}x}{\int_5^6 S(x)\mathrm{d}x}=\frac{\int_5^6 \frac{1}{10}\mathrm{d}x}{\int_5^6 \frac{10-x}{10}\mathrm{d}x}=\frac{2}{9}$。

30. 已知${}_5p_{10}=0.4$，且 $\mu_x=0.01+bx$，$x\geqslant 0$，则 b 等于(　　)。

A. -0.05　　B. -0.014　　C. 0.005　　D. 0.014

E. 0.05

【答案】D

【解析】由已知得：

${}_5p_{10}=exp\left\{-\int_{10}^{15}(0.01+bt)\mathrm{d}t\right\}=0.4$，则 $-\int_{10}^{15}(0.01+bt)\mathrm{d}t=\ln 0.4$，

即 $0.05+\frac{15^2-10^2}{2}b=-\ln 0.4$，故 $b=0.01386\approx 0.014$。

31. 设死亡力函数为：$\mu_x=\frac{1}{100-x}$，$0\leqslant x\leqslant 100$，则 $P(30<x\leqslant 35\mid x>20)=($　　)。

A. 0.0327　　B. 0.0428　　C. 0.0625　　D. 0.0728

E. 0.0825

【答案】C

【解析】因为

$$\begin{aligned}F_X(x)&=1-exp\left(-\int_0^x\frac{1}{100-s}\mathrm{d}s\right)\\&=1-exp[\ln(100-x)-\ln 100]\\&=x/100\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}P(30<x\leqslant 35\mid x>20)&=\frac{F(35)-F(30)}{1-F(20)}\\&=\frac{35/100-30/100}{1-20/100}\\&=0.0625\end{aligned}$$

32. 已知生存函数 $S(x)=e^{-0.05x}$，$x\geqslant 0$，则$\mathring{e}_{30}=($　　)。

A. 20　　B. 25　　C. 30　　D. 35

E. 40

【答案】A

【解析】由已知可得：

$$\mathring{e}_{30}=\int_0^{\infty}{}_tp_x\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\frac{S(x+t)}{S(x)}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}e^{-0.05t}\mathrm{d}t=-\left(\frac{e^{-0.05t}}{0.05}\right)\Bigg|_0^{\infty}=20$$

33. 已知：$S(x)=\frac{1}{10}\sqrt{100-x}$，$0\leqslant x\leqslant 100$，则年龄为19岁的人在36岁至75岁之间死亡的概率为(　　)。

A. 1/9　　B. 1/8　　C. 1/6　　D. 1/5

E. 1/3

【答案】E

【解析】由已知得：

解法①：$_{17|39}q_{19}=\frac{S(36)-S(75)}{S(19)}=\frac{\frac{1}{10}(\sqrt{64}-\sqrt{25})}{\frac{1}{10}\sqrt{81}}=1/3$

解法②：$_{17|39}q_{19}={}_{17}p_{19}\cdot{}_{39}q_{36}=\frac{S(36)}{S(19)}\cdot\frac{[S(36)-S(75)]}{S(36)}=1/3$

34. 给定生存分布函数为：$S(x)=\frac{80-x}{80}$，$0\leqslant x\leqslant 80$，则$_6m_{20}=($　　$)$。

A. 1/52　　B. 1/54　　C. 1/57　　D. 1/59

E. 1/60

【答案】C

【解析】由已知得：

$$_6m_{20}=\frac{\int_0^6{}_tp_{20}\mu_{20+t}\mathrm{d}t}{\int_0^6{}_tp_{20}\mathrm{d}t}=\frac{\int_0^6\frac{1}{80-20}\mathrm{d}t}{\int_0^6\frac{S(20+t)}{S(20)}\mathrm{d}t}=\frac{6}{60}\times\frac{80-20}{80}\times\frac{1}{\int_0^6\frac{60-t}{80}\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{6}{80}\times\frac{1}{\frac{3}{4}\times 6-\frac{1}{2}\times\frac{1}{80}\times 36}=1/57$$

35. 现年55岁的李先生，面临两种选择，第一种选择到澳洲安度晚年生活，第二种选择继续定居于国内。在正常情况下，55岁至56岁之间的死亡概率为0.005，而在国外定居，因环境的适应存在额外的风险可表示成附加一个年初值为0.03并均匀递减到年末值为0的死亡效力，则他活到56岁的概率为(　　)。

A. 0.9476　　B. 0.9576　　C. 0.9674　　D. 0.9876

E. 0.9981

【答案】D

【解析】如果定居国内，则

$$q_{55}=0.005,\ p_{55}=0.995$$

如果定居国外，则

$$\mu_t=0.03-0.03t$$

$$p_{55}=(1-0.005)\times e^{-\int_0^1(0.03-0.03t)\mathrm{d}t}=0.995\times e^{-0.015}=0.9802$$

故所求概率为：$0.5\times(0.995+0.9802)=0.9876$。