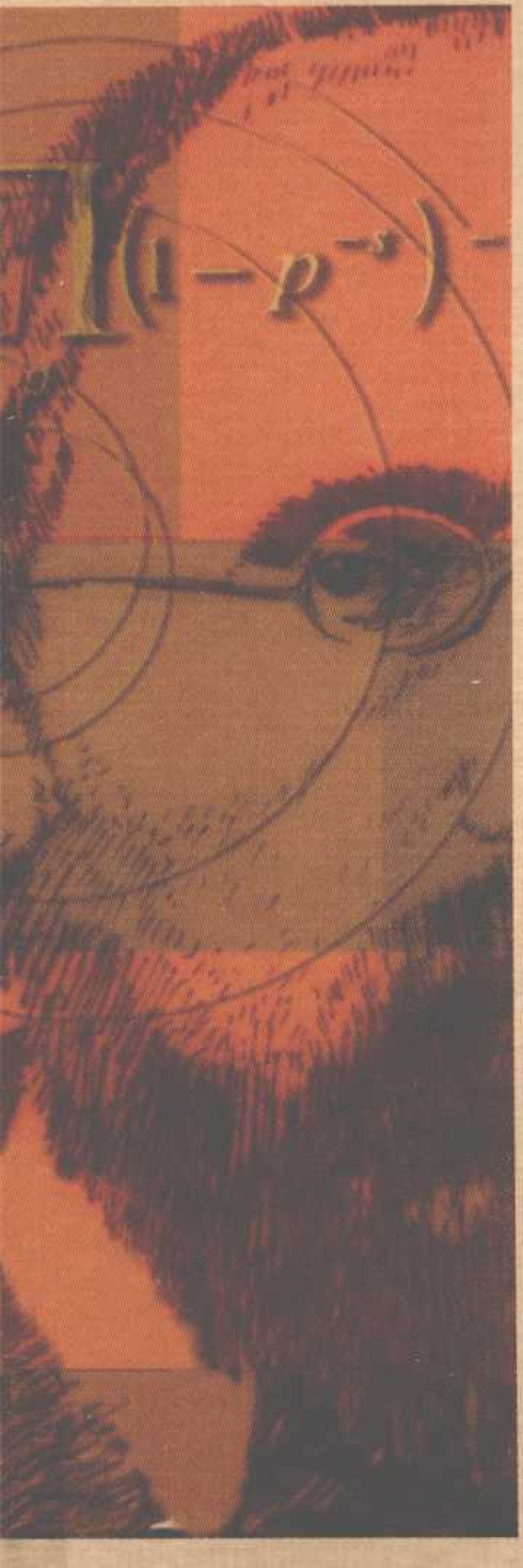
哲人石丛书 Philosopher's Stone Series

当代科普名著系列



素数之恋

黎曼和数学中最大的未解之谜

John Derbyshire

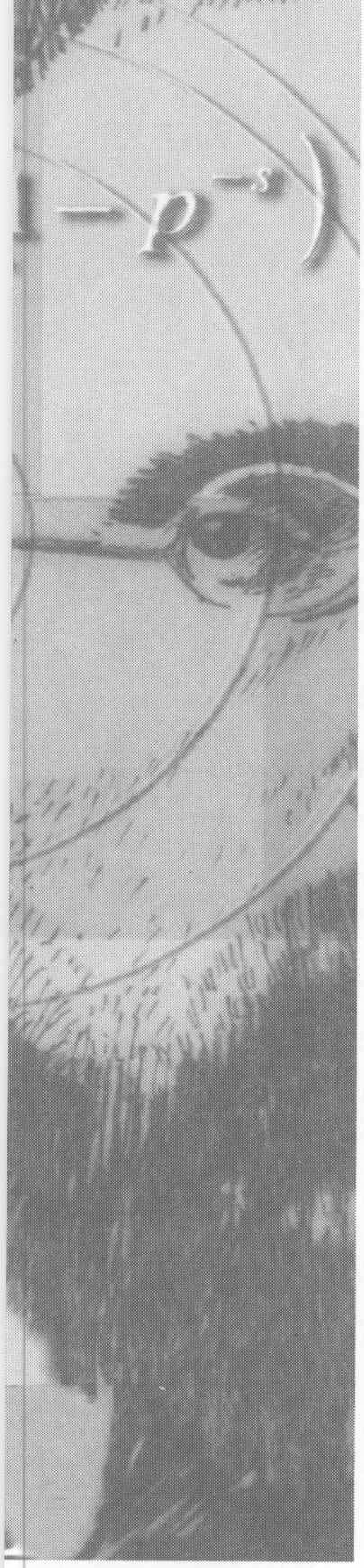
PRIME OBSESSION

BERNHARD RIEMANN AND THE GREATEST UNSOLVED PROBLEM IN MATHEMATICS

约翰·德比希尔 著

陈为蓬 译

上海科技教育出版社



哲人石丛书 Philosopher's Stone Series
当代科普名著系列

素数之恋

黎曼和数学中最大的未解之谜

约翰·德比希尔 著
陈为蓬 译

Prime Obsession:

Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics

by

John Derbyshire

责任编辑　卢　源　朱惠霖　封面设计　汤世梁

哲人石丛书

素数之恋

——黎曼和数学中最大的未解之谜

约翰·德比希尔　著

陈为蓬　译

上海世纪出版股份有限公司
上 海 科 技 教 育 出 版 社 出版发行
（上海市冠生园路393号　邮政编码200235）
网址：www.ewen.cc　www.sste.com
各地新华书店经销　丹阳市教育印刷厂印刷
ISBN 978－7－5428－4776－8/N·765
图字09－2004－142号

开本850×1168　1/32　印张13.25　插页6　字数275 000
2008年12月第1版　2008年12月第1次印刷
印数1－3 200　定价:34.00元

对本书的评价

一本非凡的书。

——纳什(John F. Nash, Jr.)

1994 年诺贝尔经济学奖得主

黎曼假设是数学中最深刻的未解问题之一。不幸的是,要说清楚这个假设的具体内容是非常困难的。写一本书,用普通数学家甚至非专业人员能理解的方式解释这个假设,现在正是时候。为德比希尔完成了这项工作而欢呼、欢呼、再欢呼。

——马丁 · 加德纳(Martin Gardner)

1956—1986 年《科学美国人》

"数学游戏"专栏作家

60 多本数学和科学著作的作者

德比希尔的力作《素数之恋》指引你领略这个世界上最著名的未解数学问题的200 年历史。黎曼假设的公式化表述,对它的研究以及它的意义,每一项都代表着数学思想中的广阔领域,而这本书巧妙地把所有这些都包容在内。满是趣闻逸事的篇章与引领初学者循序渐进地探索基本概念的篇章交替出现——既吸引住了读者,又给他们留下了持久的印象。

——贾菲(Arthur Jaffe)

哈佛大学教授

《素数之恋》叙述的是绝大多数数学家心目中的本领域最重要的未解问题，内容翔实、包罗广泛、文笔绝佳。德比希尔不仅讲述了这个问题背后的历史故事——即有关的其人其事，还囊括了理解这个问题的背景情况和人们对它的尝试解决方法所需要的全部数学知识。

——德夫林(Keith Devlin)

斯坦福大学教授

《千年难题——七个悬赏1000000美元的数学问题》的作者

内容提要

1859年8月，没什么名气的32岁数学家黎曼（Bernhard Riemann）向柏林科学院提交了一篇论文，题为“论小于一个给定值的素数的个数”。在这篇论文的中间部分，黎曼作了一个附带的备注——一个猜测，一个假设。他向那天被召集来审查论文的数学家们抛出的这个问题，结果在随后的年代里给无数的学者产生了近乎残酷的压力。时至今日，在经历了150年的认真研究和极力探索后，这个问题仍然悬而未决。这个假设成立还是不成立？

已经越来越清楚，黎曼假设掌握着打开各种科学和数学研究之大门的钥匙，但它的解答仍诱人地悬在那里，正好让我们伸手够不着。依赖于素数特性的现代密码编制术和破译术，其根基就在于这个假设。在1970年代的一系列非凡性进展中，显示出甚至原子物理学也以尚未被完全了解的方式与这个奇怪难题扯上了关系。

在《素数之恋》中，极其明晰的数学阐释文字与行文优雅的传记和历史篇章交替出现，它对一个史诗般的数学之谜作了迷人而流畅的叙述，而这个谜还将继续挑战和刺激着世人。

作者简介

根据所受的教育，约翰·德比希尔(John Derbyshire)是一位数学家和语言学家；根据所从事的职业，他是一位系统分析师；而在业余时间，他是一位著名的作家。

他的成名作是《梦见柯立芝》(*Seeing Calvin Coolidge in a Dream*)，这部1996年出版的小说大受人们欢迎，亚德利(Jonathan Yardley)在《华盛顿邮报·图书世界》(*Washington Post Book World*)上对它赞赏有加，《纽约时报·书评》(*The New York Times Book Review*)、《纽约客》(*The New Yorker*)、《波士顿环球报》(*The Boston Globe*)等报刊也一致给予好评。他的作品还频繁出现在《国家评论》(*National Review*)和《新标准》(*The New Criterion*)杂志上。

德比希尔在英国出生并成长，约20年前来到美国安家。他目前和妻子及两个孩子住在纽约的亨廷顿。

序言

1859年8月，伯恩哈德·黎曼(Bernhard Riemann)成为柏林科学院的通讯院士，对于一个青年数学家来说(他当时32岁)，这是一个崇高的荣誉。依照惯例，黎曼向科学院提交了一篇论文，对于他正在从事的某项研究作一个陈述。论文的题目是："论小于一个给定值的素数的个数"。文中，黎曼探索了普通算术中一个看似简单的问题。为了理解这个问题，试问：小于20的素数有多少个？答案是有8个：2，3，5，7，11，13，17和19。小于1000的素数有多少个？小于100万的呢？小于10亿的呢？有没有一个普遍的规律或公式可用以计算，使我们免去一个个数的麻烦呢？

黎曼用他那个时代最尖端的数学来处理这个问题，使用的是甚至今天也只在大学的高级课程中讲授的工具，并且为此创造了一个非常强大而精妙的数学对象。在论文的三分之一处，他提出了关于那个对象的一个猜测，然后写道：

> 人们当然希望对此有一个严格的证明，但是我稍稍作了一些徒劳的尝试之后，把寻求这样一个证明的事搁置一旁，因为它对

于我研究工作的当前目标来说并不是必需的。

那个不经意的、附带的猜测几乎被忽视了几十年。后来，因为我在本书中打算解释的那些理由，它逐渐抓住了数学家们的想象力，直至它成为一个具有压倒性重要地位的谜。

那个猜测后来被称为黎曼假设，它在整个20世纪一直是一个谜，到今天仍然是，因为它顶住了每一次证明或否证的尝试。事实上，这个谜现在比近年来解决的其他长期悬而未决的重大问题——四色定理(1852年提出，1976年证明)、费马大定理(约1637年提出，1994年证明)，以及许多在专业数学界之外不太知名的其他问题——都要顽固。黎曼假设现在是数学研究中的大白鲸。*

数学家对黎曼假设的专心研究持续了整个20世纪。下面是希尔伯特(David Hilbert)——他那个时代最杰出的数学英才之一——1900年在巴黎第二次国际数学家大会上的演讲：

> 素数分布理论的实质性进展不久前已由阿达马(Hadamard)、瓦莱·普桑(de la Vallée Poussin)、冯·曼戈尔特(von Mangoldt)等人作出。不过，要完全解决黎曼的论文"论小于一个给定值的素数的个数"给我们提出的那些问题，还需要证明黎曼的一个极其重要的命题的正确性，即……

接着是黎曼假设的陈述。100年以后，普林斯顿高等研究院院长、原哈佛大学数学教授格里菲思(Phillip A. Grif-

---

* 这里比喻极其重大的问题。——译者

fiths)在《美国数学月刊》2000 年 1 月号上以“21 世纪的研究挑战”(Research Challenges for the 21st Century)为题写道:

> 尽管 20 世纪取得了十分巨大的成就,仍然有几十个悬而未决的问题尚待解决。我们大多数人都会同意,下面三个问题是最富挑战性和最令人关注的。
>
> 黎曼假设。首先是黎曼假设,它逗弄了数学家 150 年……

20 世纪的最后数年里,在美国有一项令人关注的发展,就是民间数学促进会的兴起。克莱数学促进会(由波士顿的金融家克莱(Landon T. Clay)在 1998 年创办)和美国数学促进会(1994 年由加利福尼亚州的企业家弗赖伊(John Fry)建立)都把黎曼假设作为目标。克莱数学促进会为证明或否证它设立了 100 万美元的奖金;美国数学促进会为黎曼假设举行了三次大规模的研讨会(1996 年、1998 年和 2002 年),有来自世界各地的研究者参加。这些新的探索和激励是否能最终解决黎曼假设,让我们拭目以待。

与四色定理或费马大定理不同,黎曼假设不能方便地用非数学家能容易把握的说法来表述。它深处于某种相当深奥的数学理论的核心。它是这样说的:

黎曼假设

ζ 函数的所有非平凡零点的实部都是$\frac{1}{2}$。

对于一位普通读者,甚至是一位受过良好教育但没有经过高等数学训练的读者来说,这可能相当难以理解,就好像是

用古教会斯拉夫语写的。在本书中，除了描述黎曼假设的历史和与此有关的一些人物之外，我还试图把这个深奥而神秘的结论引入一般读者能理解的范围之内，并提供理解它所需要的数学知识。

* * * * *

本书的计划非常简单。奇数章（我曾经想采用素数章，但是那样做的话显得过于矫揉造作了）的内容是数学阐述，我希望让读者能渐渐地理解黎曼假设及其重要性。偶数章则提供历史和个人经历的背景材料。

我最初打算让这两条线各自独立，以让不喜欢方程和公式的读者可以只阅读偶数章，而不关心历史或轶事的读者则可以只阅读奇数章。我没有自始至终完全贯彻这个计划，而且我现在怀疑对一个如此复杂的问题这能不能做到。不过，基本格局并没有完全失去。在奇数章中有许许多多的数学，而在偶数章中则少得多，当然，你可以只阅读一组，或只阅读另一组。不过，我希望你能阅读整本书。

我这本书针对的是既聪明又好奇的非数学专业的读者。当然，这个说法会引出一些问题。我说的“非数学专业”是什么意思？我假定我的读者们掌握了多少数学知识？是的，每个人都懂得一些数学。或许大多数受过教育的人对微积分至少有一个模糊的概念。我认为我的书定位在合格地完成了高中数学课程并且或许继续学了两三门大学课程的人的水平。实际上，我的最初目标是，**根本不用任何微积分**来解释黎曼假设。结果发现我有点过于乐观。本书中只有三章涉及少量的最基本的微积分知识，随着叙述的展开我作了解释。

更多其他的内容只涉及算术和基本代数：括号项相乘，如 $(a+b)\times(c+d)$；或者重新整理方程，使得 $S=1+xS$ 变成 $S=1/(1-x)$。你也需要主动接受数学家为了节约他们写字

的力气而使用的古怪的缩写符号。我至少要做到:我认为黎曼假设不可能使用比我这里所用的更基本的数学来解释了,因此如果你读完我的书以后还不理解黎曼假设,那么你可以断定,你将永远理解不了它。

* * * * *

许多职业数学家和数学史家在我接触他们的时候给予了慷慨的帮助。我深深感谢下列各位,为他们慷慨给予的时间,为他们的指点(有时没有被采纳),为他们回答我那些反复多次的愚钝问题的耐心,以及为一次邀我到他家中作客:亚历山德森(Jerry Alexanderson),阿波斯托尔(Tom Apostol),布林(Matt Brin),孔雷(Brian Conrey),爱德华兹(Harold Edwards),海哈尔(Dennis Hejhal),贾菲(Arthur Jaffe),勒伯夫(Patricio Lebeuf),米勒(Stephen Miller),休·蒙哥马利(Hugh Montgomery),诺伊恩施万德(Erwin Neuenschwander),奥德利兹克(Andrew Odlyzko),帕特森(Samuel Patterson),萨奈克(Peter Sarnak),施罗德(Manfred Schröder),福豪尔(Ulrike Vorhauer),沃里宁(Matti Vuorinen),以及威斯特摩兰(Mike Westmoreland)。本书中任何严重的数学错误都是我的,不是他们的。布吕格曼(Brigitte Brüggemann)和艾滕艾尔(Herbert Eiteneier)帮助我弥补了我德语能力的不足。我在《国家评论》(*National Review*)、《新标准》(*The New Criterion*)和《华盛顿时报》(*The Washington Times*)的朋友们给我的酬劳金让我能在写这本书的时候养活我的孩子们。我的在线意见专栏的众多读者帮助我明白了:数学概念给非数学专业的人造成的最大困难是什么。

伴随着这些感谢的是几乎同样多的抱歉。本书所论及的主题,100 年来一直在被我们这个星球上一些最好的头脑深入研究着。以我可以使用的篇幅,并采用我选择的说明方法,

结果只能是省略与黎曼假设研究相关的整个庞大领域。你在这里找不出一个词涉及到密度假设、近似函数方程，或者关于 ζ 函数的矩的全部迷人结果——它们在长期蛰伏后恰在最近重现生机。你也找不到有任何地方提到广义黎曼假设、变形广义黎曼假设、扩充黎曼假设、总黎曼假设、变形总黎曼假设，或拟黎曼假设。

更令人不安的是，有许多工作者在这个领域中勇敢跋涉了几十年，但他们的名字在我的正文中没有出现：邦别里(Enrico Bombieri)，高希(Amit Ghosh)，哥内克(Steve Gonek)，伊万涅茨(Henryk Iwaniec，但在寄给他的邮件中，有半数写成了 Henry K. Iwaniec)，斯奈思(Nina Snaith)，以及许多其他人。我真诚地表示歉意。在开始的时候，我并不了解我承担的是一个多么宏大的主题。这本书本来很容易写成三倍或三十倍那么长，但我的编辑已经准备好大刀阔斧来删节它了。

还有一件事要承认。我抱有一种迷信的观念，就是任何并非只因受命而乏味地写成的书——即任何用关怀和感情写成的书——都有一个主导的灵魂。我的意思只是，写一本关于某个特定人物的书时，这个人物就在作者的心中，他的个性使这本书绚烂多彩。(至于小说，我想最常见的是，那个人恐怕就是作者自己了。)

本书的主导灵魂就是伯恩哈德·黎曼。他仿佛常常在我写作的时候从身后凝视着我，有时在我的想象中听到他在隔壁房间里拘谨地清着喉咙，或者是在我的数学和历史篇章的幕后小心地徘徊。通过读他，以及读关于他的一切，我对这个人产生了一种奇特而混杂的感觉：他的拙于处世、糟糕的健康、屡次失去亲人及长期的贫困，让我产生了巨大的同情，而他头脑和心灵中的非凡力量又让我充满了敬畏。

一本书总要奉献给某位在世的人，为的是让这种奉献给人带来喜悦。我把这本书奉献给我的妻子，她完全明白这个奉献有多么真挚。不过，作为一篇序言，有一个意义不能不提到，在这个意义上，本书当然应该属于伯恩哈德·黎曼，他在多灾多难的短暂一生中，给予他的同伴们许多许多价值永存的东西——其中包括这样一个问题，在他以一种他特有的羞怯态度，用一段离题的话说到他自己曾为解决它而"稍稍作了一些徒劳的尝试"之后，又让别人在一个半世纪中继续伤着脑筋。

约翰·德比希尔(John Derbyshire)
亨廷顿，纽约
2002 年 6 月

目录

目录

第一部分

素数定理