理论力学解题指南

И·M沃伦柯夫
(苏)T·Б阿依金别尔格 著
B·M奥谢茨基

邹安朝 译

《前 言》

《理论力学解题指南》与И·M沃伦柯夫著《理论力学教程》和И·B密歇尔斯基著《理论力学习题集》是三本配合成套的教材，后两书均由哈尔滨工业大学理论力学教研室翻译并出版。《指南》作者把《理论力学习题集》中的绝大多数习题，经科学分类，按插在《指南》的相应章节中，非常便于学习和解决《理论力学习题集》中的问题。

《指南》的特征是：1）作者把例题和习题按"已知力的作用线分布"和"约束特征"分类的；2）每一章、节的例题前，有简要的解题理论说明，而在例题后，作者概括了解题方法，给出了解题指南。

《指南》可供高等工业院校，理工科函授学校，师范院校和各类工科业余大学学生以及自修者作为参考，对教师讲授理论力学习题课颇有参考价值。

《指南》由哈尔滨工业大学谈开孚教授和大连工学院穆克明付教授审校的，他们提出了许多宝贵的意见；哈尔滨工业大学王铎教授对审校工作也给予了热情的关怀。在此，谨致以衷心的感谢。

由于译者的业务水平和能力所限，谬误在所难免，请读者批评指正。

译者　邹安朝

1981年8月25日于

大连师范专科学校

作者序

本《指南》为使大学生便于理论研究，使他们获得理论力学解题技能而编著的。《指南》中材料的范围和配置，基本上与И·M沃伦柯夫教授著的《理论力学教程》和И·B密歇尔斯基教授著的《理论力学习题集》相配合的：

本《指南》特别重视习题的选择和分类。书中例题分类的根据是：第一，已知力的作用线的分布；第二，约束的特征。

本《指南》第一篇和第二篇由И·M沃伦柯夫教授和T·Б阿依金别尔格副教授编著的；第三篇由И·M沃伦柯夫教授、T·Б阿依金别尔格副教授和B·M奥谢茨基编著的。

目 录

---

*此处和后文中题号是指1951年版及以后出版的И·В密歇尔斯基著的《理论力学习题集》的题号。

第一篇　静力学

第一章　汇交力系

§1　共线力系的合成

共线力系合成时，必须分下列两种情况：

1、各力作用在同一方向。该力系合力的大小等于各力的算术和，其方向与各分力方向相同並沿同一直线。

2、各力作用在同一直线上但方向不同。该力系合力的大小等于各力的代数和，其方向沿直线的某一方向。如果设沿直线的某一个方向的力为正时，则沿反方向的力则为负。

如果共线力系的各力保持平衡，则它们的合力等于零。

〔例1〕人站在矿井底上，体重为64公斤。他用跨过滑轮的绳子提起重为48公斤的重物。试问人对井底的压力是多少？（图1）

〔解〕绳子的固有重量忽略不计。因为定滑轮只改变力的方向而不改变力的大小，所以绳子上各点的张力相同，其大小等于提起重物的重量。因此，作用于人手上的绳子张力T等于提起重物的重量P，其方向竖直向上。故人受到两个力的作用：本身重量$\vec{G}$和绳子的张力$\vec{T}$。这两个力作用在一条直线上而方向相反，$\vec{G}$和$\vec{T}$的合力$\vec{R}$的大小等于它们之差，其方向沿较大力的方向，即：$R = G - T = 64 - 48 = 16$公斤。因为$G > P$，所以合力$\vec{R}$的方向竖直向下。由此得知，人对井底的压力等于16公斤。

图1

译注：原图有疵。

§2 汇交于一点的二力的合成

作用于一点上夹角为α的二力$\vec{F_1}$和$\vec{F_2}$的合力，等于该二力的几何和，它用由力$\vec{F_1}$和$\vec{F_2}$组成的平行四边形的对角线表示（图2），即

$$\vec{R}=\vec{F_1}+\vec{F_2} \qquad (1)$$

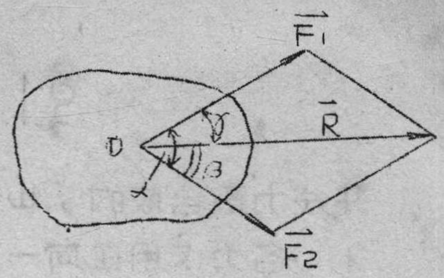

图 2

合力的大小决定于公式

$$R=(F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\cos\alpha)^{1/2} \qquad (2)$$

而合力的方向决定于$\vec{F_1}$和$\vec{F_2}$与合力$\vec{R}$间的夹角β和γ，根据正弦定理可以求出这些角的大小：

$$\frac{F_1}{\sin\beta}=\frac{F_2}{\sin\gamma}=\frac{R}{\sin(180^\circ-\alpha)} \text{ 或 } \frac{F_1}{\sin\beta}=\frac{F_2}{\sin\gamma}=\frac{R}{\sin\alpha} \qquad (3)$$

如果力F_1和F_2及其间夹角α都是已知的，则根据公式（2），先求出合力的大小，然后把合力的值代入等式（3）中，就可以求出$\sin\beta$和$\sin\gamma$，从而求出β和γ的值。

用图解法求两个汇交力$\vec{F_1}$和$\vec{F_2}$的合力时，不必作出完整的平行四边形；只要从力$\vec{F_1}$终点作出平行且等于力$\vec{F_2}$的矢量即可。连接作出的折线的终点和始点，得一矢量，该矢量就表示两个已知力$\vec{F_1}$和$\vec{F_2}$的合力的大小和方向。矢量$\vec{AC}=\vec{R}$称为力三角形ABC的闭合边（图3）。

如果两个分力$\vec{F_1}$和$\vec{F_2}$大小相等，则用二力组成的平行四边形是菱形，而合力是菱形的对角线。因为菱形的对角线互相垂直平分，所以用矢量$\vec{AC}$所代表的合力（O为AC中点）垂直平分第二条对角线BD。因此，为了求出大小相等的两个汇

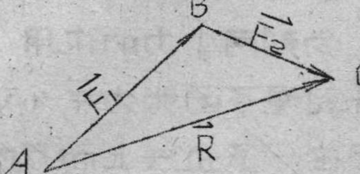

图 3

交力的合力，只要连接该二分力的作用点与它们终点连线的中点即可得矢量 $\overrightarrow{AO}$ 。然后把矢量 $\overrightarrow{AO}$ 扩大一倍，即

$$\vec{R} = 2\overrightarrow{AO}, \qquad (4)$$

合力 $\vec{R}$ 的大小等于 $R = 2F\cos\frac{\alpha}{2}, \qquad (5)$

式中α角为 $\vec{F_1}$ 和 $\vec{F_2}$ 之间夹角（图4），这个性质，在求解两个大小相等的相交力的合力时，要进一步运用。

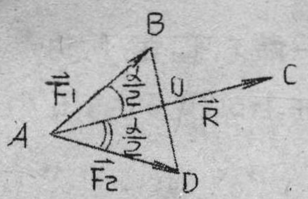

图 4

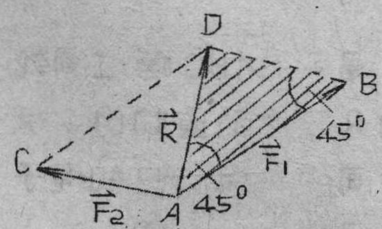

图 5

（例2）假定力 $\vec{F_1}$ 和 $\vec{F_2}$ 之间夹角等于 135^0，试问 $\vec{F_1}$ 和 $\vec{F_2}$ 比值为多大时，合力的大小等于较小力的大小？（图5）

（解）设矢量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 分别表示未知力 $\vec{F_1}$ 和 $\vec{F_2}$ ，并设 $F_2 < F_1$，$\angle CAB = 135^0$，此时，用力 $\vec{F_1}$ 和 $\vec{F_2}$ 组成的平行四边形 ABCD 的对角线 AD 是该二力的合力，即

$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = \overrightarrow{AD}.$$

根据题的条件 $R = F_2$ 或 $AD = DB$，因此三角形 ABD 为等腰三角形。由此得知，

$$\angle BAD = \angle ABD, \quad \text{而} \quad \angle BAC + \angle ABD = 180^0,$$

由此得 $\angle ABD = 180^0 - \angle BAC = 180^0 - 135^0 = 45^0$，

因此， $\angle BAD = 45^0$ 和 $\angle ADB = 90^0$，

即 $\triangle ABD$ 是直角三角形，所以

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{BD}{AB} = \sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

本题也可以运用公式(2)求解．事实上，

$$R=(F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\cos 135^\circ)^{1/2}$$

而 $R=F_2$，所以

$$F_2^2=F_1^2+F_2^2-2F_1F_2\cos 45^\circ,$$

由此得 $F_1=2F_2\cos 45^\circ=F_2\sqrt{2}$， 即 $\dfrac{F_1}{F_2}=\sqrt{2}$.

(例3) 绳子DABC跨过滑轮，它的一端C固定不动，另一端D挂一重为Q公斤的重物M。试求滑轮轴上所受到的压力和该压力与水平线间的夹角。已知绳子BC与水平线间夹角为α．(图6)．

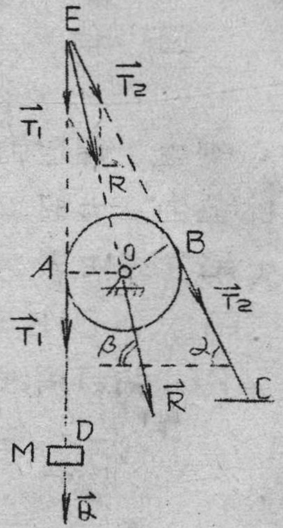

图 6

(解) 绳子AD的张力 $\vec{T_1}$ 作用于滑轮的A点上，而绳子BC的张力 $\vec{T_2}$ 作用于滑轮的B点上。因为绳子DABC的张力在其上所有点相同，所以 $T_1=T_2$．延长直线AD和BC交于E，並把力 $\vec{T_1}$ 和 $\vec{T_2}$ 沿它们的作用线移动到交点E。此时，得到两个相等力 $\vec{T_1}$ 和 $\vec{T_2}$，它们在E点上夹角为 $90^\circ-\alpha$。为了求出它们的合力，用 $\vec{T_1}$ 和 $\vec{T_2}$ 组成平行四边形。因为它们大小相等，所以得到的平行四边形为菱形。合力方向沿∠AEB的平分线，即通过O点，根据公式(5)，可以求出合力的大小：

$$R=2T\cos\left(\frac{90^\circ-\alpha}{2}\right).$$

因为绳子AD的张力 T_1 等于重物M的重量，即 $T_1=Q$，所以

$$R=2Q\cos\left(\frac{90^\circ-\alpha}{2}\right).$$

力 $\vec{R}$ 是滑轮转轴上所受到的压力．现在求力 $\vec{R}$ 和水平线间夹角 β:

$$\beta=90^\circ-\frac{90^\circ-\alpha}{2}=\frac{90^\circ+\alpha}{2}=45^\circ+\frac{\alpha}{2}.$$

§3. 平面汇交力系

1、求汇交于一点的几个力的合力，可以用依次合成的方法。该力系的合力等于各力的几何和，即

$$\vec{R}=\sum\vec{F}_i \qquad (6)$$

合力的大小和方向用封闭折线的矢量来表示。封闭折线的各边分别平行且等于各个已知力，图7表示四个力的合成。多边形ABCDE称为力的多边形。

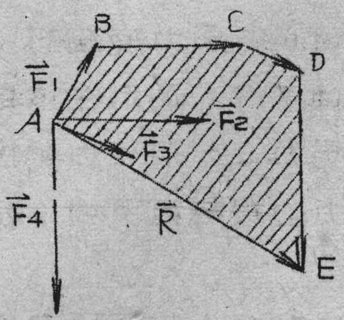

图 7

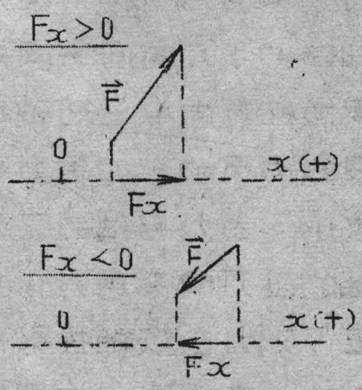

图 8

因而，如果应用力的多边形法则，那么合力可以用几何作图法（图解法）求出。

2、应用解析法（投影法），也可求出汇交力系的合力。在这种条件下，运用合力在已知轴上投影的定理，即根据合力在已知轴上的投影等于各分力在该轴上投影的代数和。

对于平面汇交力系，应用该定理时，需要求出合力在x轴和y轴上的投影：

$$R_x=\sum X_i,\qquad R_y=\sum Y_i. \qquad (7)$$

根据这些投影，按照下列公式求出合力的大小和方向：

$$R=\sqrt{(\sum X_i)^2+(\sum Y_i)^2};$$

$$\cos(\vec{R},\vec{i})=\frac{\Sigma X_i}{R},\quad \cos(\vec{R},\vec{j})=\frac{\Sigma Y_i}{R}. \tag{8}$$

于是，应用解析法解平面汇交力系合成的习题时，首先需要选取x和y的坐标轴系，再求出每个力与两坐标轴间夹角，并计算出每个力在两坐标轴上的投影。

计算已知力在轴上投影时，必须注意，该投影的绝对值等于力的大小与该力和投影轴间所成锐角余弦之积。此时，如果该投影的方向与轴的正方向相同，则投影为正，反之，则投影为负（图8）。

有时，常用另一种方便方法来确定投影的符号。如果力的方向与已知轴的正方向间夹角为锐角时，则力在该轴上的投影为正的；如果力的方向与已知轴的负方向间夹角为锐角时，则力在该轴上的投影为负的；如果力与已知轴平行，则力在该轴上投影等于力的大小：当力与轴的正方向夹角为0^0时，力的投影为正的，当力与轴的正方向夹角为180^0时，力的投影为负的；如果力与已知轴垂直，则力在该轴投影等于零。

（例4）有六个力作用在正六边形的中心上，它们的方向都指向正六边形的顶点。假定$F_1=F_3=8$公斤，$F_2=F_4=15$公斤，$F_5=F_6=36$公斤，试求这些力的合力。

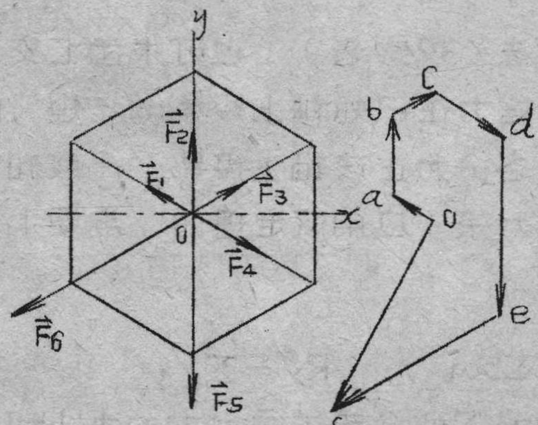

图 9

（解）解析法。选取正六边形中心作为坐标原点，取 Oy 轴方向沿着力 $\vec{F_2}$ 的作用线，而取 Ox 轴方向与力 $\vec{F_2}$ 作用线垂直，然后求每个力在这两个坐标轴上的投影。力 $\vec{F_1}$ 与 Oy 轴正方向夹角等于 60^0，而与 Ox 轴负方向夹角等于 30^0，因此

$$F_{1y}=F_1\cos 60^0 ,\qquad F_{1x}=-F_1\cos 30^0 .$$

因为力 $\vec{F_2}$ 和 $\vec{F_5}$ 方向分别沿 Oy 轴且方向相反，所以

$$F_{2y}=F_2 ,\qquad F_{2x}=0 ,$$

$$F_{5y}=-F_5 ,\qquad F_{5x}=0 .$$

而力 $\vec{F_3}$ 与 Ox 轴正方向间夹角等于 30^0，而与 Oy 轴正方向间夹角等于 60^0，因此，

$$F_{3x}=F_3\cos 60^0 ,\qquad F_{3y}=F_3\cos 60^0 .$$

用相似方法，求出其余两个力在坐标轴上投影：

$$F_{4x}=F_4\cos 30^0 ,\qquad F_{4y}=-F_4\cos 60^0 ,$$

$$F_{6x}=-F_6\cos 30^0 ,\qquad F_{6y}=-F_6\cos 60^0 .$$

求出已知各力在两坐标轴上投影以后，再计算出它们的合力在这两个坐标轴上投影：

$$R_x=\Sigma F_x=-8\times\frac{\sqrt{3}}{2}+8\times\frac{\sqrt{3}}{2}+15\times\frac{\sqrt{3}}{2}-36\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-10.5\sqrt{3}\approx-18.2\text{公斤}.$$

$$R_y=\Sigma F_y=8\times\frac{1}{2}+15+8\times\frac{1}{2}-15\times\frac{1}{2}-36-36\times\frac{1}{2}=-38.5\text{公斤}.$$

现在，根据公式（8）求出合力的大小和方向：

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}=\sqrt{(-38.5)^2+3\times(10.5)^2}\approx 42.6\text{公斤};$$

$$\cos(\vec{R},\vec{i})=\frac{R_x}{R}=\frac{-18.2}{42.6}\approx-0.422,\quad (\vec{R},\vec{i})\approx 155^0,$$

$$\cos(\vec{R},\vec{j})=\frac{R_y}{R}=-\frac{38.5}{42.6}\approx-0.905,\quad (\vec{R},\vec{j})\approx 115^0.$$

本题图解法如图9所示。

§4. 空间汇交力系

与平面汇交力系一样，空间汇交力系的合力也等于各分力的几何和，即合力的大小和方向用力的多边形的闭合边表示，力的多边形的各边等于且平行于各分力。当不在同一平面内的分力数目等于三个的特殊情况下，它们的合力大小和方向用由各分力组成的平行六面体的对角线表示，空间汇交力系所组成的力的多边形不是平面图形，所以，空间汇交力系的合成问题，常用解析法求解。

为了用解析法求空间汇交力系的合力的大小和方向，应用合力在已知轴上投影定理，先求出合力在Ox、Oy、Oz三个坐标轴上投影：

$$R_x=\Sigma x_i,\quad R_y=\Sigma y_i,\quad R_z=\Sigma z_i. \qquad (9)$$

确定合力在各坐标轴上投影后，再根据下列公式求出它的大小和方向：

$$R=\sqrt{(\Sigma x_i)^2+(\Sigma y_i)^2+(\Sigma z_i)^2},$$

$$\cos(\vec{R},\vec{i})=\frac{\Sigma x_i}{R},\quad \cos(\vec{R},\vec{j})=\frac{\Sigma y_i}{R},\quad \cos(\vec{R},\vec{k})=\frac{\Sigma z_i}{R}. \qquad (10)$$

计算已知力在三个互相垂直坐标轴上投影时，常迂到下列两种情况：

1. 各力和三个坐标轴间夹角已知或由题的条件（如在相应的三角形中）很容易求出这些夹角。在这种情况下，就象平面汇交力系中的方法一样，求出投影的大小和符号（请见上节）。

2、已知力和需要把该力在其上投影的坐标轴不在同一平面内，并且它们之间夹角未知。在这种情况下，应该先把已知力投影在投影轴所在的坐标平面上，然后把在该平面内所得到的投影再投影在已知坐标轴上。此时，必须求出已知力和该力投影在其上的坐标平面间的夹角，然后，求出力在坐标平面上的投影与已知坐标轴间的夹角，

（例5）试求作用于长方体顶点0上的三个力$\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$和$\vec{F}_3$的合力，假定$F_1=F_2=20$公斤，$F_3=30$公斤；$a=50cm$，$b=25cm$，$C=100cm$；$AC=CB$。（如图10—1所示）。

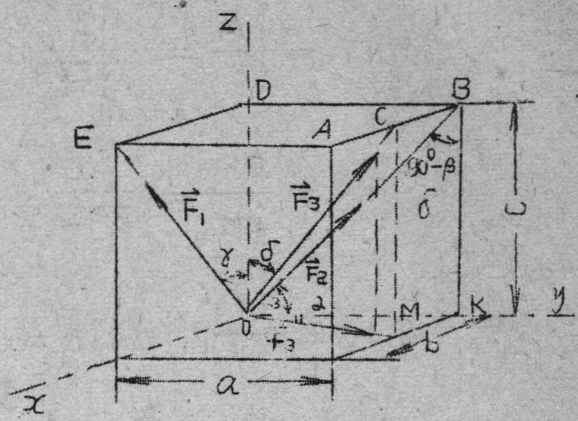

图10—1

（解）取0x、0y和0z轴的方向分别沿长方体的三个边。为求未知的合力$\vec{R}$的大小和方向，先求合力在三个坐标轴上的投影。因为力$\vec{F}_1$在z0x平面内，所以$F_{1y}=0$．用γ表示力$\vec{F}_1$和0z轴间的夹角，此时$F_{1z}=F_1\cos\gamma$，$F_{1x}=F_1\sin\gamma$。力$\vec{F}_2$在z0y面内，所以$F_{2x}=0$．如果用β表示力$\vec{F}_2$和y轴间夹角，则$F_{2y}=F_2\cos\beta$，$F_{2z}=F_2\sin\beta$。並且β和γ角很容易在三角形0DE和0BK中求出，力$\vec{F}_3$与0x和0y轴间夹角不能直接由图中求得，所以，为了求$\vec{F}_3$在x轴和y轴上的投影，先把该力投影在x0y面上，然后把所得到的投影f_3再投影在x轴和y轴上。此时

$$f_3=F_3\sin\delta,$$

$$F_{3x}=f_{3x}=f_3\sin\alpha=F_3\sin\delta\sin\alpha,$$

$$F_{3y}=f_{3y}=f_3\cos\alpha=F_3\sin\delta\cos\alpha.$$

此外，　$F_{3z}=F_3\cos\delta$，　式中$\alpha=\angle K0M$，$\delta=\angle D0C$.

现把求出的所有已知力在各坐标轴上投影值列在表1中：

表 1

投　影	力		
	$\vec{F}_1$	$\vec{F}_2$	$\vec{F}_3$
F_x	$F_1\sin\gamma$	0	$F_3\sin\delta\sin\alpha$
F_y	0	$F_2\cos\beta$	$F_3\sin\delta\cos\alpha$
F_z	$F_1\cos\gamma$	$F_2\sin\beta$	$F_3\cos\delta$

在三角形 ODE ，OBK，OMC和OMK 中，求得：

$$\sin\gamma=\frac{DE}{OE}=\frac{b}{\sqrt{b^2+C^2}}, \qquad \cos\gamma=\frac{OD}{OE}=\frac{C}{\sqrt{b^2+C^2}},$$

$$\sin\beta=\frac{BK}{OB}=\frac{C}{\sqrt{a^2+C^2}}, \qquad \cos\beta=\frac{OK}{OM}=\frac{a}{\sqrt{a^2+C^2}},$$

$$\sin\delta=\frac{OM}{OC}, \quad \cos\delta=\frac{CM}{OC}, \quad \sin\alpha=\frac{MK}{OM}, \quad \cos\alpha=\frac{OK}{OM}.$$

$$\sin\delta\cos\alpha=\frac{OK}{OC}=\frac{a}{OC}, \quad \sin\delta\sin\alpha=\frac{MK}{OC}=\frac{b}{2OC}.$$

在三角形 OCM 和OMK 中，有

$$OC^2=OM^2+MC^2, \qquad OM^2=OK^2+KM^2,$$

所以， $OC^2=OK^2+KM^2+MC^2$， $OC=\sqrt{a^2+\frac{b^2}{4}+C^2}$.

如果把 a、b 和 C 的值代入得：

$$\sin\gamma=\frac{1}{\sqrt{17}}, \quad \sin\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos\delta=\frac{8}{9},$$

$$\cos\gamma=\frac{4}{\sqrt{17}}, \quad \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin\delta\sin\alpha=\frac{1}{9}.$$

$$\sin\delta\cos\alpha=\frac{4}{9}.$$

根据公式（9）计算合力在 x、y和 z轴上投影：

$$R_x=\frac{1}{\sqrt{17}}F_1+\frac{1}{9}F_3\approx 8.18\text{公斤},$$

$$R_y=\frac{1}{\sqrt{5}}F_2+\frac{4}{9}F_3\approx 22.28\text{公斤},$$

$$R_z=\frac{4}{\sqrt{17}}F_1+\frac{2}{\sqrt{5}}F_2+\frac{8}{9}F_3\approx 63.96\text{公斤}.$$

合力的大小和方向余弦决定于公式（10）

$$R=\left((8.18)^2+(22.28)^2+(63.96)^2\right)^{1/2}\approx 68.22 \text{ 公斤},$$

$$\cos(\vec{R},\vec{i})=\frac{8.18}{68.22}=0.119,\quad \cos(\vec{R},\vec{j})=\frac{22.28}{68.22}\approx 0.326,$$

$$\cos(\vec{R},\vec{k})=\frac{63.96}{68.22}\approx 0.937.$$

（注解）力 $\vec{F}_3$ 在各坐标轴上投影可以用另外的方法求出。把该力投影后，将有（图10—2）：

$F_{3x}=0L=K_1M_1$，

$F_{3y}=0K_1$，$F_{3z}=0N=C_1M_1$.

因为 $\Delta 0KM \backsim \Delta 0K_1M_1$，

和 $\Delta 0CM \backsim \Delta 0C_1M_1$，

所以 $\frac{F_{3x}}{\frac{b}{2}}=\frac{F_{3y}}{a}=\frac{f}{0M}$ 和

$$\frac{f}{0M}=\frac{F_{3z}}{c}=\frac{F_3}{0C}.$$

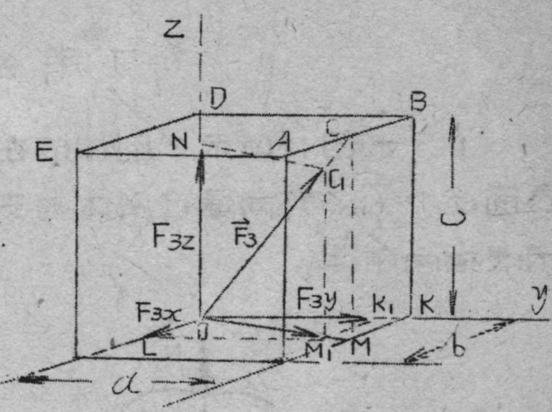

图10—2

因此 $\frac{F_{3x}}{b/2}=\frac{F_{3y}}{a}=\frac{F_{3z}}{c}=\frac{F_3}{0C}$，

由此得 $F_{3x}=F_3\cdot\frac{b}{20C}=\frac{10}{3}$，

$$F_{3y}=F_3\cdot\frac{a}{0C}=\frac{40}{3},$$

$$F_{3z}=F_3\cdot\frac{c}{0C}=\frac{80}{3}.$$