休姆斯題解叢書

1986

高等微積分
原理及題解

李鴻璋譯

含925個問題及解答

曉園出版社
世界圖書出版公司

高等微積分

原理及題解

李　鴻　璋　譯

曉　園　出　版　社
世界图书出版公司
北京・广州・上海・西安
1993

高等微积分原理及题解

M. R. 施皮格尔　原著

李鸿璋　译著

*

晓园出版社出版

世界图书出版公司北京公司 重印

北京朝阳门内大街 137 号

北京中西印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1993 年 11 月第　一　版　　开本· 787×1245 1/20

1993 年 11 月第一次印刷　　印张: 25

印数· 0001－1000　　字数: 30 万字

ISBN. 7－5062－1636－1/O·77

定价: 19.40 元 (W,9304/6)

譯　序

本書乃適用於已修過初等微積分的理工科學生，它對於研究有關工程科學、工程數學及物理學的學生而言，不失為一本優良的參考書。

由於書中內容層次分明、條理清晰且例題豐富，研讀此書將可獲事半功倍之效，為免於語言的隔閡，所以特別翻譯此書以饗讀者。

本書共計十七章。第一章至第十二章是對於初等微積分中的論題做更深入地探討，以嚴謹的定理敍述與證明來鞏固觀念基礎。而第十三章至第十七章則是探討與高等工程數學或工程學相關的特殊論題，如 γ 與 β 函數、傅立葉級數、橢圓積分、複變函數等等，乃本書特點之一。另一個特點是在每章末尾皆有附解法的問題，對於容易誤導的觀念特別强調並說明，可以讓您在學習過程中充分掌握書中的要義與菁華，也因而使得內容更生動活潑而不呆板。

茲以譯者才疏學淺，閱歷有限，付梓倉促，或有遺誤在所難免，尚祈各界先進不吝指正。

譯者　　謹　識

民國七十六年二月

原　序

本科目一般稱爲“高等微積分”，它對於不同的人代表著不同的意義。對某些人來說，它主要是代表由高等的觀點着眼的初等微積分，也就是說，有較嚴謹的定理敍述及證明。而對某些人，它則代表一些被認爲很重要，但却不能包含於初等課程中的特殊高等論題。

在本書中我們致力於每個人認爲理想的方法中，採取折衷方法。書中的前幾章有鑑於已經在初等微積分出現過的基本觀念的複習與推廣。這將對原先就學過微積分但已忘掉部分的人是有幫助的；他們須要“恢復一下記憶”。它也可用來對接受不同型式的微積分課程的學生提供一個共同的背景。後面幾章呈現特殊的高等論題，它對於科學家、工程師及數學家而言，若他們想在自己既有的領域中變得精練的話，此書是根本而不可或缺的。

本書是設計用來在高等微積分課程中當做教科書或是所有現行標準教科書的參考資料。對於選修物理學、工程學或任何採用高等數學方法的其他種種領域的學生是很有用的。

每一章開頭對於定義、原理及定理皆有清楚而詳細的敍述，並附帶說明與描述用的資料。接著有各種層次的附解及補充問題組。附有解法的問題有助於說明及詳述理論、導致較敏銳的問題焦點，沒有這些，學生將不斷地感覺到本身的立場不穩固、並且重覆提供對學習有重要影響的基本原理。很多定理的證明及基本結果的推導皆包含在這些附解問題之中。而大多數附有答案的補充題則當作是對每一章內容的徹底回顧。

論題包括含有單變數或多變數函數的微分與積分計算法及它們的應用。向量法則在稍早便加以介紹，而且每當它們有助於引發興趣或了解的時候即被使用，它們也使得其本身變得很容易而有利於簡潔的表示法。其他較特殊的論題包含線與面積分、積分定理、無窮級數、瑕積分、γ 與 β 函數、及傅立葉級數。額外的特點有關於傅立葉積分、橢圓積分及複變函數各章，在研習高等工程學、物理學及數學時是很有用的。

本書比大部分的課程所包含的還要多出甚多的資料內容，這點使得本書更富彈性，也提供了一本更有用的參考書，並且刺激對論題更高的研究興趣。

我想藉這個機會謝謝 Schaum 出版公司的所有職員，感謝他們應作者的要求而在外觀上不斷地力求完美無瑕的充分合作。

Rensselaer 理工學院　　　　M. R. Spiegel

12月，1962

目　　錄

第一章　數　1

第二章　函數、極限與連續性　27

第三章　序　列　57

第四章　導　數　79

第五章　積　分　109

第六章　偏導數　137

第七章　向　量　179

第一章
數

1-1 集 合

具有特別的性質之物體所形成的**集合**(set)、**族**(class)或**聚集**(collection)乃是數學的基本概念。例如，我們可以說所有大學教授所成的集合，或所有英文字母A、B、C、D、…、Z所成的集合等等。集合中的個體稱為**元素**(member or element)，而集合的任意部分稱為該集合的**部分集合**(subset)，如A、B、C是A、B、C、D、…、Z的部分集合。不含任意元素的集合則稱為**空集合**(empty or null set)。

1-2 實 數

我們對下列各種形式的數均已非常熟悉：

1. **自然數**(natural numbers) 1、2、3、4、…，也稱為**正整數**(positive integers)可用來計算一集合的元素個數，隨著時代的不同所用的符號也不同，如羅馬人用Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、…表示。任意兩個自然數a與b的和(sum) $a+b$與積(product) $a\cdot b$或ab仍是自然數。我們通常說，自然數所成的集合在加法和乘法的運算下是封閉的，或者說對於這些運算它具有**封閉性**(closure property)。

2. **負整數與零**(negative integers and zero)分別記成-1、-2、-3、…與0，是源於解方程式如$x+b=a$，其中a與b為任意自然數。由此可導出減法運算或加法的逆運算，寫成$x=a-b$。

   正整數、負整數與零所成的集合稱為整數集合。

3. **有理數**(rational numbers)或分數如$\frac{2}{3}$、$-\frac{5}{4}$、…是源自解如$bx=a$的方程式，其中a與b為任意整數，且$b\neq 0$。如此可導出除法運算或乘法的逆運算，寫成$x=a/b$或$a\div b$，其中a為**被除數**(numerator)而b則為**除數**(denominator)。

   因為當$b=1$時，此有理數即為一整數，所以整數集合是有理數的部分集合。

4. **無理數**（irrational numbers）如 $\sqrt{2}$ 與 π 不是有理數，即不能表示成 a/b 的形式（稱爲 a 與 b 的商），其中 a 與 b 是整數而 $b \neq 0$ 。

　　有理數與無理數所成的集合稱爲**實數**（real numbers）集合。

1·3 實數的小數表示法

任何實數都可表示成小數（decimal）的形式，例如 $17/10=1.7$ ，$9/100=0.09$ ，$1/6=0.16666\cdots$ 。若是有理數則其小數位數不是有限，就是無限；但若爲無限，則會有一組數字最後會重覆，例如 $\frac{1}{7}=0.142857142857142\cdots$ 。若是無理數如 $\sqrt{2}=1.41423\cdots$ 或 $\pi=3.14159\cdots$ ，則無重覆出現。我們通常可視小數的位數是無止境的，例如，1.375 與 1.3750000 …或 1.3749999 …是相同的。爲了標示重現的小數，我們有時候在重覆的數字循環上標一點，如 $\frac{1}{7}=0.\dot{1}\dot{4}\dot{2}\dot{8}\dot{5}\dot{7}$ ，$\frac{19}{6}=3.1\dot{6}$ 。

在小數系統裏使用十個數字 0、1、2、…、9 。但也可以設計使用較少或較多數字的數字系統。例如在**二進位制**（binary system）只使用 0 與 1 兩個數字（見問題 32 與 33）。

1·4 實數的幾何表示法

實數的幾何表示法是在線上的點，該線稱爲**實數軸**（real axis），如下圖，也是我們所熟知。任一實數必對應於線上一點且僅有一點，反之亦然，也就是說實數集合與線上的點集合間是一對一對應（correspondence）。因此我們常互相交換地使用點與實數。

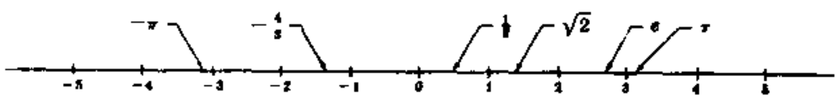

圖 1-1

在零的右邊的實數稱爲**正數**（positive numbers）；在左邊者稱爲**負數**（negative number），而 0 本身既非正亦非負。

線上任意兩有理數（或無理數）之間，存在有無限多個有理數（或無理數）。這個事實告訴我們有理數（或無理數）集合是**處處稠密的集合**（everywhere dense set）。

1·5 實數的運算

如果 a、b、c 屬於實數所成的集合 R ，則：

1. $a+b$ 與 ab 屬於 R　　　　封閉律

2. $a+b=b+a$　　加法交換律
3. $a+(b+c)=(a+b)+c$　　加法結合律
4. $ab=ba$　　乘法交換律
5. $a(bc)=(ab)c$　　乘法結合律
6. $a(b+c)=ab+ac$　　分配律
7. $a+0=0+a=a,\ 1\cdot a=a\cdot 1=a$

　　0 稱爲加法的單位元素（identity），而 1 則爲乘法單位元素。

8. 對於任一實數 a，必存在一數 x 屬於 R，使得 $x+a=0$。

　　x 稱爲 a 的加法反元素，記爲 $-a$。

9. 對於任意數 $a\neq 0$，必存在一數 x 屬於 R，使得 $ax=1$。

　　x 稱爲 a 的乘法反元素，記爲 a^{-1} 或 $1/a$。

這些規則使我們做代數運算時有所依據。若某集合之元素能滿足上述定律，則稱該集合爲場（field），如 R 便是一例。

1·6 不等式

若 $a-b$ 是一個非負數的話，則我們說 a 大於或等於 b，或者說 b 小於或等於 a，且分別寫成 $a\geq b$ 或 $b\leq a$。如果 $a=b$ 爲不可能的話，便寫成 $a>b$ 或 $b<a$。在幾何上來說，$a>b$ 表示 a 在實數軸上所對應的點在 b 所對應的點之右方。

例題 1.1

$3<5$ 或 $5>3$；$-2<-1$ 或 $-1>-2$；$x\leq 3$ 表示 x 是一個等於 3 或小於 3 的實數。

如果 a、b 與 c 爲任意實數，則：

1. $a>b$，$a=b$ 或 $a<b$　　三一律
2. 若 $a>b$ 且 $b>c$，則 $a>c$　　遞移律
3. 若 $a>b$ 則 $a+c>b+c$
4. 若 $a>b$ 且 $c>0$，則 $ac>bc$
5. 若 $a>b$ 且 $c<0$，則 $ac<bc$

1·7 實數的絕對值

實數 a 的絕對值表成 $|a|$，其定義爲若 $a>0$ 則爲 a；若 $a<0$ 則爲 $-a$；若 $a=0$ 則爲 0。

例題 1.2 $|-5|=5$, $|+2|=2$, $|-\frac{3}{4}|=\frac{3}{4}$, $|-\sqrt{2}|=\sqrt{2}$, $|0|=0$.

1. $|ab| = |a||b|$ 　或　 $|abc\ldots m| = |a||b||c|\ldots|m|$
2. $|a+b| \leqq |a|+|b|$ 　或　 $|a+b+c+\ldots+m| \leqq |a|+|b|+|c|+\ldots+|m|$
3. $|a-b| \geqq |a|-|b|$

在實數軸上任意兩點（實數）a 與 b 的距離爲 $|a-b|=|b-a|$。

1·8 指數與根數

實數 a 自乘 p 次的乘積 $a \cdot a \cdots a$ 記爲 a^p，其中 p 稱爲指數（exponent），而 a 稱爲底（base）。且下列規則成立：

$$1.\ a^p \cdot a^q = a^{p+q} \qquad 3.\ (a^p)^r = a^{pr}$$

$$2.\ \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \qquad 4.\ \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

只要不包含被零除的情況，上述規則可推廣到任意實數上。當 $p=q$ 或 $p=0$ 時，爲了運用規則 2，我們定義 $a^0=1$，$a^{-q}=1/a^q$。

如果 $a^p=N$，其中 P 爲正整數，我們稱 a 爲 N 的 p 次方根，寫成 $\sqrt[p]{N}$。N 的 p 次方根可能不只一個，例如由於 $2^2=4$ 且 $(-2)^2=4$，所以 4 有兩個實方根，即 2 與 -2。習慣上正的方根記做 $\sqrt{4}=2$ 而負方根記做 $-\sqrt{4}=-2$。

如果 p 與 q 都是正整數，我們定義 $a^{p/q}=\sqrt[q]{a^p}$。

1·9 對　數

如果 $a^p=N$，則 p 稱爲以 a 爲底 N 的對數，寫做 $p=\log_a N$。如果 a 與 N 都是正數且 $a \neq 1$，則 p 只有一個實數值。下列三個規則成立：

$$1.\ \log_a MN = \log_a M + \log_a N \qquad 2.\ \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$3.\ \log_a M^r = r \log_a M$$

在實用上常使用兩種基底，一種是以 $a=10$ 爲底的布里格制（Briggsion system），一種是以 $a=e=2.71828\cdots$ 爲自然基底（natural base）的納丕爾制（Napierian system）。

1·10 實數系的公理基礎

我們通常藉由經驗，從一些基本公理的集合或不證明的眞理，如第二頁的敍述

1-9，而建立數系。

如果我們假定已知自然數與加法和乘法的運算（雖然可能甚至要由集合的觀念開始），我們會發現，若R是自然數所成的集合，則第二頁的敍述1-6仍成立，而7-9則不成立。

若要將7和8當做額外的要求，則須引入-1、-2、-3、…和0等數。而9則須引入有理數。

可採用公理1-6來定義這些新得到的數的運算，而其中R爲整數所成的集合。如此可導出下列敍述的證明，如$(-2)(-3)=6$，$-(-4)=4$，$(0)(5)=0$等等，在基礎數學中這些敍述通常被視爲理所當然。

我們也可引入整數次序或不等的觀念，從而導出有理數的不等關係。例如，如果a、b、c、d爲正整數，我們定義$a/b>c/d$若且唯若$ad>bc$，同理可推展到負整數上。

一旦我們有了有理數的集合和其相關的不等規則，如前面所述，那麼便可以將它們表在實數軸上的點。我們可以證明在線上的有些點並不代表有理數（如$\sqrt{2}$、π等）。這些無理數可以用很多方式來定義，其中一種是用狄俤鏗分割（Dedekind cut）的觀念（見問題34）。由此我們可以證出無理數的一般代數規則，且可證出不可能再有更多的實數了。

1·11 點集合，區間

在實數軸上的點（實數）集合，稱爲**一維點集合**（one-dimensional point set）。滿足$a\leq x\leq b$之點x所成的集合稱爲閉區間（closed interval），記作$[a, b]$。而集合$a<x<b$稱爲開區間（open interval），記作(a, b)。集合$a<x\leq b$與$a\leq x<b$分別記作$(a, b]$和$[a, b)$稱爲半開（half open）或半閉（half closed）區間。

符號x可用來表示集合中的任一數或任一點，稱爲變數（variable）。已知數a和b則稱爲常數（constant）。

例題1.3

滿足$|x|<4$的所有x所成的集合，即爲$-4<x<4$，可表示成開區間$(-4, 4)$。

集合$x>a$也可以表成$a<x<\infty$，這類的集合稱爲無限（infinite）或無界區間（unbounded interval），同理，$-\infty<x<\infty$代表所有實數x。

1·12 可數性

一個集合的元素若可與自然數成1對1對應，則稱爲可數的（countable or denumerable）。

例題1.4

偶數自然數 2、4、6、8、…是可數的集合，因其有如下的1對1對應：

給定的集合	2	4	6	8	…
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	
自然數	1	2	3	4	…

一個集合若能與其本身的部分集合成1對1對應的話，則稱爲**無限的**（infinite）。而一個可數的無限集合則稱爲**可數的無限**（countably infinite）。

有理數的集合是可數的無限，而無理數的集合則是不可數的無限（見問題 17－20）。

集合的元素個數稱爲**基數**（cardinal number）。一個可數的無限集合其基數被指定爲 $\aleph_0$。實數集合（或任何可與此集合成1對1對應的集合）的基數C，被稱做**連續統的基數**（cardinality of continuum）。

1·13 鄰 域

若 $\delta>0$，則 $|x-a|<\delta$ 的所有 x 的集合稱爲 a 的 δ **鄰域**（neighbourhood）。而 $0<|x-a|<\delta$ 的所有 x 的集合，其中 $x=a$ 不包括在內，稱爲 a 的**去心 δ 鄰域**（deleted δ neighbourhood）。

1·14 極限點

若某數 l 的任一去心鄰域都包含某集合的元素，則稱 l 爲該集合的**極限點**（limit point）或**聚點**（point of accumulation or cluster point）。換言之，對於任意小的 $\delta>0$，我們都可以在此集合中，找到一個滿足 $|x-l|<\delta$ 而異於 l 的元素 x。若將 δ 逐步減少，則我們必將發現有無限個 x 値。

一個有限的集合不可能有極限點，而一個無限的集合未必有極限點。因此自然數沒有極限點，而有理數集合則有無限個極限點存在。

一個集合若包含了所有它本身的極限點，則稱爲**閉集合**（closed set）。$\sqrt{2}$ 是有理數集合的一個極限點但卻不是該集合的元素（問題5），所以有理數集合不是一個閉集合。而集合 $0\leqq x\leqq 1$ 是一個閉集合。

1·15 邊 界

如果集合中的所有元素 x，皆滿足 $x\leqq M$，則該集合**上方有界**（bounded above），且 M 稱爲**上界**（upper bound）。同理，若 $x\geqq m$，則集合**下方有界**（bounded below）而m稱爲下界（lower bound）。如果所有的x皆滿足$m \leq x \leq M$，則該集合稱爲有界的（bounded）。

如果$\bar{M}$爲一數，而集合中任一元素皆不比$\bar{M}$大，且對每一個$\epsilon > 0$，至少有一個元素超過$\bar{M} - \epsilon$，則$\bar{M}$稱爲該集合的最小上界（least upper bound，l.u.b）。同理，任一元素皆不比$\bar{m}$小，且對每一個$\epsilon > 0$，至少有一個元素小於$\bar{m} + \epsilon$，則$\bar{m}$稱爲該集合的最大下界（greatest lower bound，g.l.b）。

1-16 瓦士曲斯與波查諾定理

瓦士曲斯與波查諾定理（Weierstrass-Bolzano theorem）是說明每一個有界的無限集合至少有一個極限點。在第三章的問題23中，將證明此定理。

1-17 代數數與超越數

一數x若是一多項式方程式（polynomial equation）

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \tag{1}$$

的一個解，其中$a_0 \neq 0$，$a_1, a_2, \cdots, a_n$都是整數，而n是正整數稱爲方程式的次數（degree），則x稱爲代數數（algebraic number）。而無法表成任何一個整數係數多項式方程式的解的數則稱爲超越數（transcendental number）。

例題1.5

$\frac{2}{3}$和$\sqrt{2}$分別爲$3x-2=0$和$x^2-2=0$的解，所以都是代數數。

數π和e可證明是超越數。可是我們仍無法決定某些數如$e\pi$或$e+\pi$是不是代數數。

代數數所成的集合是一個可數的無限集合（見問題23），但超越數所成的集合則是不可數的無限集合。

1-18 複數系

由於沒有實數能滿足多項式方程式$x^2+1=0$或類似的方程式，因此必須引入複數集合。

我們可以把複數看成$a+bi$的形式，其中a和b皆爲實數，分別稱爲實部（real part）和虛部（imaginary part），而$i=\sqrt{-1}$稱做虛數單位（imaginary unit）。若且唯若$a=c$且$b=d$，則兩複數$a+bi$和$c+di$才會相等。我們可將實數視爲複數集合的部分集合，其中$b=0$。複數$0+0i$等於實數中的0。

複數$a+bi$的絕對值（absolute value）或模數（modulus）定義成$|a+bi| =$