初中数学教学辅导

代数

第四册

广州市教育局教研室编

目　　录

第一章　直角坐标系……………………………………（ 1 ）

第二章　解三角形……………………………………（ 55 ）

第三章　函数及其图象………………………………（ 143 ）

第四章　统计初步……………………………………（ 203 ）

附：学年总复习…………………………………（ 223 ）

第一章　直角坐标系

说明：由于学生首次接触坐标方法，在初中阶段，他们的知识面还较窄，而本章是解析几何的开头，内容比较重要．因此，在可能条件下，要讲得细致些，练习充分些．基于以上想法，我们比教学大纲和教学参考书的要求，增多了几个课时．有些课的内容，比较适合重点中学的教学，老师们在使用时，可根据实际情况灵活掌握．

第　1　课

课　　题：数轴和平面上点的表示法

教学目的：1.复习数轴的基础知识及数轴上的点和实数的一一对应关系；

2.指出平面上的点的位置必须用两个带有不同方向的量表示，为引入直角坐标系作准备．

教学过程：Ⅰ　介绍本学期学习内容，提出学习要求．（由教师根据学生实际情况而定）．

Ⅱ　复习数轴的有关知识

1.一直线，如果选定了其中一点为原点，规定了一个长度单位，并规定了其中一个方向为该直线的方向，则称该直线为数轴．

直线构成数轴的三要素是 $\begin{cases}（1）原点；\\（2）方向；\\（3）长度单位．\end{cases}$

利用数轴可以表示有方向的量．

2.用数轴上的点表示实数．

首先复习实数的系统：

$$
\text{实数}\begin{cases}
\text{有理数}\begin{cases}
\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\
\text{分数}\begin{cases}\text{有限小数}\\ \text{无限循环小数}\end{cases}
\end{cases}\\
\text{无理数——无限不循环小数．}
\end{cases}
$$

然后，通过下面例1、例2着重指出数轴上的点和实数存在一一对应关系．就是说，对于每个实数，可以找到数轴上唯一的点与之对应，反之，对于数轴上每个点，亦可以找到唯一的实数与之对应．

例1　在数轴上表示以下各数：

（1）2；（2）-3；（3）1.3；（4）$-2\frac{1}{3}$．

例2　在数轴上表示以下各数：

（1）$\sqrt{2}$；（2）$\sqrt{3}$；（3）π．

解法一：先求出上述各数的近似值（1）$\sqrt{2}\approx1.414$；（2）$\sqrt{3}\approx1.732$；（3）$\pi\approx3.142$．再用数轴上的有理点近似表示．（图略）

解法二：用几何作图方法，作出线段表示$\sqrt{2}$和$\sqrt{3}$，然后在数轴上找出相应的点．（下图给出了一种作法，可以启发学生想出其他作法．）

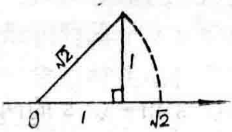

图 1 — 1

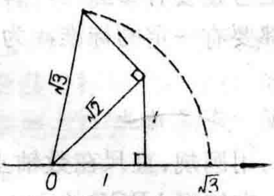

图 1 — 2

表示π的线段的长，可以用实验方法作出，以单位1为直径作圆，用细线绕圆一周，细线的长就是π的值。

3.数轴上点的坐标

由于数轴上的所有的点和全体实数建立了一一对应关系，数轴 l 上的点P所对应的实数x，叫做P点的坐标，记作x_P或P(x)。

Ⅲ 平面上的点的表示

在生产实践和科学实验中，常常要刻划一个物体的位置，用一个数能否准确刻划物体的位置？例如，某个学生在课室内坐的位置，我们只说他坐在第三行，他的位置能确定下来吗？显然，是不能确定的，我们还要指出他在第三行第几个位，假定第四个，（3，4）这样一对有序的实数，就把这个同学的位置确定下来了。

又如，一九八〇年五月十八日至二十一日，我国向以南纬7°0′，东经171°33′为中心，半径70海里的太平洋海域首次发射运载火箭试验获得圆满成功。其中南纬7°0′和东经171°33′同样是一对有序的实数，表示火箭溅落的中心点的位置。

刻划一个物体的位置，需要参照物，例如确定某个同学

的坐位号也要有参照物，行数从那儿算起，坐号从那儿算起，都要有一定的标准，为此，我们在下一节将研究直角坐标系．

Ⅳ 布置作业

1.用圆规、直尺在数轴上作出表示$\sqrt{5}$和$-\sqrt{3}$的两点．

2.在矩形ABCD的中心线上有两孔M，N均匀分布，如AB＝10，BC＝15，试用数字确定M、N两点的位置．

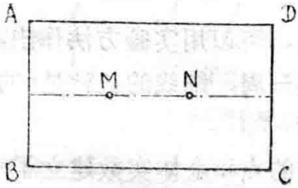

图1—3

第 2 课

课　　题：平面直角坐标系（1.1）

教学目的：1.弄清有关平面直角坐标系的各个概念；

2.深刻理解坐标平面上的点和有序实数对之间的一一对应关系，能熟练地对已知点确定它的坐标，依据已知点的坐标确定点的位置．

教学重点：由点求坐标，以及由坐标找点的训练．

教学难点：深刻理解坐标平面上的点和有序实数对之间的一一对应关系．

教学过程：Ⅰ 讲授新课

一、与平面直角坐标系有关的概念．

由上课可知，要确定平面上点的位置，需要有参照物，我们用两条互相垂直数轴，（通常，画成水平位置的，称横

轴或x轴，取向右的方向为正方向；画成铅直位置的，称纵轴或y轴，取向上方向为正方向．两条数轴上的长度单位一般取相同的．）它们的交点是公共坐标原点，来作为参照物，象这样在坐标平面内有公共原点且互相垂直的两条数轴，就构成了平面直角坐标系．

教师可结合课本，讲清以下概念：

- 平面直角坐标系
  - 坐标轴
    - 横轴
    - 纵轴
  - 坐标原点
  - 坐标平面
    - 第一象限
    - 第二象限
    - 第三象限
    - 第四象限

显然，坐标平面上的任意一点，在两条坐标轴上都有它的射影，点在数轴上的射影就是数轴上的点，因而对应着一个实数，点在两条坐标轴上的射影就是两个实数，或者说一对实数．为了把点在两条坐标轴上的射影区分开来，我们规定，记下这对实数时，把点在横轴上的射影（称点的横坐标）写在前面，在纵轴上的射影（称点的纵坐标）写在后面，中间用逗号“，”分开，并用一对圆括号把这对实数包起来，附在表示这一点的字母的后面，例如，如果点M的横坐标是3，纵坐标是2，就记作M（3，2），显然，（3，2）和（2，3）是两对不同的实数，表示坐标平面上两个不同的点．象这样，由两个实数按一定的顺序联成一对，叫有序实数对．

例1　在坐标平面上作出下列各点：

A（-3，-2）；　　B（$\sqrt{5}$，-3）；

C（$4\frac{1}{2}$，0）；　　D（0，-2.3）．

例2 写出黑板挂图中有关点的坐标。（略）

练习：（口答）

1.每一个象限中的点，其坐标符号有什么不同的特点？

答：设P(x、y)为所研究的点，

如果P在
- 第一象限：$x>0$，$y>0$
- 第二象限：$x<0$，$y>0$
- 第三象限：$x<0$，$y<0$
- 第四象限：$x>0$，$y<0$

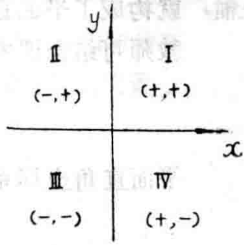

图1—4

2.在坐标轴上的点，其坐标又有何特点？

答：当P在x轴上，其坐标为(x，0)；

当P在y轴上，其坐标为(0，y)；

当P为坐标原点时，坐标为(0，0)。

二、坐标平面上的点与有序实数对的一一对应关系。

引导学生再细致考察如下问题：

1.是否平面上每一点都对应于一个有序实数对？而且只对应于一个有序实数对？平面内任意两个不同的点，所对应的两个有序实数对是否也不同？

2.每一个有序实数对，是否都对应于平面上的一点？而且只对应于一点？

3.点和有序实数对的对应，与有序实数对和点的对应，是否正好是互逆的？即如果点P对应于有序实数对(a，b)，那么(a，b)是否也对应于点P？

经过这样的考察，就可以得出，坐标平面上的点和有序

实数对之间的一一对应．

再讲解课本图1—5，左边框图表示平面上的点集，右边框图表示有序实数对集合，它们都是无穷集合，两个集合元素之间存在一一对应关系．即对于平面点集中任一点A，在有序实数对集合中，有唯一确定的一对有序实数（x_A，y_A）与之对应，反之亦然．

三、例题和练习

通过课本1．1的例1、例2，练习求平面图形中某些点的坐标，并总结有关对称点坐标的特点．

练习：

1.在坐标平面上作出如下各点，并指出每两点间的位置关系：

（1）A（4，3）和B（4，－3）；

（2）A（4，3）和C（－4，3）；

（3）A（4，3）和D（－4，－3）．

2.已知坐标平面上一点P（x，y），求出：

（1）P点关于x轴对称点P_1的坐标；

（2）P点关于y轴对称点P_2的坐标；

（3）P点关于坐标原点对称点P_3的坐标．

3.如图1—5，正三角形AOB边长为2；C为AB边上的中点，求A、C两点的坐标．

答：A（1，$\sqrt{3}$）；

C（1.5，$\frac{\sqrt{3}}{2}$）．

4.如图1—6，正方形边长为a，求各顶点及对角线交点的坐标．

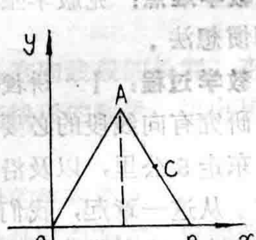

图1—5

答：O（0，0）；

A（$-\frac{\sqrt{2}}{2}a$，$-\frac{\sqrt{2}}{2}a$）；

B（0，$-\sqrt{2}a$）；

C（$\frac{\sqrt{2}}{2}a$，$-\frac{\sqrt{2}}{2}a$）；

D（0，$-\frac{\sqrt{2}}{2}a$）.

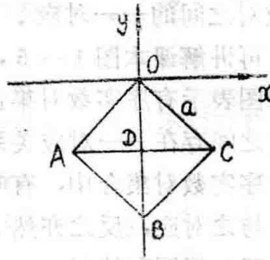

图1—6

Ⅱ 布置作业

1.阅读课文1.1，弄清直角坐标系的有关概念，理解坐标平面上的点与有序实数对之间的一一对应关系.

2.习题一 第1—5题.

第 3 课

课　　题：有向线段（1.2）

教学目的：明确有向线段的定义，有向线段的数量和长度的关系和区别，能够运用数轴上点的坐标表示数轴上有向线段的数量和长度.

教学重点：有向线段的坐标表示式.

教学难点：克服学生把有向线段的数量和长度等同起来的习惯想法.

教学过程：Ⅰ 讲授新课

研究有向线段的必要性：学校前面有一条马路，沿该马路向东走5公里，以及沿该马路向西走5公里，显然是不相同的.从这一章起，我们不但研究线段的长度，而且研究线段的方向，这种带有方向的线段叫有向线段（点出课题，板书）.

一、有向线段的定义和记法

有向线段定义：规定了方向的线段叫有向线段．指出，我们目前只研究数轴上的有向线段．如果有向线段的方向和数轴方向相同，则称为正方向，如果和数轴方向相反，则称为负方向．

因为有向线段的方向决定于它以哪一个端点为始点，哪一个端点为终点，所以记下有向线段时，也要把它的始点和终点分别表示出来，我们规定，把表示始点的字母写在前面，表示终点的字母写在后面，例如，以A为始点，B为终点的有向线段，记作有向线段AB或$\overline{AB}$．

如果记为有向线段BA或$\overline{BA}$，则和原有向线段方向相反．

二、有向线段的数量和长度

过去，我们仅考虑线段的长度，不考虑它的方向，如线段AB的长度为5个单位，我们就可以记作AB＝5，也可以记作BA＝5．在本章中，不但要考虑线段的长度，还要考虑线段的方向，如果从A到B的方向和数轴正向相同，则记作AB＝5，此时，B到A的方向和数轴正向相反，记作AB＝－5．

问：如$AB=-\sqrt{2}$，那么，BA＝？

由此可见　AB＝－BA．

提出有向线段数量概念：一条有向线段的长度，连同表示它的方向的正负号，叫这条有向线段的数量，指出其关键是增加了对方向的考虑．

$$\text{有向线段的数量}\begin{cases}\text{长度（数量的绝对值）}\\ \text{方向（和数轴同向为正，反向为负）}\end{cases}$$

三、用坐标表示有向线段的数量和长度

我们已经知道，数轴上从原点O起到某点A的数量，称为数轴上A点的坐标，记作：$OA=x_A$．

（1）有向线段的坐标表示

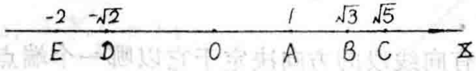

图1—7

已知如图1—7中A、B、C、D、E各点及其坐标，求以下有向线段的数量：

（1）$AB=\sqrt{3}-1\ (=x_B-x_A)$；

（2）$CA=-(\sqrt{5}-1)=1-\sqrt{5}\ (=x_A-x_C)$；

（3）$BD=-(\sqrt{3}+\sqrt{2})=-\sqrt{2}-\sqrt{3}\ (=x_D-x_B)$；

（4）$EC=2+\sqrt{5}=\sqrt{5}-(-2)\ (=x_C-x_E)$；

（5）$ED=2-\sqrt{2}=-\sqrt{2}-(-2)\ (=x_D-x_E)$；

（6）$DE=-(2-\sqrt{2})=-2-(-\sqrt{2})\ (=x_E-x_D)$.

通过上述例子总结出有向线段的数量及其与坐标的关系：数轴上的有向线段的数量等于终点的坐标减去起点的坐标．

若$M(x_M)$，$N(x_N)$在数轴上，则有

$$\left.\begin{array}{l}MN=x_N-x_M\\NM=x_M-x_N\end{array}\right\}\Rightarrow MN=-NM$$

（2）有向线段长度的坐标表示

问：如果知道有向线段的数量，能否求出有向线段的长度？

总结指出：有向线段的长度就是有向线段数量的绝对值，因此，也可以用其两端坐标差的绝对值表示：

$|AB|=|x_B-x_A|$

这就是数轴上两点间距离的表示式．

例1　已知数轴上的点P（－5）、Q（6）、R（9）．

（1）求PQ、QP、QR、RP；

（2）求P、Q以及R、P每两点间的距离．

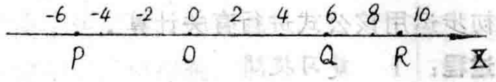

图1—8

解：（1）$PQ=6-(-5)=11$；　　$QR=9-6=3$；

$QP=-PQ=-11$；　　$RP=-5-9=-14$．

（2）$|PQ|=|6-(-5)|=11$；

$|RP|=|-5-9|=14$．

例2　在数轴上，已知$AB=-7$，且$x_A=4$，求x_B．

解：　$\because$　$AB=x_B-x_A$，

$\therefore$　$x_B=-7+4$，　即　$x_B=-3$．

Ⅱ　练习

1.已知下列点在数轴上，求每两点间距离：

1）A（－3），B（5）；

2）C（2），D（6）；

3）E（－7）和F（－8）；

4）G（－2）和O（0）．

2.在数轴上求M点的坐标，已知（1）N（2），且MN＝5；（2）N（－7），MN＝2．

（答：（1）$x_M=-3$；（2）$x_M=-9$）

Ⅲ　布置作业

1.1.2第一个练习1.2题（做在书上）．

2.习题一　第6题．

第 4 课

课　　题： 平面上两点间距离（1．2）

教学目的： 了解和掌握平面上两点间距离公式的推证过程，并能初步运用该公式进行有关计算．

教学过程： Ⅰ　复习提问

1.已知数轴上的点A（-3）、B（0）、C（4），写出所有以这三点中的任意两点为端点的有向线段，再分别求出这些线段的数量和距离．

2.已知坐标平面内的两点A（4，3）和B（-2，-1），求出这两点在x轴和y轴上的射影，再求线段AB在x轴和y轴上的射影的长度．

Ⅱ　讲授新课

一、引入　前课我们研究了坐标轴上任两点的距离计算公式：x轴上两点间距离：$|AB|=|x_B-x_A|$，y轴上两点距离：$|CD|=|y_D-y_C|$．本课将研究坐标平面上任两点间的距离，怎样从这两点的坐标计算出来．两点间的距离就是两点间的线段的长度．即已知$P_1(x_1,y_1)$和$P_2(x_2,y_2)$，求$|P_1P_2|$．

为此，我们先研究一些特殊情况：

如果A，B为平面上两点，且AB∥x轴，求$|AB|$．

解：如图1—9设A(a，y)，B(b，y)．作$A_1A\perp Ox$轴于$A_1(a,0)$，$BB_1\perp Ox$轴于B_1

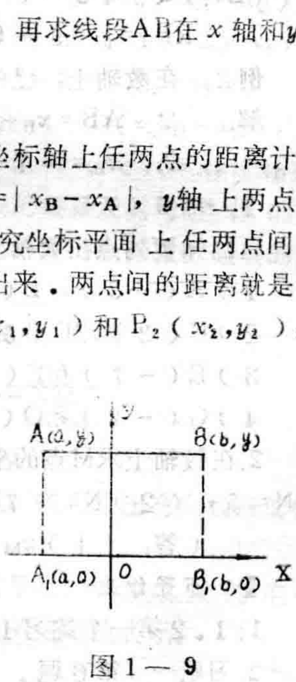

图1—9

（b，0）则四边形AA_1B_1B为矩形，

$|AB|=|A_1B_1|=|b-a|$

同理，平行于y轴的直线上两点$C(x, y_C)$，$D(x, y_D)$间距离为

$|CD|=|y_D-y_C|$

问：平面上任两点，如果其连结线不一定平行于坐标轴，那么，这两点间距离可否用这两点的坐标表示？

图 1—10

二、推证两点间距离公式

i）如果有一点是坐标原点，求平面上任一点 P (x_1y) 与它的距离．

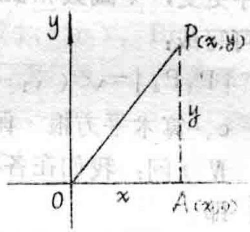

图 1—11

$\because \quad OP^3=OA^2+AP^2$，

$\therefore \quad |OP|=\sqrt{x^2+y^2}$．

ii）求平面上任二点$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x, y_2)$之间的距离．

分析：如何转化为i）的情况，运用勾股定理解决？启发学生引辅助线（如图 1—12）。

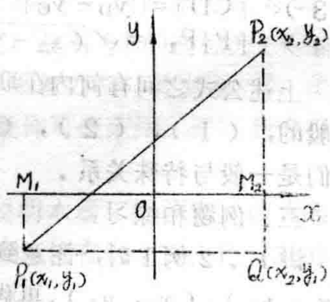

图 1—12

$\because \quad P_1P_2{}^2=P_1Q^2+QP_2{}^2$ ………………（1）

由于P_1Q及QP_2分别平行于x轴和y轴．

$|P_1Q|=|x_2-x_1|$ ………（2）

$|QP_2|=|y_2-y_1|$ ………（3）

以（2）、（3）代入（1），得

$$P_1P_2^{\,2}=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

$$\therefore\quad |P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\cdots\cdots(4)$$

iii）引导学生用数学语言叙述两点距离公式：

“平面内任意两点间距离等于它们同名坐标之差的平方和的算术平方根。”

着重讲解几点：

a、同名坐标差　即同为纵坐标或同为横坐标相减，不得混乱；

b、平方和　由于同名坐标差取了平方和，因此，差的顺序更变，（减数和被减数调换）不影响结果．故（4）式也可写成：

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\cdots\cdots\cdots(5)$$

c、算术平方根　保证了两点距离必为正值．

Ⅳ）问：我们在各种情况下研究了两点间距离的坐标公式，即

1）　$|OP|=\sqrt{x^2+y^2}$

2）　$|AB|=|x_B-x_A|$

3）　$|CD|=|y_D-y_C|$

4）　$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

上述公式之间有何内在联系？让学生总结出（4）式是一般的，（1），（2），（3）式是（4）式的特殊情况，它们是一般与特殊关系．

三、例题和练习

讲1．2例1时，注意到运用两点距离公式，要先弄清(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，再代入公式，计算时才不致错误．

练习：课本第10页，练习　第1题．

Ⅲ　布置作业

1. 复习课本1．2至例1前，要求能理解和掌握两点间距离公式的推导和运用．

2. 习题一第7题．

第 5 课

课　题： 两点间距离公式的应用（1．2）

教学目的： 使学生能熟练地运用两点距离公式解决简单平面图形中的有关问题．

教学过程： Ⅰ　例题分析和练习

例1　已知三角形三顶点为A（5，10），B（1，2），C（11，－3）求各边长，并说明△ABC是什么三角形？

解： $|AB| = 4\sqrt{5}$，$|BC| = 5\sqrt{5}$，$|AC| = \sqrt{205}$，

∵　$AB^2 + BC^2 = 80 + 125 = 205$，

∴　$AB^2 + BC^2 = AC^2$，

∴　△ABC为直角三角形．

例2　（课本第9页例2）

分析：（1）注意到P点在x轴上，故其纵坐标为0，求P点坐标，其实只有横坐标待定，故可令P的坐标为$(x,0)$．

（2）求x的过程实际是解无理方程，故要验根，但是方程两边平方并没有扩大未知数许可值范围，所以新方程和原方程同解．

（3）还可从几何直观来说明本题．据题意，以A为圆心，5个长度单位为半径作圆，和x轴有两个交点$P_1(5,0)$，$P_2(-3,0)$，这两点都为所求．

例3　（课本第10—11页例3）