高等代数
题解

王萼芳 编

北京大学出版社

《高等代数》题解

（附：内容提要及补充题）

王萼芳 编

北京大学出版社

《高等代数》题解

(附：内容提要及补充题)

北京大学出版社出版

(北京大学校内)

1202工厂印刷

新华书店北京发行所发行

787×1092毫米 32开本 12.125印张 25.5千字

1983年9月第一版 1983年9月第一次印刷

印数：1—160,000册

统一书号：13209·64 定价：1.25元

前　言

自从大学基础数学自学丛书《高等代数》（上海科技出版社）出版以来，许多读者来信询问书中一些习题的解法，并建议出版一本习题解答。

考虑到广大读者在自学的情况下，既缺乏老师的指导，又没有同学可磋商，要独立地完成习题的确有一定的困难。为了便于读者能更快更好地学完高等代数，我们决定满足读者的要求，编写了这本习题解。

本题解中的习题是按照《高等代数》中的习题顺序编排的(每一节的习题统一编号)。但是为了便于采用其它高等代数课本的读者也能使用此书，因此在每章的前面增加了内容提要，从而使此书成为一本独立的参考读物。此外，鉴于约当形在各方面的应用，又增加了“约当标准形简单介绍”一节。另外，为了加强读者在高等代数方面的训练，还在每章最后增加了一定数量的补充题，其中少量的题难度较大，读者可根据自己的情况进行选作。

对于计算题本书只给出答案，或作一、两个题示范，如答案不唯一，只给出一个答案以供参考；对于证明题，本书大部分作了较简练的证明，少部分给出提示。但是，解题的方法是多种多样的，书中的解法或提示只是提供读者参考。作者由衷地期望读者深入钻研教材，掌握基本理论，通过独立思考作出习题的正确解答。

王萼芳

1982年 9 月于北京大学

封面设计：金国辉

书号：13209·64
定价：1.25 元

目　　录

第一章　多　项　式

第一节　一元多项式及其运算

基 本 内 容

1.　多项式的定义

设 x 是一个变量(或称文字)，n 是一非负整数，表示式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

称为 x 的一个**多项式**.

记 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = f(x)$. $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ 称为 $f(x)$ 的**系数**；$a_k x^k$ 称为 $f(x)$ 的 **k次项**，a_k 称为**k次项系数**. 如果 $a_n \neq 0$，$a_n x^n$ 就称为 $f(x)$ 的**首项**，a_n 称为**首项系数**；n 称为 $f(x)$ 的**次数**，记作"次$f(x)$".

如果两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的同次项的系数都相等，就称 $f(x)$ 与 $g(x)$ **相等**，记作 $f(x) = g(x)$.

系数全等于零的多项式称为**零多项式**，记作0. 零多项式是唯一的无法确定次数的多项式.

如果多项式的系数是整数、有理数、实数或复数，就分别称此多项式为**整系数多项式**、**有理系数多项式**、**实系数多项式**或**复系数多项式**. 如果不加声明，就理解为所讨论的是复系数多项式.

2.　多项式的运算

1）加、减法

设　$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$，

　　$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$.

则当 $m \leqslant n$ 时，

$$f(x)+g(x)=(a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0),$$

$$f(x)-g(x)=(a_n-b_n)x^n+(a_{n-1}-b_{n-1})x^{n-1}+\cdots+(a_1-b_1)x+(a_0-b_0)$$

（如果 $m<n$，那么式中 $b_{m+1}=\cdots=b_n=0$）；

当 $m>n$ 时，有相应的公式．

2）乘法

$$f(x)g(x)=c_{n+m}x^{n+m}+c_{n+m-1}x^{n+m-1}+\cdots+c_1x+c_0,$$

其中

$$c_k=\sum_{i=0}^{k}a_{k-i}b_i \quad (k=0,1,\cdots,n+m).$$

多项式的运算可以用竖式计算，比较简单明了．为了方便起见，还可以应用分离系数法进行计算，就是把 x 的方幂略去不写，只把系数按次序写出来进行运算．但是在计算时必须注意，要把等于 0 的系数补进去．

3. 多项式的运算满足下面的一些规律

1）加法交换律

$$f(x)+g(x)=g(x)+f(x).$$

2）加法结合律

$$(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x)).$$

3）乘法交换律

$$f(x)g(x)=g(x)f(x).$$

4）乘法结合律

$$(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x)).$$

5）加乘分配律

$$f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x).$$

6）乘法消去律

如果$f(x)g(x)=f(x)h(x)$，并且$f(x)\neq 0$，那么必有

$$g(x)=h(x).$$

7）次数公式

$$次(f(x)\pm g(x))\leqslant \max(次f(x),次g(x)),$$

$$次(f(x)g(x))=次f(x)+次g(x).$$

习题及解答

1．计算$f(x)+g(x)$，$f(x)-g(x)$及$f(x)g(x)$：

（1）$f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2$，

$g(x)=2x^3-x^2-5x+4$.

解
$$\begin{aligned}f(x)+g(x)&=x^4+(2+2)x^3+(-1-1)x^2\\&\quad+(-4-5)x+(-2+4)\\&=x^4+4x^3-2x^2-9x+2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x)-g(x)&=x^4+(2-2)x^3\\&\quad+[(-1)-(-1)]x^2+[(-4)\\&\quad-(-5)]x+[(-2)-4]\\&=x^4+x-6;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x)g(x)&=2x^7+(4-1)x^6+(-2-2-5)x^5\\&\quad+(-8+1-10+4)x^4+(-4+4\\&\quad+5+8)x^3+(2+20-4)x^2\\&\quad+(10-16)x-8\\&=2x^7+3x^6-9x^5-13x^4+13x^3\\&\quad+18x^2-6x-8.\end{aligned}$$

（2）$f(x)=x^4-x^3-4x^2+2x+1$，

$g(x)=x^2-x+1$.

解 应用分离系数法进行计算:

$$\begin{array}{rrrrrr} & 1 & -1 & -4 & 2 & 1 \\ +) & & & 1 & -1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & -3 & 1 & 2 \end{array}$$

所以 $f(x)+g(x)=x^4-x^3-3x^2+x+2.$

$$\begin{array}{rrrrrr} & 1 & -1 & -4 & 2 & 1 \\ -) & & & 1 & -1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & -5 & 3 & 0 \end{array}$$

所以 $f(x)-g(x)=x^4-x^3-5x^2+3x.$

$$\begin{array}{rrrrrrrr} & 1 & -1 & -4 & 2 & 1 & & \\ \times) & & & 1 & -1 & 1 & & \\ \hline & 1 & -1 & -4 & 2 & 1 & & \\ & & -1 & 6 & 4 & -2 & -1 & \\ & & & 6 & -1 & -4 & 2 & 1 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & 5 & -5 & 1 & 1 \end{array}$$

所以 $f(x)g(x)=x^6-2x^5-2x^4+5x^3-5x^2+x+1.$

(3) $f(x)=x^4-2x^3-6x^2+5x+9,$

$g(x)=-x^4+2x^3-x^2-2x+2.$

答: $f(x)+g(x)=-7x^2+3x+11,$

$f(x)-g(x)=2x^4-4x^3-5x^2+7x+7,$

$f(x)g(x)=-x^8+4x^7+x^6-17x^5+13x^4$

$+21x^3-31x^2-8x+18.$

(4) $f(x)=2x^4-x^3+2x^2-x+1,$

$g(x)=x^2-3x+1.$

答：$f(x)+g(x)=2x^4-x^3+3x^2-4x+2$，

$f(x)-g(x)=2x^4-x^3+x^2+2x$.

$f(x)g(x)=2x^6-7x^5+7x^4-8x^3+6x^2-4x+1$.

(5) $f(x)=x^3+(1+i)x^2-(1-i)x-1$，

$g(x)=x^3-2ix+1-2i$.

答：$f(x)+g(x)=2x^3+(1+i)x^2-(1+i)x-2i$，

$f(x)-g(x)=(1+i)x^2-(1-3i)x-(2-2i)$，

$f(x)g(x)=x^6+(1+i)x^5-(1+i)x^4+(2-4i)x^3+(5+i)x^2+(1+5i)x-(1-2i)$.

2. 计算

(1) $(x^3+x^2-x-1)(x^3-2x-1)-8x(x^2-5)$

答：原式$=(x^6+x^5-3x^4-4x^3+x^2+3x+1)-(8x^3-40x)$

$=x^6+x^5-3x^4-12x^3+x^2+43x+1$.

(2) $(x^3+ax-b)(x^2-1)+(x^3-ax+b)(x^2-1)$.

答：原式$=2x^3(x^2-1)=2x^5-2x^3$.

3. 求k,l,m，使

$$(2x^2+lx-1)(x^2-kx+1)=2x^4+5x^3+mx^2-x-1.$$

解 因为

$$(2x^2+lx-1)(x^2-kx+1)=2x^4+(l-2k)x^3+(-kl+1)x^2+(k+l)x-1,$$

所以

$$(2x^2+lx-1)(x^2-kx+1)=2x^4+5x^3+mx^2-x-1$$

的充分必要条件是

$$\begin{cases} l-2k=5, \\ -kl+1=m, \\ k+l=-1. \end{cases}$$

即 $$k=-2,\quad l=1,\quad m=3.$$

4. 设$f(x),g(x)$是两个非零多项式，问$f(x),g(x)$的系数满足什么条件时，次数公式

$$次(f(x)+g(x))\leqslant \max(次f(x),次g(x))$$

中等号成立？满足什么条件时，小于号成立？

答：当$f(x),g(x)$的次数相等而且它们的首项系数之和等于零时，次数公式中小于号成立；否则，等号成立.

第二节　整除性理论

基本内容

1. 带余除法

定理 1（带余除法） 对于任意两个多项式$f(x),g(x)$ $(g(x)\neq 0)$，总可以找到唯一的一对多项式$q(x)$及$r(x)$，使得

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x),$$

其中$r(x)=0$或次$r(x)<$次$g(x)$.

$q(x)$称为$g(x)$除$f(x)$所得的**商式**（简称**商**），$r(x)$称为**余式**（简称**余**）.

定理 2（余数定理） 多项式$f(x)$被$x-c$除，所得的余数等于$f(c)$.

2. 整除的概念

定义 $f(x)$与$g(x)$是两个多项式，如果有一个多项

式$q(x)$使得

$$f(x)=q(x)g(x),$$

就称$g(x)$**整除**(或**除尽**)$f(x)$. $f(x)$称为$g(x)$的一个**倍式**;$g(x)$称为$f(x)$的一个**因式**.

用"$g(x)|f(x)$"表示$g(x)$整除$f(x)$;用$g(x)\nmid f(x)$表示$g(x)$不能整除$f(x)$. 当$g(x)|f(x)$,且$g(x)\neq 0$时,可以用$\frac{f(x)}{g(x)}$表示$g(x)$除$f(x)$所得的商.

当$g(x)\neq 0$时,$g(x)|f(x)$的充分必要条件是$g(x)$除$f(x)$所得的余式等于零. 特别地,$x-c|f(x)$的充分必要条件是$f(c)=0$.

3. 整除关系的一些性质

1) 零多项式是任何多项式的倍式,而零多项式的倍式只有零多项式.

2) 零次多项式是任何多项式的因式,而零次多项式的因式只有零次多项式.

3) $f(x)|g(x)$,并且$g(x)|f(x)$的充分必要条件是

$$f(x)=cg(x) \quad (c\text{是一个非零常数}).$$

4) 如果

$$f_1(x)|f_2(x), f_2(x)|f_3(x), \cdots, f_{s-1}(x)|f_s(x),$$

那么

$$f_1(x)|f_s(x).$$

5) 如果$g(x)|f_1(x), g(x)|f_2(x), \cdots, g(x)|f_s(x)$,那么$g(x)$可以除尽$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_s(x)$的任一个组合. 即:对任意多项式$u_1(x), u_2(x), \cdots, u_s(x)$都有

$$g(x)|u_1(x)f_1(x)+u_2(x)f_2(x)+\cdots+u_s(x)f_s(x).$$