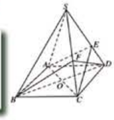
丛书主编 戴 宇

西南大学附属中学

“中学生数学读物”系列丛书



SHUSHI JIANHUA GUIZE

数式简化规则

本册主编 涂登熬

国家一级出版社
全国百佳图书出版单位
西南师范大学出版社
XINAN SHIFAN DAXUE CHUBANSHE

恩格斯说:“纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系.”这就是说,数学是研究数与形的关系的一门学科,它是以解决客观世界的事物的内在逻辑联系的“问题”为主要目的.从这个意义上来讲,探索解决数学问题的规律及方法是十分重要的.通过对数学形态的内在基本结构的分析和研究,从而顺利地解决问题,对培养我们的数学思维水平及提高解决问题的能力都有十分重要的意义.

数学的内容就是一种形态与另一种形态的对比和关系的转化.要解决好一个数学问题,首要的是要对一个数学问题构成的结构有充分的认识,再熟知一些推演关系的基本手段及方法;其次,要善于把问题的假设和结论,借助已有的(尽可能多的)数学知识和数学理论沟通起来,从而顺利地解决问题.

解决问题有“通法”和“巧技”,但我们一定要知道“巧”不是解题的大道,只是一条捷径,而捷径不是处处都有的.只有练好解题的基本功,解题的捷径才不难找到.要掌握解题的“通法”,必须要知道一些数学形态的“通性”,即它们的内部结构及这些结构的逻辑联系、演化规律,每一种典型的基本结构在数学形态中的作用以及处理它们的一些常见的数学方法和数学知识.解题能力的大小,就是你拥有的这种数学知识的体现.它就像要给人治病,必须先了解人体的各部分组成的器官和构成器官的细胞及它们的生物学作用.只有这样练好了基本功,才会得到解题的“通法”,找到处理数学问题的“大道”.

这里还有一个数学能力的问题,具体来说,就是通过对数学问题的研究和学习得到处理数学问题的有效程度的大小和解题能力.能力是一种稳定的个性心理特征,它影响人们的数学学习活动的完成,影响数学学习活动的效果.正如瑞典心理学家魏德林(I.Werdelin)指出的:“数学能力是理解数学的问题、符号、方法和证明的本质的能力;是学会它们,在记忆中保持和再现它们,在解数学(或类似的)课题时运用它们的能力.”

总之,只有通过对数学问题的基本结构进行深入的分析,对各种基本结构彼此关联的本质进行探索,掌握好处理数学问题的一般的数学思维方式和方法,才能掌握解决问题的本领.把初等数学作为一个系统,用“结构”的观点来进行分析研究,就是本书的目的.所谓“结构”,就是追根溯源,从一个科学体系的最基本的“细胞”开始研究,寻找其内部的联系和规律,从而达到对整个系统的认识,使研究的方法、结果更具科学性和一般性.任何一个科学体系的基本结构,抽象为数学语言,就是我们所谓的“元”(如同物理学上的“基本粒子”,化学上的元素,生物学上的细胞等).

认识一个数学问题,对它进行处理,有一个最基本的思想,那就是将这个数学问题简单化,从而发掘出此问题的内在演化规律,以及它与已有的数学结论之间的联系,从而达到使用最优的逻辑演算和推理方法来解决问题,这就是人们通常说的简单化原则.不管问题的形态多么复杂,但它都由一些基本结构组成,就像一个生命体,它由各种各样的细胞构成,正是这些细胞相互关联,才使生命充满了活力.要认识生命,就必须认识这些细胞.同样的,要解决数学问题,也必须认识数学的一些基本结构,以及这些结构在数学中的作用,按自然辩证法的观点,数学的简单化原理也应该有规律可循.对数和式组成的数学形态的处理,探求简化规则,就是对规律的一种分析方法.

规律是一个抽象的概念,规律往往隐藏在大量复杂的表象后面,它似乎离我们很近,但又很远,需要我们对大量同类问题进行全方位、多层次的分析比较,拨开迷雾,找出它们的本质属性.本书就以数学最基本的对象——元的认识展开我们的研究.

西南大学附属中学

“中学生数学读物”系列丛书

丛书主编 戴 宇

SHUSHI JIANHUA GUIZE

本册主编 涂登熬

数式简化规则

国家一级出版社
全国百佳图书出版单位
西南师范大学出版社
XINAN SHIFAN DAXUE CHUBANSHE

图书在版编目(CIP)数据

数式简化规则 / 涂登熬主编. —重庆 ：西南师范大学出版社，2014.6
ISBN 978-7-5621-6848-5

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①涂… Ⅲ. ①中学数学课—课外读物 Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 121749 号

西南大学附属中学"中学生数学读物"系列丛书
丛书主编：戴 宇

数式简化规则

本册主编：涂登熬

责任编辑：李青松
封面设计：王 煤
制作排版：重庆大雅数码印刷有限公司
出版发行：西南师范大学出版社
地址：重庆市北碚区
网址：http：//www.xscbs.com
印 刷 者：重庆荟文印务有限公司
开 本：890mm×1240mm 1/32
印 张：3
字 数：78 千字
版 次：2014 年 6 月 第 1 版
印 次：2014 年 6 月 第 1 次印刷
书 号：ISBN 978-7-5621-6848-5

定 价：10.00 元

西南大学附属中学“中学生数学读物”系列丛书

SHUSHI
JIANHUA
GUIZE

编委会

序言

“中学生数学读物”系列丛书的出版，标志着我校中学数学教育、教学研究进入了一个全新的时期.近百年来，我校的先辈们在基础数学教育、教学方面进行了大量的科学研究，取得了丰硕的成果.进入新时期后，学校在总结先辈及国内外的先进经验，并吸取教训的基础上，推出了培养新时期各学科领军人物的“春笋计划”.经过三年的努力，不论在理论上，还是教育实践中，都已取得了一批可喜的成果，极大地推动了教改进程和学校的快速发展，并在课堂教学、创新人才培养方面取得了显著成效，受到了各界的赞誉.特别是数学教研组和数学名师工作室的全体教师，通过认真学习中外数学教育的先进理论，深入调研，开展了许多有意义的研究工作.他们将研究的成果集结成这套系列丛书，从理论上阐述了初等代数体系的架构及处理代数问题的基本规则，使教和学能够在科学的规则指导下高效地进行.此套丛书既有先进的科学性，又有很好的可读性和可操作性，是一部值得师生阅读、参考的读物.如果读者在阅读后能有些许收获，我们将深感荣幸和欣慰.

西南大学附属中学校长：张万琼

前言

恩格斯说:“纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系.”这就是说,数学是研究数与形的关系的一门学科,它是以解决客观世界的事物的内在逻辑联系的“问题”为主要目的.从这个意义上来讲,探索解决数学问题的规律及方法是十分重要的.通过对数学形态的内在基本结构的分析和研究,从而顺利地解决问题,对培养我们的数学思维水平及提高解决问题的能力都有十分重要的意义.

数学的内容就是一种形态与另一种形态的对比和关系的转化.要解决好一个数学问题,首要的是要对一个数学问题构成的结构有充分的认识,再熟知一些推演关系的基本手段及方法;其次,要善于把问题的假设和结论,借助已有的(尽可能多的)数学知识和数学理论沟通起来,从而顺利地解决问题.

解决问题有“通法”和“巧技”,但我们一定要知道“巧”不是解题的大道,只是一条捷径,而捷径不是处处都有的.只有练好解题的基本功,解题的捷径才不难找到.要掌握解题的“通法”,必须要知道一些数学形态的“通性”,即它们的内部结构及这些结构的逻辑联系、演化规律,每一种典型的基本结构在数学形态中的作用以及处理它们的一些常见的数学方法和数学知识.解题能力的大小,就是你拥有的这种数学知识的体现.它就像要给人治病,必须先了解人体的各部分组成的器官和构成器官的细胞及它们的生物学作用.只有这样练好了基本功,才会得到解题的“通法”,找到处理数学问题的“大道”.

这里还有一个数学能力的问题,具体来说,就是通过对数学问题的研究和学习得到处理数学问题的有效程度的大小和解题

能力.能力是一种稳定的个性心理特征,它影响人们的数学学习活动的完成,影响数学学习活动的效果.正如瑞典心理学家魏德林(I.Werdelin)指出的:“数学能力是理解数学的问题、符号、方法和证明的本质的能力;是学会它们,在记忆中保持和再现它们,在解数学(或类似的)课题时运用它们的能力.”

总之,只有通过对数学问题的基本结构进行深入的分析,对各种基本结构彼此关联的本质进行探索,掌握好处理数学问题的一般的数学思维方式和方法,才能掌握解决问题的本领.把初等数学作为一个系统,用“结构”的观点来进行分析研究,就是本书的目的.所谓“结构”,就是追根溯源,从一个科学体系的最基本的“细胞”开始研究,寻找其内部的联系和规律,从而达到对整个系统的认识,使研究的方法、结果更具科学性和一般性.任何一个科学体系的基本结构,抽象为数学语言,就是我们所谓的“元”(如同物理学上的“基本粒子”,化学上的元素,生物学上的细胞等).

认识一个数学问题,对它进行处理,有一个最基本的思想,那就是将这个数学问题简单化,从而发掘出此问题的内在演化规律,以及它与已有的数学结论之间的联系,从而达到使用最优的逻辑演算和推理方法来解决问题,这就是人们通常说的简单化原则.不管问题的形态多么复杂,但它都由一些基本结构组成,就像一个生命体,它由各种各样的细胞构成,正是这些细胞相互关联,才使生命充满了活力.要认识生命,就必须认识这些细胞.同样的,要解决数学问题,也必须认识数学的一些基本结构,以及这些结构在数学中的作用.按自然辩证法的观点,数学的简单化原理也应该有规律可循.对数和式组成的数学形态的处理,探求简化规则,就是对规律的一种分析方法.

规律是一个抽象的概念,规律往往隐藏在大量复杂的表象后面,它似乎离我们很近,但又很远,需要我们对大量同类问题进行全方位、多层次的分析比较,拨开迷雾,找出它们的本质属性.本书就以数学最基本的对象——元的认识展开我们的研究.

戴　宇

目 录

第一讲　元的认识

代数的一个主要内容是对数符、字符和运算符组合成的代数式进行研究，通过运算、恒等变形、转换形式及数理的逻辑推演，从而达到对客观世界的自然形态的认识和变化规律的认知，使人类改造世界的目标得以实现.初等数学中，代数的基本内容主要是对数的认识、式子的恒等变形的技巧训练、方程的求解、函数观点的确定、不等量的比较等.它对学习者有一个最基本的要求，就是要建立对“基元”的认识，下面举例说明.

例 1 化简：

$$\left(\frac{\sqrt{2-a}}{\sqrt{2+a}-\sqrt{2-a}}+\frac{\sqrt{4-a^2}+a+2}{2a}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{4-a^2}{a^2}}-\frac{2}{a}\right)$$

$(0<a<2)$.

解　令 $x=\sqrt{2-a}$，$y=\sqrt{2+a}$，

所以 $a=\frac{1}{2}(y^2-x^2)$，$2=\frac{1}{2}(y^2+x^2)$.

$$\begin{aligned}\text{所以原式}&=\left(\frac{x}{y-x}+\frac{xy+y^2}{y^2-x^2}\right)\cdot\left(\frac{2xy}{y^2-x^2}-\frac{y^2+x^2}{y^2-x^2}\right)\\&=\left(\frac{x}{y-x}+\frac{y}{y-x}\right)\cdot\left[\frac{-(y-x)^2}{y^2-x^2}\right]\\&=\frac{x+y}{y-x}\cdot\frac{x-y}{y+x}=-1.\end{aligned}$$

【思悟点拨】

1.观察整个式子，主要由 $\sqrt{2+a}$，$\sqrt{2-a}$ 构成，它们为此问题的元.

2.把式子用基元 x，y 表示时，要注意 a 和 2 的表示：对称和次

数的认识及分析.

3.注意与常规的有理化解法比较.

例 2 化简：$\dfrac{4\sqrt{15}}{\sqrt{5}+2\sqrt{3}+\sqrt{17}}-2\sqrt{3}+\dfrac{17}{\sqrt{17}}$.

解 令 $x=\sqrt{5}$，$y=2\sqrt{3}$，$z=\sqrt{17}$，所以 $x^2+y^2=z^2$.

$$
\begin{aligned}
\text{所以原式}&=\frac{2xy}{x+y+z}-y+z\\
&=\frac{(x+y)^2-z^2}{x+y+z}-y+z\\
&=x+y-z-y+z\\
&=x=\sqrt{5}.
\end{aligned}
$$

【思悟点拨】

1.此式由$\sqrt{5}$，$2\sqrt{3}$，$\sqrt{17}$ 构成，注意其相互间的关系.

2.$\dfrac{2xy}{x+y+z}$ 转化时注意分子、分母次数的统一.

3.正整数的“基”应为质数，所以这里应考虑将质数的算术平方根作为元.

例 3 化简：$\dfrac{8+2\sqrt{15}-\sqrt{10}-\sqrt{6}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

解 令 $x=\sqrt{5}$，$y=\sqrt{3}$，$z=\sqrt{2}$，所以 $x^2=y^2+z^2$.

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\frac{x^2+y^2+2xy-xz-yz}{x+y-z}\\
&=\frac{(x+y)^2-z(x+y)}{x+y-z}\\
&=\frac{(x+y)(x+y-z)}{x+y-z}\\
&=x+y\\
&=\sqrt{5}+\sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

例 4 解方程：$\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^{x}+\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^{x}=14.$

解 令 $a=\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^{x}, b=\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^{x}$，

所以 $ab=1$ 且 $a+b=14.$

所以 a,b 是 $y^{2}-14y+1=0$ 的两根，

故 $\begin{cases}a=7+4\sqrt{3},\\ b=7-4\sqrt{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=7-4\sqrt{3},\\ b=7+4\sqrt{3}.\end{cases}$

即有 $\dfrac{x}{2}=1$ 或 $\dfrac{x}{2}=-1 \Rightarrow x=2$ 或 $x=-2$，检验满足原方程.

【思悟点拨】

1.式子左边两项共轭，是基本结构.

2.构造方程求解.

例 5 解方程组：$\begin{cases}\sqrt{x+\dfrac{1}{y}}-\sqrt{x+y-3}=\sqrt{3},\\ 2x+y+\dfrac{1}{y}=6.\end{cases}$

解 令 $a=\sqrt{x+\dfrac{1}{y}}, b=\sqrt{x+y-3}$，

则 $a^{2}+b^{2}=x+\dfrac{1}{y}+x+y-3=6-3=3.$

所以原方程变为 $\begin{cases}a-b=\sqrt{3},\\ a^{2}+b^{2}=3 \Rightarrow (a-b)^{2}+2ab=3,\end{cases}$

所以 $ab=0$，即 $\begin{cases}a=0,\\ b=-\sqrt{3}\end{cases}$（舍）或 $\begin{cases}a=\sqrt{3},\\ b=0.\end{cases}$

所以 $\begin{cases}x+\dfrac{1}{y}=3,\\ x+y=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=2,\\ y=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=4,\\ y=-1.\end{cases}$

【思悟点拨】

1.两式最低次为根式,以它们为基元,则可将方程化为整式方程.

2.确定元后,注意两元的关系,并用其表示第二个方程.

3.注意“有意义”的范围.

例 6 求:$\left(\frac{7}{3}\right)^{1002}\cdot\sqrt{\frac{3^{2004}+15^{2004}}{35^{2004}+7^{2004}}}$.

解 令 $x=7^{1002}$,$y=3^{1002}$,$z=5^{1002}$,

所以原式$=\frac{x}{y}\cdot\sqrt{\frac{y^2+y^2z^2}{x^2z^2+x^2}}$

$=\frac{x}{y}\cdot\sqrt{\frac{y^2}{x^2}}$

$=\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}$

$=1$.

【思悟点拨】

1.此式的元由质因子及方幂确定,故 7^{1002},3^{1002},5^{1002} 分别为元.

2.从以上各例可以看出进行多元代换时,应尽量寻求各元之间的内在关系.

例 7 对一切不为 0 的实数 x,总有 $2x\cdot f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2$ 成立,求 $f(x)$.

解 由于 $2x\cdot f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2$, ①

将 x 换成$\frac{1}{x}$得 $3f(x)+\frac{2}{x}\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}$

$$\Rightarrow 3x \cdot f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}. \qquad ②$$

② × 3 − ① × 2 得 $5x \cdot f(x) = \frac{3}{x} - 2x^2$，

即 $f(x) = \frac{3}{5x^2} - \frac{2}{5}x$.

【思悟点拨】

1.式中有两个元，即 $f(x)$ 和 $f\left(\frac{1}{x}\right)$，但题中只有一个方程，故需转化为两个方程.

2.注意元的任意性的代换.

例 8 分解因式：$(ax-by)^3+(by-cz)^3-(ax-cz)^3$.

解 令 $m=ax-by$，$n=by-cz$，则 $m+n=ax-cz$.

故原式 $=m^3+n^3-(m+n)^3$

$=(m+n)(m^2-mn+n^2)-(m+n)^3$

$=(m+n)(m^2-mn+n^2-m^2-n^2-2mn)$

$=(m+n)(-3mn)$

$=-3(ax-by)(by-cz)(ax-cz)$.

【思悟点拨】

换元使问题简化，从而可知其内在规律.

例 9 分解因式：$2a^2-3ab-2b^2-a+7b-3$.

解 原式 $=2a^2-(3b+1)a-2b^2+7b-3$

$=2a^2-(3b+1)a-(2b-1)(b-3)$

$=(a-2b+1)(2a+b-3)$.

【思悟点拨】

1.多字母认定主元后，其余字母视作常数，一般字母次数低的

应作主元.

2.此法可用作不超过二次式的分解运算.

3.当然也可以以字母 b 为主元重新整理.

4.此题为典型的二元二次式因式分解,其传统方法是两次十字相乘或双十字相乘法.

例 10 已知 $a+b-2\sqrt{a-1}-4\sqrt{b-2}=3\sqrt{c-3}-\frac{1}{2}c-5$,求 $a+b+c$.

解 令 $x=\sqrt{a-1}$,$y=\sqrt{b-2}$,$z=\sqrt{c-3}$,

则 $x^2+1=a$,$y^2+2=b$,$z^2+3=c$.

条件式变为 $x^2+y^2+3-2x-4y=3z-\frac{1}{2}(z^2+3)-5$

$$\Leftrightarrow(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)+\frac{1}{2}z^2-3z+\frac{9}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-2)^2+\frac{1}{2}(z-3)^2=0,$$

所以 $\begin{cases}x=1,\\y=2,\\z=3.\end{cases}$

所以 $a+b+c=x^2+y^2+z^2+6=1+4+9+6=20$.

【思悟点拨】

1.将根式作元,则无理式可变化成有理式的运算.

2.三元不定方程通常只能找三个元的关系,而结果要求三元之和,则可注意到换元后为二次式,应看可否化为非负数和的形式,从而分别配方.

例 11 已知 $x, y, z \in \mathbf{R}^{+}$ 且 $\frac{x}{2+x}+\frac{y}{2+y}+\frac{z}{2+z}=1$.

求证：$\frac{x^2}{2+x}+\frac{y^2}{2+y}+\frac{z^2}{2+z} \geqslant 1$.

证明 令 $2+x=a, 2+y=b, 2+z=c$，由已知得

$$\frac{a-2}{a}+\frac{b-2}{b}+\frac{c-2}{c}=1，即 \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1.$$

则 $a+b+c$

$$=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$\geqslant(1+1+1)^2=9,$$

即 $a+b+c \geqslant 9$.

故 $\frac{x^2}{2+x}+\frac{y^2}{2+y}+\frac{z^2}{2+z}$

$$=\frac{(a-2)^2}{a}+\frac{(b-2)^2}{b}+\frac{(c-2)^2}{c}$$

$$=a+b+c+4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-12$$

$$\geqslant 9+4-12=1.$$

【思悟点拨】

1.分母为单项式比其为多项式简单，且条件式和结论式的分母有相同因式，故选 $2+x, 2+y, 2+z$ 作元就可使二式均简化，而容易观察其内在联系.

2.变换后由于只有式子 $a+b+c$，而条件为 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$，故容易想到用柯西不等式.

3.此题选 $\frac{x}{2+x}, \frac{y}{2+y}, \frac{z}{2+z}$ 作元也可，如下.

另证 设$\frac{x}{2+x}=a$,则$x=\frac{2a}{1-a}(a>0,a\neq 1)$,

再设$\frac{y}{2+y}=b$,$\frac{z}{2+z}=c$,得$y=\frac{2b}{1-b}$,$z=\frac{2c}{1-c}$,

则$a+b+c=1(a,b,c\in\mathbf{R}^{+})$.

$$\begin{aligned}A&=\frac{x^2}{2+x}+\frac{y^2}{2+y}+\frac{z^2}{2+z}\\&=\frac{2a^2}{1-a}+\frac{2b^2}{1-b}+\frac{2c^2}{1-c}\\&=2\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)\\&\geqslant 2\cdot\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)}=1.\end{aligned}$$

例 12 求使$\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant a\sqrt{x+y}$恒成立的$a$的取值范围.

解 由于$a\geqslant\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}$,

所以可令$u=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+y}}$,$v=\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}$,

则问题化为求$t=u+v$的最大值.

因为$u^2+v^2=1(u\geqslant 0,v\geqslant 0)$,

又令$u=\sin\theta$,$v=\cos\theta\left(\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$,

所以$t=u+v=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$,

所以$t_{\max}=\sqrt{2}$,故所求a的范围是$a\geqslant\sqrt{2}$.

【思悟点拨】

1.在不能观察出最本质的元时,可以分步逐次取元,最终达到简化结构的目的.

2.含有参数的恒成立问题,分离参数是常用的解决方法.

例 13 已知 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,求 $f(x)=\tan x+\cot x+\sec x+\csc x$ 的最小值.

解 $f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}$

$$=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x+\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}.$$

令 $t=\sin x+\cos x$,则 $2\sin x\cos x=t^2-1$,因为 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,所以 $t \in (1, \sqrt{2}]$,代入原式得

$$f(x)=\frac{1+t}{\frac{1}{2}(t^2-1)}=\frac{2}{t-1}.$$

所以 $t=\sqrt{2}$ 时,$[f(x)]_{\min}=2(\sqrt{2}+1)$.

【思悟点拨】

1.二元对称式中一般将和作元,即有 $a+b$ 和 ab,选 $t=a+b$ 作元,再用 t 表示出 ab.

2.此题也可先用万能公式,再选 $\tan\frac{x}{2}$ 作元.

例 14 设 a_0 为常数,且 $a_n=-2a_{n-1}+3^{n-1}(n \in \mathbf{N}^*)$.

求证:对任意 $n \geqslant 1$,$a_n=\frac{1}{5}[3^n+(-1)^{n-1}2^n]+(-1)^n 2^n a_0$.

证明 设 $b_n=a_n-\frac{1}{5}[3^n+(-1)^{n-1}2^n]-(-1)^n 2^n a_0$,

则 $a_n=b_n+\frac{1}{5}[3^n+(-1)^{n-1}2^n]+(-1)^n 2^n a_0$,