

海 洋 学 报

ACTA OCEANOLOGIA SINICA

第 1 卷

第 1 期

Vol 1

No. 1

1979

中 国 海 洋 学 会 编
海 洋 出 版 社 出 版

海洋学报

第 1 卷 第 1 期

目 录

联合海浪过程的数值模拟.....	余宙文等 (1)
海——气相互作用与海流风暴潮.....	秦 曾 灏 (17)
海上风的边界层模式.....	吴辉碇等 (39)
均匀层浅海声场与海底反射损失的关系.....	关 定 华 (52)
海底反射时参数对平均场强结构的控制.....	尚 尔 昌 (58)
河口硅酸盐物理化学过程研究.....	李法西等 (65)
海水中微量元素无机离子交换动力学研究——液膜递进模型理论.....	张正斌等 (77)
离子交换剂直接比色测定海水中微量镉和铬.....	刘莲生等 (90)
两千年来长江河口发育的模式.....	陈吉余等 (103)
裙带菜的孤雌生殖及其后代的遗传特点.....	方宗熙等 (112)
微量元素锰对海带生长的效应.....	赵焕登等 (120)
中国海域水螅水母类区系的初步分析.....	张 金 标 (127)
贻贝人工育苗的研究.....	聂宗庆等 (138)
梭鱼胚胎和仔、稚、幼鱼发育的研究.....	雷 霁 霖 (157)

联合海浪过程的数值模拟

元

余宙文 蒋德才 张大错

(山东海洋学院)

一、引言

早期,海浪被抽象成一些简单的模式(如正弦波、有限振幅波等等),而加以研究,也得到了许多能近似符合实际的结果。但是,对真实海浪而言,其内部结构和外观特征都是复杂的,且都受着随机性的制约。因此,自五十年代初期开始,人们已广泛地使用随机函数(随机过程)来作为描述海浪的模式。当用随机函数这种模式研究海浪时,海浪谱是一种有效的工具,而如何获得海浪谱便构成海浪研究中重要的问题。海浪谱可以通过多种途径获得,但利用海浪过程的现实(观测记录)求谱是最基本、最可靠的方法,这方面国内外已进行了许多的研究。所谓海浪过程的随机数值模拟,在某种意义上可说是上述问题的逆问题,即如何根据事先给定的海浪过程的谱去作出与之对应的海浪过程的可能现实,然后利用这种人为的(非实际观测的)现实去研究各种有关的问题。

在下列几方面问题的研究中,海浪过程的数值模拟可以作为一种有效的工具而加以应用:

(一) 海浪外观统计规律的研究

众所周知,海浪外观统计规律的研究对许多问题是重要的。虽然,Longuet-Higgins, Cartwright 等人对其中某些问题进行了理论上的研究,取得了一些成果,但许多重要的海浪统计规律仍未能在理论上加以解决。由于海浪现象本身的复杂性,从理论上对这些统计规律进行研究可能是相当困难的。正如 Goda 所指出的^[1],宽带谱的波浪统计理论的建立似乎不可能超出 Cartwright 和 Longuet-Higgins^[2]关于极值统计理论工作的范围。因此,从海浪过程的现实出发,将对现实进行取样得到的海浪各要素加以统计处理,以研究这些要素的统计规律,便成为一种有效的途径。通过这种研究,不仅可以获得一些实用的结果,也会对理论上的进一步研究给出某种方法上的启示。由于海浪数值模拟可以提供足够多的且谱形可加控制的人为资料,因此海浪数值模拟将在海浪统计规律的研究上得到广泛的应用。

(二) 对海浪过程产生的反应的研究

在实际问题中,许多其他海洋中的过程都和波面过程有密切的联系。例如,水下面某深度的速度过程、加速度过程、压力过程、海洋建筑物经受的波浪力过程和海洋建筑物受波浪作用而产生的动力平衡过程等等,都可看作是波面过程“直接作用”的结果。在研究这些与波面密切相关的过程的性质时,常常把波面过程作为某种系统的输入,而所研究的过程看作是系统的输出。众所周知,当系统是线性系统时,许多数学上完善的成果是可以直接加以利

用的。但当系统是属于复杂的非线性系统时,问题的解决就要困难得多。此时,一种有效的途径便是采用数值模拟的办法,依据给定的海浪谱先模拟出海浪过程的现实,并将此现实通过系统求出系统的输出(即依据模拟得到的海浪过程的现实,数值求解描述系统的非线性方程),然后对得到的输出直接进行各种有关性质的研究,如输出的谱,输出的外观统计规律等等。

(三) 实验室的海浪随机模拟

在实验室进行海浪随机模拟时,重要的问题之一是随机波造波机的设计。数值模拟的研究将为造波机设计提供部分依据^[7]。数值模拟得到的现实和造波机产生的现实的比较,又是检验造波机的一种手段。

(四) 海浪谱分析方法的研究

由于海浪过程随机数值模拟可以产生尽可能多的海浪过程现实——它们都近似地对应对着同一的谱分布,因此,它将在海浪谱分析方法的研究上起着一定的作用。例如,对谱估计偏度和方差的研究,虽然数学上已有一些理论结果,但利用数值模拟,我们也有可能从具体数值上直接加以研究,以便设计或选择对海浪过程特别适用的方法。

海浪随机数值模拟可能还有其他方面的应用。总之,它和现场观测、实验室测量一样,是获得研究海浪所需资料的一种手段。特别是,它能产生随意多的,可控制的资料,这是它特有的优点。

随机过程现实的人为产生,在数学上早在五十年代初期就已开始,那时为了谱分析方法研究而人为产生时间序列^[8]。而海浪过程的随机模拟则开始于六十年代后期,不少学者进行了这方面的工作^{[4] [5] [9] [11]}。特别应当提到的,Godal^[7]用谐波叠加法对大量的海浪谱形模拟了海浪单过程,用所产生的现实验证已有的海浪统计理论,研究了波高连贯的性质,并指出了在实验室模拟造波机设计中的应用。Borgman^[11]讨论了海浪过程模拟的方法,并用谐波叠加法,分别对波面过程、速度过程和加速度过程进行了模拟,计算了桩柱作用力的过程现实,并进一步对 Morison 公式中的系数 C_D 和 C_M 作了计算和讨论。

除 Borgman^[11]曾对几个海浪过程同时模拟的一种方法(即本文中的第二种方法)作过讨论外,其他关于海浪过程数值模拟方法的讨论以及已经进行过的数值模拟均限于海浪单过程。然而在某些问题中,几个海浪过程的联合模拟是需要的,例如海面上几个点的波面过程的同时模拟,或者一点波面过程与有关的另一过程的同时模拟等等。不难看出,单过程模拟是联合海浪过程模拟的一种简单特例。本文的目的,就在于对联合海浪过程模拟的各种可能方法进行探讨。至于这些方法在计算机上的实现是容易的。

二、问题的提法

先简述一下有关的海浪过程的特点是有意义的。下面将看到,模拟的提法与这些特点有关。

对于非消衰或非成长中的波面过程,一般认为是平稳的,几个点上的波面过程则认为是联合平稳的。进一步,波面过程还被认为是正态的,尽管用流体动力学方程组的非线性性能证明波面过程不可能严格地属于正态过程,实际观测也表明波面分布与正态分布间有某些偏差,但是由于这些偏差很小,所以在许多实际场合,当作正态过程处理还是合理的。另外,

就涉及到的各种统计量(如平均值、相关函数、海浪要素的统计分布等等)来说,都认为波面过程具有相应的各态历经性。所以,本文所指联合海浪过程是取实值的联合平稳正态过程,且对所感兴趣的统计量具有各态历经性。显然,对这类过程给出谱,就意味着给出过程的全部统计信息。

海浪现象具有非线性的特征,然而本文是在线性理论范围内进行讨论的。这一前提在许多场合不会影响结果的实用性。

联合海浪过程随机模拟的提法如下:

设 n 个海浪实过程用 $Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_n(t)$ 表示。它们各自的谱密度函数 $S_{Y_1 Y_1}(\omega)$ 和它们间交叉谱密度函数 $S_{Y_i Y_j}(\omega) (1 \leq (i, j) \leq n, i \neq j)$ 为已知,要求作出过程 $Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_n(t)$ 的可能现实,使得这些现实对应的过程具有给定的谱密度和交叉谱密度,而且也具有联合平稳性和正态性。

如果我们引入向量值过程和矩阵值函数的概念,问题的提法和问题的求解都将具有更加简洁的形式。所谓矩阵值函数是一个矩阵,其元素为一般的标量值函数,相应地,所谓向量值过程是一个列向量,其元素为一般的标量值过程。

这样, n 个海浪实过程可用下面的向量值过程表示:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \\ \vdots \\ Y_n(t) \end{pmatrix} \quad (1)$$

而这 n 个过程的方差谱密度和交叉谱密度可用下面的矩阵值函数 $S_Y(\omega)$ 表示:

$$S_Y(\omega) = \begin{pmatrix} S_{11}(\omega) & S_{12}(\omega) & \dots & S_{1n}(\omega) \\ S_{21}(\omega) & S_{22}(\omega) & \dots & S_{2n}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ S_{n1}(\omega) & S_{n2}(\omega) & \dots & S_{nn}(\omega) \end{pmatrix} \quad (2)$$

其中 $S_{ij}(\omega) = S_{Y_i Y_j}(\omega)$ 。 (3)

我们把(2)式右端的矩阵称为向量值海浪过程 $Y(t)$ 的谱方阵,并简单地称 $S_Y(\omega)$ 为过程 $Y(t)$ 的谱。

用上面的符号可以把海浪联合过程的随机模拟的提法重新叙述如下:要求作出向量值海浪过程 $Y(t)$ 的可能现实,使得 $Y(t)$ 具有预先给定的谱方阵 $S_Y(\omega)$,并具有联合平稳性和正态性。

由于在波浪学使用的各种谱表达式中和一般使用的各种付氏变换表达式中,有可能相差一个常因子的不确定性,因此,在讨论模拟方法之前,我们先将本文使用的有关定义重述如下。

若两个海浪单过程分别用 $\zeta_1(t)$ 和 $\zeta_2(t)$ 表示,则 $\zeta_1(t)$ 双边谱密度由下式定义:

$$S_{\zeta_1}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\zeta_1}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad |\omega| < \infty \quad (4)$$

$$R_{\zeta}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\zeta_1}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = E[\zeta_1(t+\tau) \overline{\zeta_1(t)}], \quad |\tau| < \infty, \quad (5)$$

式中 $\overline{\xi_1(t)}$ 代表 $\xi_1(t)$ 的共轭。

$\xi_1(t)$ 和 $\xi_2(t)$ 的交叉谱密度由下式定义:

$$S_{\xi_1 \xi_2}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\xi_1 \xi_2}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad |\omega| < \infty \quad (6)$$

$$R_{\xi_1 \xi_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi_1 \xi_2}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = E[\xi_1(t+\tau)\overline{\xi_2(t)}], \quad |\tau| < \infty, \quad (7)$$

因为我们只考虑实过程, 所以 $R_{\xi_1}(\tau)$ 和 $S_{\xi_1}(\omega)$ 均为实的偶函数。而对于交叉谱密度和交叉相关函数应有:

$$R_{\xi_1 \xi_2}(\tau) = R_{\xi_2 \xi_1}(-\tau), \quad (8)$$

$$S_{\xi_1 \xi_2}(\omega) = \overline{S_{\xi_2 \xi_1}(\omega)}. \quad (9)$$

应该注意, $S_{\xi_1 \xi_2}(\omega)$ 一般是复值函数, 按照 Tukey 引入的术语, 其实部称为同相谱, 它是两过程的同相谐波间相关性的一种测度; 而其虚部称为异相谱, 它是两过程异相谐波间相关性的一种测度。

函数 $f(t)$ 之付氏变换 $F(\omega)$ 由下式定义:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad |\omega| < \infty, \quad (10)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad |t| < \infty \quad (11)$$

以后我们用符号

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$$

表示 (10) 式和 (11) 式表示的关系。

虽然海浪中经常使用单边谱, 以后除非特别声明, 本文中的海浪谱均指上面定义的双边谱。

下面, 我们将讨论解决所提问题的三种模拟方式。

三、用过程的回归模式进行模拟

若给定向量值海浪过程 $Y(t)$ 的谱方阵

$$S_Y(\omega) = \begin{pmatrix} S_{11}(\omega) & S_{12}(\omega) & \cdots & S_{1n}(\omega) \\ S_{12}(\omega) & S_{22}(\omega) & \cdots & S_{2n}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{n1}(\omega) & S_{n2}(\omega) & \cdots & S_{nn}(\omega) \end{pmatrix} \quad (12)$$

要求模拟出过程

$$Y(t) = \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \\ \vdots \\ Y_n(t) \end{pmatrix} \quad (13)$$

的可能现实。我们可以按逐个单过程的顺序模拟方式来进行,即先模拟 $Y_1(t)$,然后 $Y_2(t)$ ……最后模拟 $Y_n(t)$ 。当然,在每一阶段的模拟中,都应当使其满足一定的条件。下面较详细地介绍这种模拟方法的运算法则。

首先我们人为产生一向量值正态白噪声过程

$$X(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{pmatrix} \quad (14)$$

其谱密度函数为单位矩阵

$$S_X(\omega) = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

显然过程 $X(t)$ 的现在在数字计算机上是易于产生的,已有许多成熟的算法可供使用[6];[20];[3]。

将过程 $X_1(t)$ 作为一线性系统的输入,适当选择系统,可将输出 $\hat{Y}_1(t)$ 作为我们所需的 $Y_1(t)$ (参见图1)。

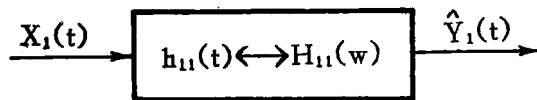


图1 模拟 $Y_1(t)$ 的线性系统

在模拟 $y_1(t)$ 时,我们要求所得过程 $\hat{y}_1(t)$ 满足条件

$$S_{\hat{y}_1 \hat{y}_1}(\omega) = S_{11}(\omega). \quad (16)$$

如以 $h_{11}(t)$ 和 $H_{11}(\omega)$ 分别表示此系统的脉冲响应函数和系统函数,它们之间的关系可表示为

$$h_{11}(t) \longleftrightarrow H_{11}(\omega), \quad (17)$$

为了使(16)式得到满足,显然选择系统函数时应使其满足下列条件

$$|H_{11}(\omega)|^2 = S_{\hat{y}_1 \hat{y}_1}(\omega) = S_{11}(\omega), \quad (18)$$

为使计算简单,取 $H_{11}(\omega)$ 只具有实值,即取

$$H_{11}(\omega) = [S_{11}(\omega)]^{1/2}, \quad (19)$$

这样,我们就得到了模拟 $Y_1(t)$ 的运算法则:

$$\hat{Y}_1(t) = h_{11}(t) * X_1(t)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(t-\tau) X_1(\tau) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(\tau) X_1(t-\tau) d\tau.
 \end{aligned} \tag{20}$$

下面我们来说明 $Y_2(t)$ 的模拟。将已模拟得到的 $\hat{Y}_1(t)$ 和 $X_2(t)$ 分别输入两个线性系统，并将这二个系统的输出叠加起来，适当选择这两个系统，可将叠加后的输出 $\hat{Y}_2(t)$ 作为我们所需的 $Y_2(t)$ 。（参见图 2）。

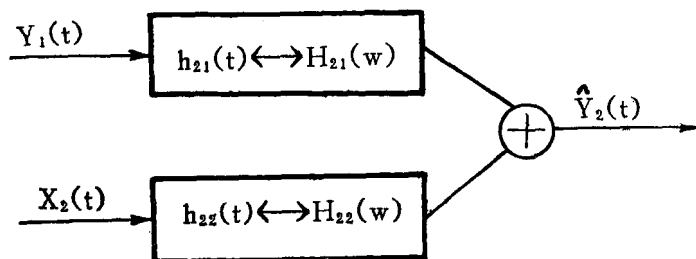


图 2 模拟 $Y_2(t)$ 的线性系统

这样，在模拟 $Y_2(t)$ 时，我们把 $Y_2(t)$ 看作二部分的和，第一部分是与 $Y_1(t)$ 有密切关系的部分，第二部分是与 $Y_1(t)$ 独立的部分。此时，系统选择的原则是：要求与 $Y_1(t)$ 独立的第二部分的谱密度对任何频率为最小，在物理意义上也就是要求这一部分的每一谐波的能量为最小。显然，这和回归的思想是一致的。不难证明，选择系统的这种原则和要求过程 $\hat{Y}_2(t)$ 满足下列条件是等价的。

$$\left. \begin{aligned} S_{\hat{Y}_2 \hat{Y}_1}(\omega) &= S_{21}(\omega) \\ S_{\hat{Y}_2 \hat{Y}_2}(\omega) &= S_{22}(\omega) \end{aligned} \right\} \tag{21}$$

如以 $\begin{pmatrix} h_{21}(t) \\ h_{22}(t) \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} H_{21}(\omega) \\ H_{22}(\omega) \end{pmatrix}$ 分别表示这个复系统的脉冲响应函数和系统函数，它们之间的关系为

$$\begin{pmatrix} h_{21}(t) \\ h_{22}(t) \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} H_{21}(\omega) \\ H_{22}(\omega) \end{pmatrix} \tag{22}$$

计算 $S_{\hat{Y}_2 \hat{Y}_1}(\omega)$ 和 $S_{\hat{Y}_2 \hat{Y}_2}(\omega)$ 并代入 (21) 式便得：

$$\left. \begin{aligned} S_{\hat{Y}_2 \hat{Y}_1}(\omega) &= S_{11}(\omega) H_{21}(\omega) = S_{21}(\omega) \\ S_{\hat{Y}_2 \hat{Y}_2}(\omega) &= \overline{S_{21}(\omega)} H_{21}(\omega) + |H_{22}(\omega)|^2 = S_{22}(\omega) \end{aligned} \right\} \tag{23}$$

或写成如下形式

$$\begin{pmatrix} S_{11}(\omega) & 0 \\ \overline{S_{21}(\omega)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{21}(\omega) \\ |H_{22}(\omega)|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{21}(\omega) \\ S_{22}(\omega) \end{pmatrix}. \tag{24}$$

系统函数应由下式决定

$$\begin{pmatrix} H_{21}(\omega) \\ |H_{22}(\omega)|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{S_{11}(\omega)}{S_{21}(\omega)} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} S_{21}(\omega) \\ S_{22}(\omega) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} S_{11}(\omega) & 0 \\ S_{12}(\omega) & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} S_{21}(\omega) \\ S_{22}(\omega) \end{pmatrix}. \quad (25)$$

这样便得到了模拟 $Y_2(t)$ 的运算法则:

$$\hat{Y}_2(t) = \hat{y}_1(t) * h_{21}(t) + X_2(t) * h_{22}(t). \quad (26)$$

一般, 当模拟 $Y_m(t)$ 时, 将已模拟得到的 $\hat{Y}_1(t)$, $\hat{Y}_2(t)$, $\hat{Y}_3(t)$ $\hat{Y}_{m-1}(t)$ 和 $X_m(t)$ 分别输入 m 个线性系统, 然后将输出迭加起来。所用线性系统如图3所示。

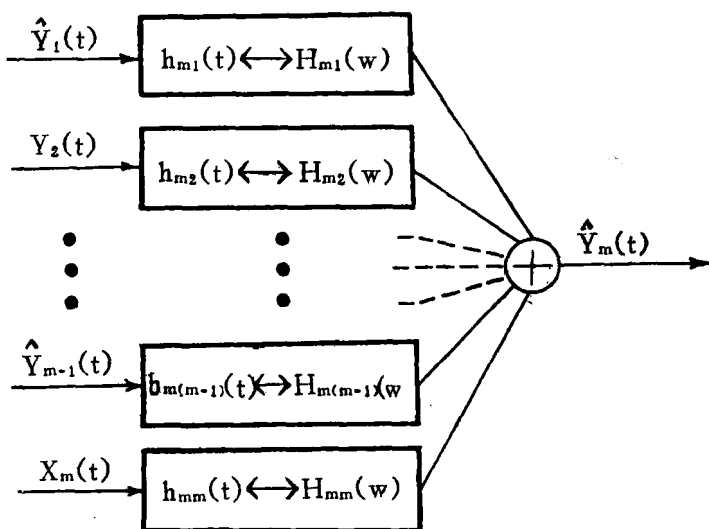


图3 模拟 $Y_m(t)$ 的线性系统

和模拟 $Y_2(t)$ 时的情况一样, 我们把 $Y_m(t)$ 看作两部分, 一部分是与 $Y_1(t)$, $Y_2(t)$ $Y_{m-1}(t)$ 有密切关系的部分, 另一部分则是与上述 $(m-1)$ 个过程独立的部分。系统选择的原则仍然是: 要求第二部分过程的谱密度对任何频率为最小。这个要求也就导致系统函数应满足的下列方程:

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{21} & \cdots & S_{(m-1)1} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & \cdots & S_{(m-1)2} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ S_{1m} & S_{2m} & & S_{(m-1)m} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{m1} \\ H_{m2} \\ \vdots \\ |H_{mm}|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{m1} \\ S_{m2} \\ \vdots \\ S_{mm} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} H_{m1} \\ H_{m2} \\ \vdots \\ |H_{mm}|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{21} & \cdots & S_{(m-1)1} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & \cdots & S_{(m-1)2} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ S_{1m} & S_{2m} & & S_{(m-1)m} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} S_{m1} \\ S_{m2} \\ \vdots \\ S_{mm} \end{pmatrix}. \quad (27)$$

这样, 模拟 $y_m(t)$ 的运算法则为:

$$\hat{y}_m(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \hat{y}_i(t) * h_{mi}(t) + X_m(t) * h_{mm}(t)。(28)$$

下面, 我们写出 $n = 3$ 时有关的系统函数表达式:

$$\left. \begin{aligned} H_{11}(\omega) &= [S_{11}(\omega)]^{1/2}, \\ H_{21}(\omega) &= S_{21}(\omega) / S_{11}(\omega), \\ H_{22}(\omega) &= \left[S_{22}(\omega) - \frac{|S_{21}(\omega)|^2}{S_{11}(\omega)} \right]^{1/2}, \\ H_{31}(\omega) &= \frac{S_{31}(\omega)S_{22}(\omega) - S_{32}(\omega)S_{21}(\omega)}{S_{11}(\omega)S_{22}(\omega) - |S_{21}(\omega)|^2}, \\ H_{32}(\omega) &= \frac{S_{32}(\omega)S_{11}(\omega) - \overline{S_{21}(\omega)}S_{31}(\omega)}{S_{11}(\omega)S_{22}(\omega) - |S_{21}(\omega)|^2}, \\ H_{33}(\omega) &= [S_{33}(\omega) - \overline{S_{31}(\omega)}H_{31}(\omega) - \overline{S_{32}(\omega)}H_{32}(\omega)]^{1/2} \\ &= \left[S_{33}(\omega) - \overline{S_{31}(\omega)} \frac{S_{31}S_{22} - S_{32}S_{21}}{S_{11}S_{22} - |S_{21}|^2} - \overline{S_{32}(\omega)} \frac{S_{32}S_{11} - \overline{S_{21}S_{31}}}{S_{11}S_{22} - |S_{21}|^2} \right]^{1/2} \end{aligned} \right\} (29)$$

不难看出, 按上面方式确定的系统是时间不变的系统, 由此可知输出过程的平稳性。另外, 由系统的线性性以及人为产生的白噪声过程 $X(t)$ 的正态性, 可知输出过程的正态性。所以我们这样的模拟方式是满足模拟要求的。

用这种方式模拟, 物理概念较清晰, 各过程间的关系被明确地表示出来, 和过程间的线性回归问题密切地联系着。例如, 过程 $Y_m(t)$ 可看作两部分构成, 一部分是由于 $Y_1(t)$, $\dots$, $Y_{m-1}(t)$ 的贡献, 即过程 $Y_m(t)$ 对这 $(m-1)$ 个过程的回归部分, 另一部分是与此 $(m-1)$ 个过程无关的部分, 或者说是过程 $Y_m(t)$ 的随机干扰部分。

和下一节将要介绍的方法相比, 当 n 较大时 (例 $n \geq 4$), 决定系统函数需要求解线性方程组, 这是它的缺点。

对 $n = 2$ 的情况, 可能是最常用到的。此时当 $Y_1(t)$ 和 $Y_2(t)$ 互相独立时, 模拟的系统函数变为如下的形式:

$$\left. \begin{aligned} H_{11}(\omega) &= [S_{11}(\omega)]^{1/2}, \\ H_{21}(\omega) &= 0, \\ H_{22}(\omega) &= [S_{22}(\omega)]^{1/2}. \end{aligned} \right\} (30)$$

也就是说, 模拟 $Y_2(t)$ 时, 不需用到 $\hat{Y}_1(t)$ 作输入, 而只用 $X_2(t)$ 作为输入。

当 $Y_1(t)$ 和 $Y_2(t)$ 间线性连结函数 (Coherence function) $r(\omega) = 1$ 时, 即 $Y_1(t)$ 和 $Y_2(t)$ 的联系方式可看作是某线性系统的输入和输出时, 模拟的系统函数变为下列形式:

$$\left. \begin{aligned} H_{11}(\omega) &= [S_{11}(\omega)]^{1/2} \\ H_{21}(\omega) &= S_{21}(\omega) / S_{11}(\omega) \\ H_{22}(\omega) &= 0 \end{aligned} \right\} (31)$$

此时模拟过程 $Y_2(t)$ 不需用到白噪声过程 $X_2(t)$ 。

四、利用向量值白噪声过程直接输入复线性系统进行模拟

对于向量值海浪过程的模拟, 我们还可与上节方式稍有差别的方式进行, 即在模拟每一个过程 $Y_m(t)$ 时都同时用几个白噪声单过程作为输入, 而不用已模拟的 $Y_i(t)$ ($i < m$) 过程作为输入。下面我们来说明这种模拟法则。

设 $X(t)$ 仍为上节所述系人工产生的平稳正态白噪声向量值过程。引进一个复线性系统, 其脉冲响应函数为:

$$g(t) = \begin{pmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) & \cdots & g_{1n}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) & \cdots & g_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{n1}(t) & g_{n2}(t) & \cdots & g_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad (32)$$

此系统的系统函数为:

$$G(\omega) = \begin{pmatrix} G_{11}(\omega) & G_{12}(\omega) & \cdots & G_{1n}(\omega) \\ G_{21}(\omega) & G_{22}(\omega) & \cdots & G_{2n}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ G_{n1}(\omega) & G_{n2}(\omega) & \cdots & G_{nn}(\omega) \end{pmatrix}. \quad (33)$$

$g(t)$ 与 $G(\omega)$ 关系为

$$g(t) \longleftrightarrow G(\omega), \quad (34)$$

上式的关系应理解为

$$g_{ij}(t) \longleftrightarrow G_{ij}(\omega) \quad 1 \leq (i, j) \leq n. \quad (35)$$

现在我们以向量值白噪声过程 $X(t)$ 作为此系统的输入, 只要适当选择系统, 其输出 $\hat{Y}(t)$ 便可作为我们所需模拟的向量值海浪过程 $Y(t)$ 。这样 $\hat{Y}(t)$ 应由下式给出:

$$\hat{y}(t) = \begin{pmatrix} \hat{y}_1(t) \\ \hat{y}_2(t) \\ \vdots \\ \hat{y}_n(t) \end{pmatrix} = g(t) * X(t), \quad (36)$$

此式应理解为:

$$\hat{y}_m(t) = \sum_{i=1}^n g_{mi}(t) * X_i(t), \quad 1 \leq m \leq n. \quad (37)$$

显然, 系统的选择应当使 $\hat{y}(t)$ 的谱方阵等于预先给定的谱方阵, 即应使下式成立:

$$S_{\hat{y}\hat{y}}(\omega) = \begin{pmatrix} S_{11}(\omega) & S_{12}(\omega) & \cdots & S_{1n}(\omega) \\ S_{21}(\omega) & S_{22}(\omega) & \cdots & S_{2n}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{n1}(\omega) & S_{n2}(\omega) & \cdots & S_{nn}(\omega) \end{pmatrix} \quad (38)$$

将由式 (36) 确定的 $\hat{y}(t)$ 的谱方阵计算出来, 并代入 (38) 式, 便得到

$$\begin{aligned} S\hat{y}\hat{y}(\omega) &= G(\omega) S_X(\omega) \overline{G(\omega)}' = G(\omega) I \overline{G(\omega)}' \\ &= G(\omega) \overline{G(\omega)}' = S_Y(\omega), \end{aligned} \quad (39)$$

式中 $\overline{G(\omega)}'$ 表示 $G(\omega)$ 的转置并共轭。

令上式两端的矩阵的对应元素相等, 即得到含 n^2 个未知数的由 n^2 个方程构成的方程组, 但是因为我们只考虑实过程, 鉴于 (9) 式, 矩阵 $S_{\hat{y}\hat{y}}(\omega)$ 和 $S_Y(\omega)$ 都属于哈密顿矩阵, 因此这两矩阵主对角线下面元素对应相等也就必然导致主对角线上面元素的对应相等, 所以这

n^2 个方程中实际只有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个方程是独立的。这样未知数的个数大于独立方程的个数, 此

时我们可以对矩阵 $G(\omega)$ 的 n^2 个元素中的 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个事先指定给定值。显然下面的指定方式是合理而方便的:

$$G_{ij}(\omega) = 0 \quad \text{当 } j > i \text{ 时} \quad (40)$$

即把系统函数 $G(\omega)$ 主对角线右上方元素全部指定为零, 此时系统函数具有如下形式

$$G(\omega) = \begin{pmatrix} G_{11}(\omega) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ G_{21}(\omega) & G_{22}(\omega) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1}(\omega) & G_{n2}(\omega) & & & G_{nn}(\omega) \end{pmatrix} \quad (41)$$

而对应脉冲响应函数应有如下形式:

$$g(t) = \begin{pmatrix} g_{11}(t) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1}(t) & g_{n2}(t) & \cdots & & g_{nn}(t) \end{pmatrix}. \quad (42)$$

这样, 形为 (41) 式的系统函数便完全为方程 (39) 唯一决定, 即 $G(\omega)$ 中的 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个非零元

素完全可由方程 (39) 解出, 这些元素应该是预先给定的谱方阵 $S_Y(\omega)$ 的元素的组合。应该注意, 在解方程 (39) 时, 可以不必去管主对角线上方 (或下方) 的元素, 因为那些元素对应的方程不是独立的, 它们可以由下方 (或上方) 元素对应的方程取共轭而得到。

至此, 模拟向量值海浪过程 $Y(t)$ 的问题已解决, 具体的运算过程综述如下: 根据预先给定的谱方阵, 由方程 (39) 解出形如 (41) 的系统函数 $G(\omega)$, 从 (34) 式关系得到系统脉冲响应函数 $g(t)$ 。然后依下面法则得到向量值海浪过程 $\hat{Y}(t)$:

$$\hat{y}(t) = g(t) * X(t) \quad (43)$$

写成分量形式:

$$\hat{y}_m(t) = \sum_{i=1}^m g_{mi}(t) * X_i(t) \quad n \geq m \geq 1 \quad (44)$$

上述运算可用下图形象表示出来 (见图 4, 5)



图 4 模拟Y(t)的复线性系统

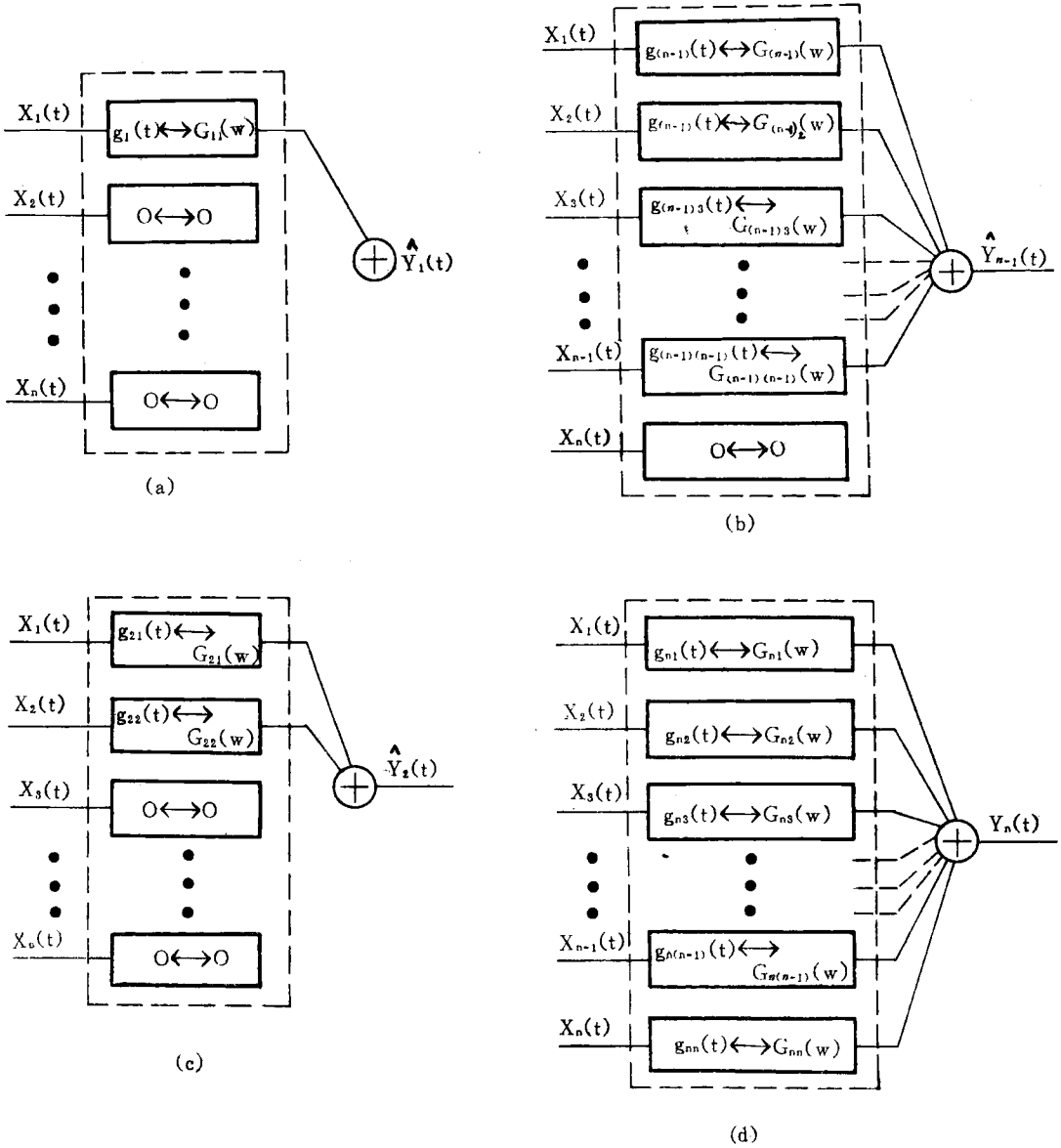


图 5 模拟分量过程Y_n(t)的线性系统

至于所得 $\hat{Y}(t)$ 的平稳性和正态性, 可和上节一样予以证明。

应当看到, 由方程(39)求解 $G(\omega)$ 的元素, 表面上看来似乎需要解 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个线性联立方程组, 其实不然。如果我们求解 $G(\omega)$ 的元素时, 按照从上而下, 自左到右的顺序, 那么可以逐个求解, 也就是说, 方程组中的每一个方程就可解出 $G(\omega)$ 的一个元素。 $n = 5$ 时系统函数 $G(\omega)$ 的每一个非零元素表达式列在附录中。不难看出, 附录中前六项和 Borgman^[4] 对 $n = 3$ 时给出的表达式是一致的 (除因交叉谱定义差别引起的共轭运算外)。

对 $n = 2$, 当 $Y_1(t)$ 和 $Y_2(t)$ 独立时, 系统函数简化为 $G_{11}(\omega) = [S_{11}(\omega)]^{1/2}$, $G_{21}(\omega) = 0$, $G_{22}(\omega) = [S_{22}(\omega)]^{1/2}$; 当 $Y_1(t)$ 和 $Y_2(t)$ 之间的线性联结函数 $r(\omega) = 1$ 时, 系统函数简化为 $G_{11}(\omega) = [S_{11}(\omega)]^{1/2}$, $G_{21}(\omega) = S_{21}(\omega) / [S_{11}(\omega)]^{1/2}$, $G_{22}(\omega) = 0$ 。对这种特殊情况, 联合模拟简化成单过程模拟。

五、利用迭加模式进行模拟

在波浪学中, 常常利用所谓子波迭加模型来表示波面的海浪过程, 也就是说, 海浪是由许多子波叠加的结果, 这些不同的子波之间振幅不同、传播方向不同、频率不同, 而它们的初位相是相互独立、于区间 $[0, 2\pi]$ 内均匀分布的随机量^[1]。按照这种模型, 波面可用微积分形式表示为: ^[8]

$$\zeta(x, y, t) = 2 \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \sqrt{S(\omega, \theta)} d\omega d\theta \cos[kx \cos\theta + ky \sin\theta - \omega t + \varepsilon(\omega, \theta)] \quad (45)$$

其中 $\omega^2 = gk \tanh kd$, 而 d 为水深。因子“2”出现于上式右端是由于我们采用的是双边谱。

显然, 如果予先给出方向谱, 依据上式可以同时模拟若干点上的波面过程, 而且各过程的关系能够自动地得到满足。但是要予先给出方向谱是困难的, 因为目前还未能从理论上导出方向谱的形式, 而根据实测资料求方向谱往往代价高昂, 也很少进行。因此, 应该寻求另外切合实际的模式。下面, 我们将研究这样的模拟方法: 把各分量过程都写成不考虑传播方向的子波迭加的模式, 但各过程的谱和过程间的交叉谱应和予先给定的相等。

先讨论下面的简单问题, 作为解决我们问题的基础。

$$\text{设} \quad u(t) = f(t) * v(t) \quad (46)$$

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega) \quad (47)$$

其中 $v(t)$ 为平稳白噪声单过程, $F(\omega)$ 为频带有限函数, 即

$$F(\omega) = 0 \quad \text{对 } |\omega| > \omega_c \quad (48)$$

定义过程 $v_1(t)$, 它满足下式:

$$S_{v_1 v_1}(\omega) = \begin{cases} S_{vv}(\omega) & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (49)$$

显然 (46) 式可用下式代替:

$$u(t) = f(t) * v_1(t)$$

如把区间 $[0, \omega_c]$ 分成 r 个子区间, 且每一个子区间都足够小, 那么过程 $v_1(t)$ 可写成迭加模式^[10]

$$v_1(t) = 2 \sum_{k=1}^Y \sqrt{\omega_k - \omega_{k-1}} \cos(\omega'_k t + \varepsilon_k) \quad (50)$$

其中 ε_k , ω'_k ($k = 1, 2, \dots, r$) 系相互独立的随机变量, 且前者在区间 $[0, 2\pi]$ 内均匀分布, 后者在对应的子区间 $[\omega_{k-1}, \omega_k]$ 内均匀分布。

如把 $F(\omega)$ 写成下面的形式

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{i\varphi(\omega)} \quad (51)$$

$F(\omega)$ 具有如下的物理解释: 将 $v_1(t)$ 中的频率为 ω 的一个谐波振幅放大 $|F(\omega)|$ 倍, 初位相变化 $\varphi(\omega)$ 后, 便得到 $u(t)$ 中的相应谐波。据此, 过程 $u(t)$ 可写成:

$$u(t) = 2 \sum_{k=1}^Y \sqrt{\omega_k - \omega_{k-1}} |F(\omega'_k)| \cos[\omega'_k t + \varepsilon_k + \varphi(\omega'_k)] \quad (52)$$

不难看出, 只要上面所说的子区间分得足够多, 且每一个都足够小, 依据中心极限定理, 过程 $u(t)$, $v_1(t)$ 的平稳性和正态性都是可以得到满足的。

从(44)式可以知道, 过程 $\hat{Y}_m(t)$ 是几个形如(46)式表示的过程的和, 因此将(52)式应用于式(44), 便得到用子波迭加法模拟联合海浪过程的表达式

$$\hat{Y}_m(t) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^Y 2 \sqrt{\omega_k - \omega_{k-1}} |G_{mi}(\omega'_{ik})| \cos[\omega'_{ik} t + \varepsilon_{ik} + \varphi_{mi}(\omega'_{ik})] \quad (53)$$

式中 $|G_{mi}(\omega'_{ik})|$ 和 $\varphi_{mi}(\omega'_{ik})$ 依(41)式中的 $G_{mi}(\omega)$ 按(51)式的方式求得, 而 ω_{ik} , ε_{ik} , ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq k \leq r$) 为相互独立的随机量, 前者于区间 (ω_{k-1}, ω_k) 内均匀分布, 后者于区间 $(0, 2\pi)$ 内均匀分布。

六、数字滤波器的设计

在第一种和第二种的模拟方法中, 最后都要作形如下式的计算:

$$u(t) = v(t) * h(t) \quad (54)$$

此处 $u(t)$ 代表上面的一类 $\hat{Y}_m(t)$, $v(t)$ 代表上面的一类 $\hat{Y}_k(t)$ 或 $\hat{X}_k(t)$, 而 $h(t)$ 代表上面的一类 $h_{mk}(t)$ 或 $g_{mk}(t)$ 等等。下面, 我们针对海浪谱的特点, 说明第一种和第二种模拟方法中出现的形如(54)式的运算的实现。

因为我们能得到的是离散数据, 其离散时间间隔可依海浪外观周期或折叠频率加以选取。如果此离散间隔选择为 Δt , 那么上式可改写成:

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} v(t-\tau) h(\tau) d\tau \\ &\approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(t-n\Delta\tau) h(n\Delta\tau) \Delta\tau. \end{aligned} \quad (55)$$

考虑到对海浪过程有:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0 \quad (56)$$

并方便地取 $\Delta t = \Delta\tau$, (55) 式可变为

$$\begin{aligned}
 u(k\Delta t) &\approx \sum_{n=-m}^m v(k\Delta t - n\Delta t) h(n\Delta t) \Delta t \\
 &= \sum_{n=-m}^m v(k\Delta t - n\Delta t) a_n,
 \end{aligned} \quad (57)$$

所谓数字滤波器的设计包括前面所述系统函数的求解和系数 a_n 的计算。Borgman^[1]对系统函数为实值的情形给出了由系统函数计算系数 a_n 的方法。对于联合海浪过程的模拟,系统函数大部分都为复值函数,下面我们以另一种方式导出与复值系统函数对应的 a_n 的计算公式。

因为我们只考虑实海浪过程,所以作为相应的系统函数 $H(\omega)$ ($h(t) \longleftrightarrow H(\omega)$),在我们的问题中均具有性质:

$$H(\omega) = H_R(\omega) + iH_I(\omega) = \overline{H(-\omega)}, \quad (58)$$

所以

$$a_n = h(n\Delta t) \Delta t = \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega n\Delta t} d\omega. \quad (59)$$

对海浪过程考虑到 $H(\omega)$ 系频带有限函数,如令

$$\omega_c = \frac{2\pi}{\Delta t}, \quad (60)$$

并选取 Δt 为足够小,使得问题中的海浪过程的切断频率小于 ω_c ,此时 $H(\omega)$ 在 $|\omega| > \omega_c$ 的范围上为零,那么我们得到

$$a_n = \frac{1}{\omega_c} \int_{-\frac{\omega_c}{2}}^{\frac{\omega_c}{2}} [H_R(\omega) \cos \frac{2\pi n\omega}{\omega_c} - H_I(\omega) \sin \frac{2\pi n\omega}{\omega_c}] d\omega = a_{nR} - a_{nI},$$

式中 a_{nR} 代表含余弦项积分, a_{nI} 代表含正弦项积分,它们分别是 $H_R(\omega)$ 和 $H_I(\omega)$ 在区间

$\left[-\frac{\pi}{\Delta t}, \frac{\pi}{\Delta t}\right]$ 内付氏展式的系数,而 a_n 则是 $H(\omega)$ 在同一区间内的付氏复展式系数。如

果把区间 $\left[0, \frac{\pi}{\Delta t}\right]$ 分成 l 个长度为 $\Delta\omega$ 的等分区间,那么 a_{nR} 和 a_{nI} 分别可用下列两式计算:

$$a_{nR} = \frac{\Delta t}{2\pi} H_R(0) \Delta\omega + \frac{\Delta t}{\pi} \sum_{i=1}^l H_R(i\Delta\omega) \cos(n\Delta t i\Delta\omega) \Delta\omega \quad (61)$$

$$a_{nI} = \frac{\Delta t}{\pi} \sum_{i=1}^l H_I(i\omega) \sin(n\Delta t i\Delta\omega) \Delta\omega \quad (62)$$

只要选定 Δt , m 和 l ,由式(61)和(62)可计算数字滤波器系数 a_n ,再由(57)式便可得到(54)式中的 $u(t)$ 的离散值。

七、结 语

上面,对联合海浪过程的模拟提出了三种可能途径。不难看出,第一种和第二种虽然途径不同,但只要所用白噪声过程相同,模拟得到的现实将是相同的,因为这些现实完全由预先给定的谱方阵和白噪声过程确定。这些途径各有自己的特点,第一种途径物理观念清晰,但系统函数的求得需要解线性方程组;第二种途径的优点是,系统函数的求得非常简单;第三种途径相应于波浪的传统模式,且程序设计简单,但这种途径和前两种比较起来可能需要较多的计算时间。这些不同途径可根据问题性质等具体情况加以选用。

附 录

由式 (39) 並注意到 (41) 式, 系统函数 $G(\omega)$ 矩阵之有关元素可自下式求得:

$$S_{ij}(\omega) = \sum_{l=1}^j G_{il}(\omega) \overline{G_{jl}(\omega)}, \quad \begin{matrix} j=1,2,3\cdots i, \\ i=1,2,3\cdots n, \end{matrix}$$

在 $n=5$ 时, 上式的具体形式为:

$$S_{11}(\omega) = G_{11}(\omega) \overline{G_{11}(\omega)},$$

$$S_{21}(\omega) = G_{21}(\omega) \overline{G_{11}(\omega)},$$

$$S_{22}(\omega) = G_{22}(\omega) \overline{G_{22}(\omega)} + G_{21}(\omega) \overline{G_{21}(\omega)} = |G_{22}(\omega)|^2 + |G_{21}(\omega)|^2,$$

$$S_{31}(\omega) = G_{31}(\omega) \overline{G_{11}(\omega)},$$

$$S_{32}(\omega) = G_{31}(\omega) \overline{G_{21}(\omega)} + G_{32}(\omega) \overline{G_{22}(\omega)},$$

$$S_{33}(\omega) = |G_{31}(\omega)|^2 + |G_{32}(\omega)|^2 + |G_{33}(\omega)|^2,$$

$$S_{41}(\omega) = G_{41}(\omega) \overline{G_{11}(\omega)},$$

$$S_{42}(\omega) = G_{41}(\omega) \overline{G_{21}(\omega)} + G_{42}(\omega) \overline{G_{22}(\omega)},$$

$$S_{43}(\omega) = G_{41}(\omega) \overline{G_{31}(\omega)} + G_{42}(\omega) \overline{G_{32}(\omega)} + G_{43}(\omega) \overline{G_{33}(\omega)},$$

$$S_{44}(\omega) = |G_{41}(\omega)|^2 + |G_{42}(\omega)|^2 + |G_{43}(\omega)|^2 + |G_{44}(\omega)|^2,$$

$$S_{51}(\omega) = G_{51}(\omega) \overline{G_{11}(\omega)},$$

$$S_{52}(\omega) = G_{51}(\omega) \overline{G_{21}(\omega)} + G_{52}(\omega) \overline{G_{22}(\omega)},$$

$$S_{53}(\omega) = G_{51}(\omega) \overline{G_{31}(\omega)} + G_{52}(\omega) \overline{G_{32}(\omega)} + G_{53}(\omega) \overline{G_{33}(\omega)}$$

$$S_{54}(\omega) = G_{51}(\omega) \overline{G_{41}(\omega)} + G_{52}(\omega) \overline{G_{42}(\omega)} + G_{53}(\omega) \overline{G_{43}(\omega)} + G_{54}(\omega) \overline{G_{44}(\omega)},$$

$$S_{55}(\omega) = |G_{51}(\omega)|^2 + |G_{52}(\omega)|^2 + |G_{53}(\omega)|^2 + |G_{54}(\omega)|^2 + |G_{55}(\omega)|^2。$$

当 $Y(t)$ 的谱方阵预先给定时, 可由下列一组公式逐个算出相应的 $G(\omega)$ 的各元素:

$$G_{11}(\omega) = [S_{11}(\omega)]^{1/2},$$

$$G_{21}(\omega) = S_{21}(\omega) / [S_{11}(\omega)]^{1/2},$$

$$G_{22}(\omega) = [S_{22}(\omega) - |G_{21}(\omega)|^2]^{1/2},$$

$$G_{31}(\omega) = S_{31}(\omega) / G_{11}(\omega),$$

$$G_{32}(\omega) = [S_{32}(\omega) - G_{31}(\omega) \overline{G_{21}(\omega)}] / G_{22}(\omega),$$

$$G_{33}(\omega) = [S_{33}(\omega) - |G_{31}(\omega)|^2 - |G_{32}(\omega)|^2]^{1/2}$$

$$G_{41}(\omega) = S_{41}(\omega) / G_{11}(\omega),$$

$$G_{42}(\omega) = [S_{42}(\omega) - G_{41}(\omega) \overline{G_{21}(\omega)}] / G_{22}(\omega),$$

$$G_{43}(\omega) = [S_{43}(\omega) - G_{41}(\omega) \overline{G_{31}(\omega)} - G_{42}(\omega) \overline{G_{32}(\omega)}] / G_{33}(\omega),$$

$$G_{44}(\omega) = [S_{44}(\omega) - |G_{41}(\omega)|^2 - |G_{42}(\omega)|^2 - |G_{43}(\omega)|^2]^{1/2},$$

$$G_{51}(\omega) = S_{51}(\omega) / G_{11}(\omega),$$

$$G_{52}(\omega) = [S_{52}(\omega) - G_{51}(\omega) \overline{G_{21}(\omega)}] / G_{22}(\omega),$$

$$G_{53}(\omega) = [S_{53}(\omega) - G_{51}(\omega) \overline{G_{31}(\omega)} - G_{52}(\omega) \overline{G_{32}(\omega)}] / G_{33}(\omega),$$

$$G_{54}(\omega) = [S_{54}(\omega) - G_{51}(\omega) \overline{G_{41}(\omega)} - G_{52}(\omega) \overline{G_{42}(\omega)} - G_{53}(\omega) \overline{G_{43}(\omega)}] / G_{44}(\omega),$$

$$G_{55}(\omega) = [S_{55}(\omega) - |G_{51}(\omega)|^2 - |G_{52}(\omega)|^2 - |G_{53}(\omega)|^2 - |G_{54}(\omega)|^2]^{1/2}。$$