逻辑与智能丛书

涂德辉 主编

公理集合引论

西南师范大学出版社

逻辑与智能丛书

公理集合引论

主编　涂德辉

西南师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

公理集合引论/涂德辉主编. —重庆:西南师范大学出版社,2007.1

ISBN 978-7-5621-3764-1

Ⅰ.公… Ⅱ.涂… Ⅲ.①集论②公理(数学) Ⅳ.O144

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 006981 号

逻辑与智能丛书

公理集合引论

主编 涂德辉

责任编辑:朱乃明

封面设计:王 煤

出版发行:西南师范大学出版社

地址:重庆市北碚区

网址:http://www.xscbs.com

印 刷 者:西南政法大学印刷厂

开 本:850mm×1168mm 1/32

印 张:9.5

字 数:238 千字

版 次:2007 年 2 月 第 1 版

印 次:2007 年 2 月 第 1 次印刷

书 号:ISBN 978-7-5621-3764-1

定 价:18.00 元

丛书编委会

总主编：何向东

编　委（按姓氏笔画为序）：

王　静　文　旭　邓辉文　李　红

何向东　张为群　张自力　张庆林

郭美云　唐晓嘉　涂德辉　彭自强

《逻辑与智能丛书》序

何向东

逻辑学是研究思维形式的结构及其规律以及认识事物的简单逻辑方法的科学。逻辑学作为思维科学，与人的智能的培养与提高联系极其密切。逻辑学具有全人类性、基础性、工具性与规范性，被称为人类成员都得学习与掌握的“思维的语法”。学习逻辑学，有助于培养和提高认知自学能力，有助于培养与提高理论素养，有助于培养和提高科学研究能力，有助于培养和提高思维素质。逻辑学在智力开发、思维素质的培养与提高方面，具有其他学科与课程不可替代的重要作用。当今世界，逻辑学已渗透到许多学科领域，诸如哲学、心理学、计算机科学、语言学、物理学、法学、伦理学等。许多国家，尤其是欧美发达国家对逻辑的研究和普及倾注了巨大的人力、财力、物力。20 世纪 80 年代，联合国教科文组织正式将逻辑学列为与数、理、化、天、地、生同等重要的基础学科。初见端倪的知识经济呼唤逻辑学，发展与繁荣哲学社会科学，全面推进素质教育，都迫切需要逻辑学的发展与繁荣。在提高中国公民的思维素质、思维能力和科学文化水平的过程中，逻辑学大有可为。

我校逻辑与智能研究中心成立于 2005 年 4 月，在全国逻辑学界大力支持下，发展很快，已经于 2006 年 12 月批准为重庆市重点文科研究基地。为了进一步发挥中心的作用，充分调动中心专、兼

职专家学者的科研积极性，我们决定编辑出版《逻辑与智能研究丛书》。该丛书包括学术专著、译著、教材。如同逻辑与智能研究中心聘请了若干名校外的专家学者做兼职研究人员，是一个开放性的文科研究基地一样，这套丛书也具有开放性，它面向全国学术界，吸纳逻辑学、心理学、语言哲学、认知科学、计算机科学、人工智能等学科的书稿，特别欢迎在新兴学科、交叉学科、边缘学科方面，在逻辑与智能研究方面的创新性成果。

我们坚信，在大家的共同努力下，丛书的质量和水平将不断提高，从而为逻辑学的学科建设，为全面实施素质教育，实施全面的素质教育，为发展与繁荣哲学社会科学作出应有的贡献！

二00七年一月

目录

第一章 绪 论

集合论是一门历史还不算太长的学科，本章通过对集合论的产生和发展的介绍，使读者对集合论的科学背景有一个基本的了解.

一、集合论产生的背景

集合论简称“集论”.集合论以集合为对象，用朴素直观或者公理化的方法，对集合的性质、集合之间的关系如相等、属于、包容等进行研究.其中，以公理化方法研究的集合论，被称为“公理集合论”，而用朴素直观的方法研究的集合论，则称为“朴素集合论”.

集合论是近代以来的数学家试图为微积分学奠定坚实的基础而努力的产物.在牛顿(Isaac Newton，1642～1727)和莱布尼兹(Gottfrid Wilhelm Von Leibniz，1646～1716)等人之前，人们对瞬息万变的客观现象，都只能讨论、计算它们变化的平均值，而无法得到事物在某一瞬间变化的瞬间值.例如事物的运动速度，虽然在客观世界中，大量的物体速度在某一时间段中都不是等速的，但人们无法得到物体在该时间段内每一时刻的瞬间速度，而只能依靠距离除以时间来获得在该时间段中的平均速度.这显然是不利于科学的发展的.因为人们对运动物体在该时间段内每一时刻的瞬间速度的大小、运动速度变化的规律等都无法得以了解，当然也无法去把握它们.平均速度虽然说也是物体运动的一个重要指标，但

不是决定物体运动的最重要、最根本的指标. 平均速度不能如瞬间速度那样，为人们提供物体此后运动的方向、速度的快慢趋势等. 为了解决如物体瞬间速度的这些类似问题在量方面的计算，牛顿、莱布尼兹等人创造发明了微积分的计算方法. 以对物体从静止状态开始自由下落，其下落过程中任一时刻的瞬间速度的计算为例，假定该物体从静止状态下落 t 秒后，下落的总距离为 s，那么，

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$

其中，g 为重力加速度，是一常数. 我们知道，物体从下落的那一瞬间开始，其下落的速度会越来越快，否则，人们从高处往下跳或者从万米高空返回地面也就不会有那么多的麻烦和困难了. 那么，当物体下落到时刻 t 时，它究竟以什么样的方式改变着自己的速度？或者，它在时刻 t 时，其获得的瞬间速度究竟是多大呢？

我们可以这样来考虑问题：设在时刻 t 后，物体再继续下落 h 秒，在 h 秒这段时间中的位移距离为 l，而在 $t+h$ 这段总时间中物体的位移距离设为 S，那么，一方面有

$$S=\frac{1}{2}g(t+h)^2;$$

而另一方面，有

$$\begin{aligned}l&=S-s\\&=\frac{1}{2}g(t+h)^2-\frac{1}{2}gt^2\\&=gth+\frac{1}{2}gh^2;\end{aligned}$$

现在，假设物体在时间段 h 中的平均速度为 $\bar{v}$，那么，

$$\begin{aligned}\bar{v}&=l\div h\\&=gt+\frac{1}{2}gh.\end{aligned}$$

从理论上说，上面计算所导致的结论是非常明显的：即 h 的值

越小，则越是接近物体在 t 时刻的瞬间速度. 但在该结论中所包含的逻辑矛盾也是同样的明显的：即无论 h 是如何地小，只要 h 不等于零，那么，$\bar{v}$ 就不可能是物体在 t 时刻的瞬间速度. 反之，如果 h 等于零，那么

$$\bar{v} = l \div h$$

就是一个没有意义的计算式，当然也就无法依靠它去计算物体下落到时刻 t 时的瞬间速度了.

为了摆脱这一困境，牛顿、莱布尼兹等人提出了许许多多的解决问题的方法，但就当时的科学观和方法论来说，无论如何地解释，都无法摆脱既要 h 不等于零又要 h 等于零的矛盾. 这种看来无法消除的矛盾让当时对辩证法、对新的科学、对新科学的认识方法都怀有敌意的唯心主义者们特别地高兴，其代表人物即英国的神学大主教贝克莱(George Berkeley, 1685 ~ 1753) 就说过，勉强使 h 为既不等于零又等于零的无穷小，这就是逻辑矛盾，这就是荒谬，因此，所谓的微积分完全没有合理的内容，只能是伪科学.

然而，唯心主义者们的攻击并不能阻挡科学的发展. 从科学的发展史来看，每当一门科学露出破绽，看起来不是那么完满的时候，最大的可能性之一也许就是这门科学将要飞跃发展的时候. 微积分学就是这样的科学. 莱布尼兹(Gottfried Wilhelm Von Leibniz, 1646 ~ 1716)、拉格朗日(Lagrange, 1736 ~ 1813) 和柯西(Cauchy, 1789 ~ 1857) 等人后来建立起来的极限理论，合理地解决了如 h 这样的无穷小在微积分学中的矛盾性问题，使该学科得到长足的发展.

在极限理论中，有一条可以说是至关重要的极限性质：有界单调的数列必定存在极限. 一般来说，人们通常把它看成是极限所有其他性质的基础. 那么，这条极限性质本身的真实性是如何地被证明的呢?长期以来，人们都误认为该性质的真实性是可以依赖于某些几何的性质的. 然而当人们认真地在几何学中去查找它的依据时，人们似乎才第一次惊奇地发现，在几何学的公理体系中，根本

就不讨论实数的连续和极限问题，尽管极限理论的这一基本性质若归于几何学，其连续和极限都可以在几何中得到非常明显的直观.几何学和微积分学是两个不同的学科系统，因此在几何系统中的直观性并不能代表在微积分理论系统中的逻辑必然性.至少对当时的学者们来说，明确地知道一个理论系统中某个命题的真实性，是不能依赖于另一个理论系统中某些命题的真实性去证明的.

当然，随后由戴德金(R. Dedekind,1831 ~ 1916)和康托尔(Cantor,1845 ~ 1918)等人通过重新给"实数"定义，最终在微积分理论中不依赖任何几何直观，纯逻辑地证明了极限的这一基本性质，使微积分学建立在牢固的极限理论的基础之上.并以此为契机，人们开始去追问数学的各个分支最后乃至于数学的基础，希望能证明它们都是不至于包含有逻辑矛盾的系统.在这个过程中，人们使用让理论"还原"的方法，把数学的主要分支最终都"还原"为当时的集合理论.人们预言，只要当时为人们肯定的集合理论是一个不矛盾的理论体系，那么，数学的基础就是牢固的，否则数学大厦的基础就会动摇，整个数学大厦也就会因为失去支撑而倾斜.

1902 年，英国学者罗素(Bertrand Arthur William Russell,1872 ~ 1970)宣告，在当时的集合理论中发现了一个悖论.罗素所发现的这个悖论虽然简单，却杀伤力无穷.因为，他完全以当时集合理论所允许的条件，作为悖论的构造前提，悖论的形式完全是纯集合的，但它就以这样极为简单的形式表明，在当时已经广为流行、对数学从而对整个科学具有特别重要的意义的集合理论本身是矛盾的.这无异于是一枚投向科学界的重磅炸弹，使得整个科学界为之一震，导致了数学史上最为重大的第三次数学危机.也正是这次危机，促进了集合论的迅速问世.

二、集合论的产生和发展

集合论产生之前，集合理论就已经在当时的科学界广为流行，

特别在数学界引起极大的反响. 1851 年, 在捷克人波尔察诺(Bernald Bolzano, 1781 ～ 1848) 的遗著《关于无穷的悖论》中, 1888 年,在戴得金的《什么是数》中,都对集合的问题有较为深刻的论述,为集合理论的产生和发展作出了一定的贡献. 但是,他们在集合理论中所考虑的对象毕竟都只局限在数或者函数的范围内. 为集合理论作出了特殊贡献的是康托尔. 康托尔在探讨三角级数展开式的唯一性问题的过程中,引起了对集合结构的兴趣. 不久,他敏锐地发现,他的新的研究工作具有完全独立于三角级数甚至于函数本身的重要性,并且在 1871 年到 1897 年之间,他发表了一系列论文,对集合理论进行广泛深入地论述. 在这些论述中,他把集合的元素推广应用到任意的对象上,而不再仅仅限于数和函数;他阐明了"无穷"的本质,通过区分"实无穷"和"潜无穷",构造出无限多层次的"实无穷",使每一个"实无穷"都成为一个实体,从而使之成为数学、逻辑学、哲学等研究的对象;他提出了一批关于集合理论的重要概念, 如点集拓扑、次序等;创造了对角线证明方法;在集合理论的基础上为数的概念提供了一个合理的内核等. 康托尔在集合理论方面的创造性工作,使集合的理念为人们所认可,并因此渗入到科学理论的各个系统,特别广泛地渗入到数学的各个分支,使数学界的面貌因此焕然一新. 到今天,以集合理论为基础所发展起来的集合论,成为数学几乎所有分支的基础并由此深入持久地影响着其他许多的重要学科. 由此看来,我们把康托尔称为集合理论的创始人这应该是当之无愧的.

但是,由于康托尔始终是以朴素直观的方法来整理集合方面的经验知识,那些被理论化的经验知识之间的关系始终是不确定的、处于松散的联系状态之中,因此,他所建立的集合理论一开始就有两个方面的缺陷:一是关于集合的定义的缺陷,一是关于构造合理集合的规则的缺陷. 就第一方面来说,康托尔始终认为,所谓集合,就是"我们直觉中或者理智中确定的、互不相同的事物的一

个汇集，它被设想为一个整体（单体）."在康托尔这个被后人称为描述性的定义中，"汇集"、"整体"、"单体"实际上都是集合的俗称，因此整个描述有循环定义之嫌；同时，在他的定义中带有极为浓厚的主观主义色彩，这表现在对事物的确定性等的判定，依赖的不是符合形式理论的纯客观性的标准，而是主观的意识. 另一方面的缺陷对康托尔集合理论来说是非常致命的，在康托尔的集合理论中，没有明确指出，对于已知的集合，我们究竟该可以做、如何做哪些事情才是合法的或者合乎逻辑的？仅对集合的构造来说，这个问题就是：我们可以怎么样去构造集合，所构造出来的集合才是人们能够接受的？才是合法的？才是不至于引起逻辑矛盾的？由于康托尔集合理论在上述两方面的缺陷，使得他的集合理论不能把逻辑矛盾即集合悖论排除在集合理论之外.

正因为如此，康托尔集合理论招致了以罗素悖论为首的集合悖论的重大冲击. 1902 年，罗素宣布在康托尔集合理论的基础上发现了一个集合悖论，这就表明，康托尔集合理论包含有逻辑上不可避免的逻辑矛盾.

罗素所针对的，就是康托尔集合理论中集合元素的确定性，这个"确定性"的保证应当是什么？罗素认为，如果"确定性"没有严格的条件作为保证，那么在集合的构造过程中就会引起矛盾. 如，我们给定集合 A，而能成为集合 A 的元素的集合 x 的条件是"$x \notin x$"，即

$$\forall x(x \in A \leftrightarrow x \notin x),$$

这个条件在人们的经验世界中看起来是如此的明确，由此方式所构造的集合对人们来说应当是确定无疑的，它在人们的经验世界中是非常合理的. 但现在罗素提出的问题在于：既然对 x 的要求仅仅需要的是集合，那么当然也应当考虑集合 A 的归属，即集合 A 是否属于我们所构造的这个集合？当时的集合理论和逻辑理论在这里联合起来同人们开了一个玩笑，因为，如果集合 A 属于集合 A，

则由 A 集元素应满足的条件来看，A 不能属于 A. 即

$$A \in A \Rightarrow A \notin A,$$

但如果集合 A 不能属于集合 A，同样由 A 集元素应满足的条件来看，A 属于 A，即

$$A \notin A \Rightarrow A \in A,$$

这显然是一个无法消解的矛盾. 它否定了集合理论中都存在的集合元素的确定性这一性质. 当然，这并不是说这一性质不重要、不必要. 它实际上表明，即使满足集合元素条件的明确性，这些元素汇集在一起也不一定能构造出合理的集合来. 如果我们不加分析地接受这样的集合，最终就会在集合理论中引发混乱、引发逻辑矛盾，使整个集合理论毁于一旦.

尽管罗素悖论对数学界、逻辑界乃至整个科学界的冲击是如此的巨大，但科学家伟大的历史责任感和探求真理的坚忍不拔的精神在此刻表现出更为巨大的力量. 为了克服集合理论在初创阶段中的种种不足，为了完善集合理论本身，1908 年，德国人策梅罗(Ernst Zermelo，1871 ～ 1953) 首先为集合理论设立了一套较为完整的公理，其目的就是要明确规定对我们所讨论的对象集合来说，我们可以、应该和能够做哪些事情才是正确的，才不至于在集合理论中导致悖论的出现. 策梅罗的工作标志着集合论的问世，他的这些公理后来经过弗兰克尔(Abraham Fraenkel，1891 年 ～ 1965 年) 和斯柯林(Thoralf Skolem，1887 ～ 1963) 的严格解释和少许改进，成为现在的两个最为著名的公理集合论系统中的一个，即 ZF 公理体系. 稍后，由纽曼(Von Neumann，1801 ～ 1890)、伯雷(P. Bernays，1888 ～ 1977) 和哥德尔(Kurt Gödel，1906 ～ 1978) 等人建立了 GB 公理系统. 在这些系统中，集合悖论都相应的被排除了. 而在集合论公理化体系的不断改进过程中，随着选择公理和连续统假设的研究和应用，大大地推进了集合论的发展，使之最终成为 20 世纪最为活跃也最为重要的学科之一. 至于康托尔集合理