高等院校精品课系列教材

高等院校经济数学系列教材

名品

概率论

习题集

何其祥　主编

随书附赠

上海财经大学出版社

高等院校精品课系列教材
高等院校经济数学系列教材

概率论习题集

何其祥　主编

上海财经大学出版社

目 录

第一章

随机事件与概率

§1.1 内容概述与基本要求

一、随机试验和随机事件

1. 随机现象

在基本条件不变的情况下,一系列试验或观察会得到各种不同的结果,就某一次试验或观察而言,可能出现这种结果,也可能出现那种结果,事先无法确定,呈现出一种偶然性,这种现象称为**随机现象**。概率论是研究随机现象的数量规律的学科。

2. 随机试验

对随机现象某一特征的试验或观察,称为**随机试验**,简称**试验**,记为 T.随机试验必须满足下列条件:

(1)试验可以在相同的条件下重复进行;

(2)试验之前能确定所有可能的结果;

(3)试验之前不能确定将会出现所有可能结果中的哪一个.

3. 样本点与样本空间

随机试验的每一可能结果称为**样本点**,用 ω 表示.

样本点全体组成的集合称为**样本空间**,用 Ω 表示.

4. 随机事件

由若干个样本点组成的集合或样本空间的某个子集,称为**随机事件**,简称**事件**,用 A,B,C,A_i,B_j,…等大写拉丁字母表示。

在某次试验中,若事件 A 中的某个样本点出现,则称 A **发生**.

样本空间 Ω 包含了所有的样本点,在每次试验中它总发生,因此 Ω 就是**必然事件**,空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点,在每次试验中它总不发生,因此 $\varnothing$ 即为**不可能事件**.

二、事件的关系与运算

1. 包含关系

若事件 A 的每一个样本点都属于事件 B,则称 A **包含于** B,或 B **包含** A,记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$,这时事件 A 的发生必然导致 B 的发生。

2. 相等事件

如果同时成立 $A\subset B$ 和 $B\subset A$,则称事件 A 与事件 B **等价**,或 A **等于** B,记为 $A=B$。此

时 A 与 B 表示同一个事件，它们所包含的样本点完全相同。

3. 不相容事件

若在任何一次试验中，事件 A 与 B 都不可能同时发生，则称事件 A 与 B **互不相容**，或 A 与 B **互斥**。若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，则称这 n 个事件互不相容。若可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 两两互不相容，则称 $A_1,A_2,\cdots$ 互不相容。

4. 交(积)

由同时属于事件 A 与 B 的样本点组成的集合称为 A 与 B 的**交(或积)**，记为 $A\cap B$ 或 AB，事件 AB 表示 A 与 B 同时发生。事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交事件记为 $A_1A_2\cdots A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$，它由同时属于 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的样本点组成，表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生。对可列个事件，定义 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i \overset{\Delta}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$.

事件 A 与 B 互不相容即 $AB=\varnothing$. n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容，即 $A_iA_j=\varnothing(i,j=1,2,\cdots,n,i\neq j)$；可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 互不相容，即 $A_iA_j=\varnothing(i,j=1,2,\cdots,i\neq j)$.

5. 并

由至少属于事件 A 与 B 中的一个样本点组成的集合称为 A 与 B 的**并**，记为 $A\cup B$，事件 $A\cup B$ 表示 A 与 B 中至少有一个发生，如果 A 与 B 互不相容，则称它们的并为**和**，记为 $A+B$. 事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，它由至少属于 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的一个样本点组成，表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少发生一个。如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容，则称它们的并为和，记为 $A_1+A_2+\cdots+A_n$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$. 对可列个事件，定义 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i \overset{\Delta}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$. 若 $A_1,A_2,\cdots$ 互不相容，则称它们的并为和，记为 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

6. 逆事件

由不属于 A 的样本点组成的集合称为事件 A 的**逆事件**或**对立事件**，记为 $\overline{A}$，$\overline{A}$ 表示事件 A 不发生。

注意：对立事件一定互不相容，但互不相容的事件不一定互为对立事件。

7. 差事件

由属于事件 A 而不属于 B 的样本点组成的集合称为事件 A 与 B 的**差**，记为 $A-B$，事件 $A-B$ 表示 A 发生而 B 不发生。显然，$A-B=A\overline{B}=A-AB$.

事件运算的顺序是：首先进行逆的运算，再进行交的运算，最后才进行并或差的运算。

由于事件本质上是集合，所以事件之间的关系与运算和集合之间的关系与运算相类似，两者的对应关系见表 1—1。

表 1—1

符号	概率论	集合论
Ω	样本空间(必然事件)	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
ω	样本点	元素
A	事件	子集

续表

符号	概率论	集合论
$A\subset B$	事件 A 的发生必然导致 B 的发生	A 是 B 的子集
$A=B$	事件 A 与 B(等价)相等	A 与 B 相等
$AB=\varnothing$	事件 A 与 B 互不相容	A 与 B 没有公共的元素
$A\cap B$	事件 A 与 B 同时发生	A 与 B 的交
$A\cup B$	事件 A 与 B 中至少发生一个	A 与 B 的并
$\overline{A}$	事件 A 的逆事件(对立事件)	A 的余集
$A-B$	事件 A 发生而 B 不发生	A 与 B 的差

事件之间的关系与运算 $A\subset B$,$AB=\varnothing$,$A\cap B$,$A\cup B$,$\overline{A}$,$A-B$ 可以用 Venn 图直观地表示。

8. 事件之间的运算法则

事件之间的运算满足以下法则:

(1)**交换律** $A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$;

(2)**结合律** $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3)**分配律** $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

(4)**德莫根(De Morgan)定理** $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$,$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

分配律和德莫根定理可以推广到有限个甚至可列个事件:

分配律:$(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)B=\bigcup_{i=1}^{n}A_iB$,$(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)\cup B=\bigcap_{i=1}^{n}(A_i\cup B)$,

$$(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)B=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_iB,\ (\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i)\cup B=\bigcap_{i=1}^{\infty}(A_i\cup B).$$

德莫根定理:$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}$,$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$;

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A_i},\ \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}.$$

三、概率的定义与性质

1. 频率稳定性及概率的统计定义

对于随机事件 A,若在 n 次试验中发生了 μ_n 次,则称 $F_n(A)=\frac{\mu_n}{n}$ 为 A 在 n 次试验中出现的**频率**.

在一次试验或观察中,事件 A 是否发生是偶然的。但在大量重复试验中,A 出现的频率总在某个固定常数附近摆动,而且一般来说,试验次数越多,摆动的幅度越小,这一现象称为**频率稳定性**.

在频率稳定性中,频率 $F_n(A)$ 的稳定值称为 A 发生的概率,以 $P(A)$ 表示,称这一定义为**概率的统计定义**,它度量了事件 A 发生的可能性大小。

2. 古典概型和概率的古典定义

(1)古典概型

古典概型是指具有以下两个特征的一类特殊概率模型:

(i)试验的全部可能结果只有有限个,即样本空间只含有限个样本点,$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$,$n$ 为有限正整数;

(ii)每个样本点出现的可能性相同,即 $P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)=\frac{1}{n}$.

(2)概率的古典定义

$$P(A)=\frac{A\text{ 包含的样本点数}}{\text{样本点总数}}$$

在利用上述定义计算事件的概率时,经常用到两条基本原理,即**乘法原理**和**加法原理**,以及排列和组合的基本公式。

乘法原理:设完成某件事须经过 m 个步骤,其中完成第 i 个步骤有 $n_i(i=1,2,\cdots,m)$ 种方法,则完成该事情总共有 $n_1\cdot n_2\cdot\cdots\cdot n_m$ 种方法。

加法原理:设完成某件事有 m 种方式,而第 i 种方式有 $n_i(i=1,2,\cdots,m)$ 种方法,则完成该事情总共有 $n_1+n_2+\cdots+n_m$ 种方法。

排列:(i)从 n 个不同的元素中有放回地任意取出 r 个,按照一定的次序进行排列,不同的排列数为 n^r.

(ii)从 n 个不同的元素中不放回地任意取出 r 个,按照一定的次序进行排列,不同的排列数为 $P_n^r=n(n-1)\cdots(n-r+1)$.

组合:从 n 个不同的元素中不放回地任意取出 r 个组成一组,不考虑元素之间的顺序,不同的组合数有 $C_n^r=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$.

3. 几何概率

记 A_D 为事件"在区域 Ω 中随机地取一点,而该点落入子区域 D 中",称 $P(A_D)=\frac{D\text{ 的测度}}{\Omega\text{ 的测度}}$为**几何概率**。区域 Ω 和 A_D 可以是一维的,也可以是高维的。其中的测度是一个广义的概念,可以指长度、面积、体积等。与概率的古典定义类似,几何概率也是通过等可能性来定义的,这里的等可能性是指:随机选取的点落入区域 D 的概率与 D 的测度成正比,而与 D 的位置、形状无关。

4. 概率的公理化定义

设 Ω 是随机试验 T 的样本空间,对 T 的每个随机事件 A,都对应一个实数 $P(A)$,满足如下条件:

(1)**(非负性)**对任意事件 A,有 $P(A)\geqslant 0$;

(2)**(规范性)**$P(\Omega)=1$;

(3)**(可列可加性)**设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$是互不相容的事件,则

$$P(\sum_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i),$$

则称 P 为**概率**。

在这一定义中,概率是事件的函数,并没有给出具体的计算公式。

概率具有以下性质

性质 1 $P(\varnothing)=0$.

性质 2 **(有限可加性)**若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容,则

$$P(\sum_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

性质 3　对任何事件 A，有 $P(A)=1-P(\overline{A})$.

性质 4　如果 $A\supset B$，则

$$P(A-B)=P(A)-P(B),P(A)\geqslant P(B).$$

性质 5　**(概率的加法定理)**对任何两个事件 A,B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

一般地，设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件，成立

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)$$
$$-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

四、条件概率与乘法定理

1. 条件概率

设 A 与 B 为两个事件，若 $P(B)>0$，则称 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$为事件 B 发生的条件下事件 A 发生的**条件概率**。

一般情况下，条件概率不等于无条件概率。

对于固定的 B，条件概率 $P(A|B)$满足概率公理化定义的三个条件，即条件概率仍然是概率，从而条件概率具有概率的所有性质。

2. 概率的乘法定理

若 $P(A)>0$，则 $P(AB)=P(A)P(B|A)$；

若 $P(B)>0$，则 $P(AB)=P(B)P(A|B)$；

一般地，如果 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则

$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$.

五、全概率公式和贝叶斯公式

1. 样本空间的分割

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$为事件，满足

(i)$A_iA_j=\varnothing,P(A_i)>0,i\neq j,i,j=1,2,\cdots$；

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty}A_i=\Omega$，

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$为样本空间 Ω 的分割。

2. 全概率公式

设 $A_1,A_2,\cdots A_n,\cdots$为样本空间 Ω 的一个分割，B 为任意事件，则

$$P(B)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)P(B\mid A_i).$$

3. 贝叶斯公式

设 $A_1,A_2,\cdots A_n,\cdots$为样本空间 Ω 的一个分割，B 为任意满足 $P(B)>0$ 事件，则

$$P(A_j \mid B)=\frac{P(A_j)P(B \mid A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i)P(B \mid A_i)},j=1,2,\cdots.$$

在全概率公式和贝叶斯公式中，通常将事件 B 理解为某一试验的结果，而将 $A_1,A_2,\cdots$ 理解为导致 B 发生的“可能原因”，因此贝叶斯公式反映了该结果(B)是由各原因引起的可能性大小的认识。

六、事件的独立性

1. 两个事件的独立性

(1)定义

设事件 A,B 满足 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称**事件 A,B 相互独立.**

(2)性质

若事件 A,B 相互独立，则下列三对事件均相互独立：

$$A\text{ 与 }\overline{B},\overline{A}\text{ 与 }B,\overline{A}\text{ 与 }\overline{B}.$$

2. 三个事件的独立性

设 A,B,C 为三个事件，若下列四个式子同时成立：

$$\begin{cases}P(AB)=P(A)P(B)\\P(BC)=P(B)P(C)\\P(AC)=P(A)P(C)\\P(ABC)=P(A)P(B)P(C)\end{cases},$$

则称 A,B,C **相互独立**。

若 A,B,C 相互独立，则 A,B,C 两两相互独立，即上述前三个等式成立；反之，不一定成立。

3. n 个事件的独立性

(1)定义

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件，若对于任意 k 个事件 $A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{ik}$，成立

$$P(A_{i1}A_{i2}\cdots A_{ik})=P(A_{i1})P(A_{i2})\cdots P(A_{ik}),$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **相互独立**.

(2)性质

(i)若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则其中任意少于 n 个事件也相互独立。

(ii)若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则 $\hat{A}_1,\hat{A}_2,\cdots,\hat{A}_n$ 也相互独立，其中 $\hat{A}_i$ 为 A_i 或 $\overline{A}_i$，$i=1,2,\cdots,n$.

(iii)若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则 $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n)$.

七、贝努利概型

1. 若试验 $T_1,T_2,\cdots,T_n$ 满足以下条件：

(i) $T_1,T_2,\cdots,T_n$ 相互独立；

(ii)每次试验都只有两个可能的结果：A 和 $\overline{A}$；

(iii)每次试验中，$p=P(A)$ 从而 $q=1-p=P(\overline{A})$ 保持不变，

则称 $T_1,T_2,\cdots,T_n$ 为 n **重贝努利试验或贝努利概型.**

2. **定理**　在 n 重贝努利试验中，事件 A 恰好出现 k 次的概率为

$$b(k;n,p)=C_n^k p^k q^{n-k},k=0,1,\cdots,n.$$

其中，$p=P(A)$，$q=1-p=P(\overline{A})$，且 $\sum_{k=0}^{n}b(k;n,p)=1$.

本章的基本要求是了解随机现象与随机试验，了解样本空间的概念。理解随机事件的概念，掌握随机事件之间的关系与运算。了解事件频率及频率稳定性的概念，了解概率的统计定义，理解概念的古典定义和几何概念的定义，会计算古典概率和几何概率。了解概率的公理化定义，了解概率的性质。了解条件概率的概念、概率的乘法定理、全概率公式和贝叶斯公式，会应用它们解决一般的问题。理解事件独立性的概念，并会用独立性解决一般的问题。了解贝努利概型，并能运用这一概型解决有关概率的计算问题。

§1.2　典型例题

例 1　写出下列随机试验的样本空间：

(1)掷一枚均匀的骰子两次，观察两次出现的点数之和；

(2)箱子中有标号为 1,2,3 的 3 件产品，不放回地接连抽取产品，直到取到 1 号产品；

(3)10 件产品中有 6 件正品、4 件次品，有放回地每次任取一件，直到次品全部取出，记录抽取的次数；

(4)口袋中装有若干个红球、白球和蓝球，从中任取 4 只，观察球的颜色；

(5)将 A、B 两封信任意投入三个邮筒内，观察信的分布情况；

(6)在单位圆内任选两点，观察这两点的距离；

(7)观察某地一天内的最高气温和最低气温(假定最高气温不高于 C_1，最低气温不低于 C_2).

(8)在半径为 R 的圆周上任投 A,B,C 三点，考察所得三段弧的长度。

解　(1)骰子两次出现的点数之和最小为 2，最大为 12，故样本空间为

$$\Omega_1=\{2,3,\cdots,12\}.$$

(2)1 号产品可能在第一、第二或第三次被抽到，因此样本空间为

$$\Omega_2=\{(1),(2,1),(3,1),(2,3,1),(3,2,1)\}.$$

(3)为取出全部次品，最少需抽 4 次，由于采用有放回的抽样，无法确定抽样次数的上界，因此样本空间为

$$\Omega_3=\{4,5,\cdots\}.$$

(4)以 r,w,b 分别表示红色、白色和蓝色，rw 表示红、白两种颜色，rb 表示红、蓝两种颜色，wb 表示白、蓝两种颜色，rwb 表示红、白、蓝三种颜色，于是样本空间为

$$\Omega_4=\{r,w,b,rw,rb,wb,rwb\}.$$

(5)记样本点为(x_1,x_2,x_3)，x_i 为 A、B、AB、0 分别表示第 i 个邮筒内放入了信件 A、信件 B、同时放入信件 A 及信件 B，没有放入信件，则样本空间为

$$\Omega_5=\{(A,B,0),(A,0,B),(B,A,0),(B,0,A),(0,A,B),\\(0,B,A),(AB,0,0),(0,AB,0),(0,0,AB)\}.$$

(6)设两点的坐标分别为(x_1,y_1)和(x_2,y_2)，则样本空间为

$$\Omega_6=\{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\mid x_1^2+y_1^2<1,x_2^2+y_2^2<1\}.$$

(7)设样本点为(x,y)，其中 x,y 分别表示最低气温和最高气温，则样本空间为

$$\Omega_7=\{(x,y)\mid C_1\leqslant x<y\leqslant C_2\}.$$

(8)设三段弧的长度分别为 x,y,z，样本空间为

$$\Omega_8=\{(x,y,z)\mid x>0,y>0,z>0,x+y+z=2\pi R\}.$$

例 2 在篮球比赛中，一选手连续投篮三次，记 A_i 为第 $i(i=1,2,3)$ 次投中的事件，用 A_1,A_2,A_3 表示下列事件：

(1)第三次没投中；

(2)第一次投中，后两次均未投中；

(3)恰好一次投中；

(4)至少有一次投中；

(5)恰好有两次投中；

(6)至多一次投中；

(7)至少有两次投中；

(8)三次中至多两次投中。

解 (1)$\overline{A}_3$.

(2)$A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

(3)$A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.

(4)$A_1\cup A_2\cup A_3$.

(5)$A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$.

(6)$\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.

(7)$A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3+A_1A_2A_3$，或 $A_1A_2\cup A_2A_3\cup A_1A_3$.

(8)$\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3+A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$，或$\overline{A_1A_2A_3}$.

例 3 指出下列关系中哪些成立？哪些不成立？

(1)$A\cup B=A\overline{B}\cup B$；

(2)$(\overline{A\cup B})C=\overline{A}\overline{B}\overline{C}$；

(3)若 $A\subset B$，则 $A=AB$；

(4)若 $A\subset B$，则 $\overline{B}\subset\overline{A}$；

(5)若 $AB=\varnothing$，且 $C\subset A$，则 $BC=\varnothing$；

(6)$(AB)(A\overline{B})=\varnothing$；

(7)$\overline{A}B=A\cup B$.

解 (1)成立。$A\overline{B}\cup B=(A\cup B)\cap(\overline{B}\cup B)=(A\cup B)\cap\Omega=A\cup B$.

(2)不成立。$(\overline{A\cup B})C$ 发生，即$\overline{A\cup B}$发生且C 发生，C 发生则$\overline{C}$ 不发生，所以 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 也不发生。因此，$(\overline{A\cup B})C\neq\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

(3)成立。首先，显然有 $AB\subset A$，其次，若 A 发生，由于 $A\subset B$，则 B 必发生，即 $A\subset AB$，从而 $A=AB$.

(4)成立。因为 $A\subset B$，所以 A 的每个样本点都属于 B，从而 $\overline{B}$ 的每个样本点都属于 $\overline{A}$，即 $\overline{B}\subset\overline{A}$.

(5)成立。由于 $C\subset A$，因此 $BC\subset AB=\varnothing$，但另一方面，显然成立 $\varnothing\subset BC$，所以 $BC=\varnothing$.

(6)成立。$(AB)(A\overline{B})=A(B\overline{B})=A\varnothing=\varnothing$.

(7)不成立。若 $\overline{A}B=A\cup B$，则 $A\overline{A}B=A(A\cup B)$，即 $\varnothing=A\cup AB=A$，矛盾.

例 4 任取一整数 N，求 N^3 的最后两个数字均为 1 的概率.

解　记 A 为“N^3 的最后两个数字均为 1”的事件.将 N 写成 $N=a+10b+\cdots$，其中 $a,b,\cdots$ 可以取 0,1,…,9 中的任意值.由于

$$N^3=a^3+30a^2b+\cdots=a^3+10\cdot 3a^2b+\cdots$$

因此 N^3 的最后两个数字仅由 a 和 b 决定，从而样本点总数 $n=10\cdot 10=100$.因为 N^3 的最后一个数字为 1，所以 $a^3=1$ 即 $a=1$.而 $\frac{N^3-1}{10}=3b+\cdots$ 的最后一个数字亦应为 1，即 $3b$ 由 1 结尾，此时 b 只能为 7，从而 $m(A)=1\cdot 1$，所求概率 $P(A)=\frac{m(A)}{n}=0.01$.

例 5　从 1,2,…,10 共 10 个数字中有放回地每次任取一个，共取 7 次，试求下列事件的概率：

(1)A_1：7 个数字全不相同；

(2)A_2：7 个数字中不含 1 与 10；

(3)A_3：10 恰好出现两次；

(4)A_4：10 至少出现两次.

解　(1)由于采用有放回的抽取，因此样本点总数为 10^7，7 个数字全不相同(A_1)的样本点数为 P_{10}^7，因此

$$P(A_1)=\frac{P_{10}^7}{10^7}.$$

(2)7 个数字中不含 1 与 10，则 7 次都只能在 2,…,9 中抽取，A_2 的样本点数为 8^7，因此

$$P(A_2)=\frac{8^7}{10^7}.$$

(3)10 恰好出现两次，必须有某两次取到 10，而另外 5 次不取 10，于是 A_3 的样本点数为 $C_7^2\cdot 9^5$，因此

$$P(A_3)=\frac{C_7^2\cdot 9^5}{10^7}.$$

(4)与(3)同理，10 恰好出现 k 次的概率为

$$p_k=\frac{C_7^k\cdot 9^{7-k}}{10^7},$$

从而

$$P(A_4)=\sum_{k=2}^{7}p_k=\sum_{k=2}^{7}\frac{C_7^k\cdot 9^{7-k}}{10^7}.$$

例 6　从 1～9 这九个正整数中，有放回地取三次，每次任取一个，求所得的三个数之积能被 10 整除的概率。

解　所取出的三个数的乘积能被 10 整除，这三个数中必须有 5 和偶数。记 A 为取出的三个数中含有 5 的事件，B 为取出的三个数中含有偶数的事件，所得的三个数之积能被 10 整除即为 AB，故所求概率为

$$\begin{aligned}P(AB)&=1-P(\overline{AB})=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})\\&=1-[P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\overline{B})]\\&=1-\left(\frac{8}{9}\right)^3-\left(\frac{5}{9}\right)^3+\left(\frac{4}{9}\right)^3\approx 0.214.\end{aligned}$$

例 7　某城市发行 A,B,C 三种报纸。经统计，订阅 A 报纸的有 45%的住户，订阅 B 报

纸的有 35%的住户，订阅 C 报纸的有 30%的住户，同时订阅 A 报纸与 B 报纸的有 10%的住户，同时订阅 A 报纸与 C 报纸的有 8%的住户，同时订阅 B 报纸与 C 报纸的有 5%的住户，同时订阅 A 报纸、B 报纸和 C 报纸的有 3%的住户，试求下列事件的概率：

(1)只订阅 A 报纸；

(2)只订阅一种报纸；

(3)正好订阅两种报纸；

(4)至少订阅一种报纸；

(5)不订阅任何报纸；

(6)至多订阅一种报纸.

解 (1)
$$\begin{aligned}P(A\bar{B}\bar{C})&=P(A\bar{B}-C)=P(A\bar{B})-P(A\bar{B}C)=P(A-B)-P(AC-B)\\&=P(A)-P(AB)-[P(AC)-P(ABC)]=0.45-0.1-(0.08-0.03)\\&=0.3.\end{aligned}$$

(2)与(1)类似，可求得
$$\begin{aligned}P(\bar{A}\bar{B}C)&=P(\bar{A}C-B)=P(\bar{A}C)-P(\bar{A}BC)\\&=P(C)-P(AC)-[P(BC)-P(ABC)]\\&=0.3-0.08-(0.05-0.03)=0.2.\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}P(\bar{A}B\bar{C})&=P(\bar{A}B-C)=P(\bar{A}B)-P(\bar{A}BC)\\&=P(B)-P(AB)-[P(BC)-P(ABC)]\\&=0.35-0.1-(0.05-0.03)=0.23.\end{aligned}$$

从而只订阅一种报纸的概率为
$$P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}C)+P(\bar{A}B\bar{C})=0.3+0.2+0.23=0.73.$$

(3)正好订阅两种报纸的概率为
$$\begin{aligned}P(AB\bar{C})+P(A\bar{B}C)+P(\bar{A}BC)&=P(AB-C)+P(AC-B)+P(BC-A)\\&=[P(AB)-P(ABC)]+[P(AC)-P(ABC)]+[P(BC)-P(ABC)]\\&=P(AB)+P(AC)+P(BC)-3P(ABC)\\&=0.1+0.08+0.05-3\cdot 0.03=0.14.\end{aligned}$$

(4)至少订阅一种报纸的概率为
$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=0.45+0.35+0.3-0.1-0.08-0.05+0.03=0.9.\end{aligned}$$

(5)不订阅报纸的概率为
$$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=1-P(A\cup B\cup C)=1-0.9=0.1.$$

(6)由(2)及(5)的结果，至多订阅一种报纸的概率为
$$P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}C)+P(\bar{A}B\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=0.73+0.1=0.83.$$

例 8 从 $1,2,\cdots,N$ 中每次有放回地任取一数，共取 $k(1\leqslant k\leqslant N)$ 次，求下列事件的概率：

(1)A：k 个数字全不相同；

(2)B：不含 $1,2,\cdots,N$ 中指定的某 r 个数字；

(3)C：某指定的一个数字恰好出现 $m(m\leqslant k)$ 次；

(4)D：k 个数字中的最大数为 $M(1\leqslant M\leqslant N)$；

(5)E：k 个数字严格上升.

解 从数字 $1,2,\cdots,N$ 中有放回地取 k 个数字，共有 N^k 中取法，即样本点总数为 N^k.

(1)由于要求取出的 k 个数字全不相同，所以 A 的样本点数为 P_N^k，因此

$$P(A)=\frac{P_N^k}{N^k}.$$

(2)取出的 k 个数字中不含某指定的 r 个数字，则只能在剩下的 $N-r$ 个数字中有放回地取 k 个数，因而 B 的样本点数为 $(N-r)^k$，因此

$$P(B)=\frac{(N-r)^k}{N^k}.$$

(3)某指定的一个数字在 k 个数字中重复出现 k 次，可以是 k 次中的任意 m 次，共有 C_k^m 种选法，而其余的 $k-m$ 次中均取自剩下的 $N-1$ 个数字，因此事件 C 的样本点数为 $C_k^m\cdot(N-1)^{k-m}$，因此

$$P(C)=\frac{C_k^m\cdot(N-1)^{k-m}}{N^k}.$$

(4)从 $1,2,\cdots,N$ 中有放回地取 k 个数字，最大数不大于 M 的取法共有 M^k 种(这是因为只能从 $1,2,\cdots,M$ 中有放回地取 k 个数字)，而最大数不大于 $M-1$ 的取法共有 $(M-1)^k$ 种，因此事件 D 的样本点数为 $M^k-(M-1)^k$，从而

$$P(D)=\frac{M^k-(M-1)^k}{N^k}.$$

(5)k 个数字按严格上升的次序排列，自然全不相同，共有 C_N^k 种取法，其中只有一种是按严格上升次序排列的，因此事件 E 的样本点数为 C_N^k，从而

$$P(E)=\frac{C_N^k}{N^k}.$$

例 9　从 $(0,1)$ 中随机地取两个数，求下列事件的概率：

(1)两数之和小于 1.2；

(2)两数之积小于 $\frac{1}{4}$；

(3)上述两个条件同时满足。

解　记 $(0,1)$ 中取出的两个数为 x,y，则 $\Omega=\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<1\}$.

(1)如图 1—1 所示，取出的两数之和小于 1.2 的概率为

$$p_1=\frac{\text{多边形 } ABEFD \text{ 的面积}}{\text{正方形 } ABCD \text{ 的面积}}=\frac{1-\frac{1}{2}\times0.8\times0.8}{1}=0.68.$$

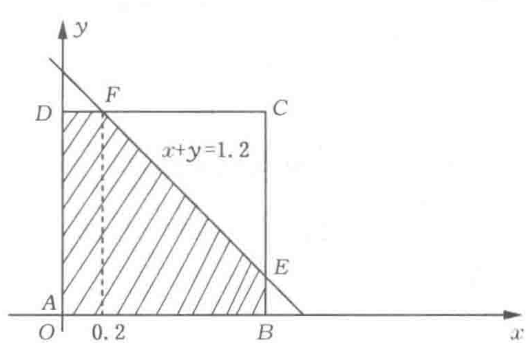

图 1—1

(2)如图 1—2 所示,双曲线 $xy=\frac{1}{4}$ 与 BC 交点的坐标为 $\left(1,\frac{1}{4}\right)$,与 DC 的交点坐标为 $\left(\frac{1}{4},1\right)$,因此取出的两数乘积小于 $\frac{1}{4}$ 的概率为

$$p_2=\frac{\frac{1}{4}\times 1+\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{4x}\mathrm{d}x}{1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ln x\Big|_{\frac{1}{4}}^{1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ln 4.$$

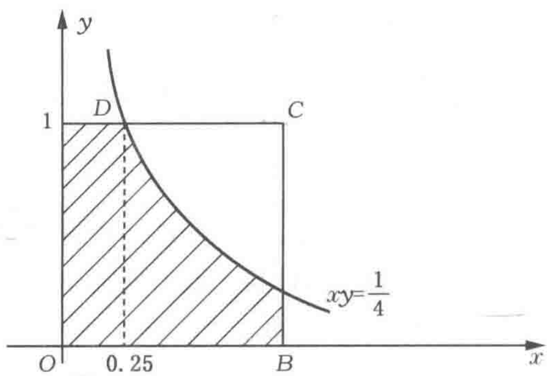

图 1—2

(3)如图 1—3 所示。

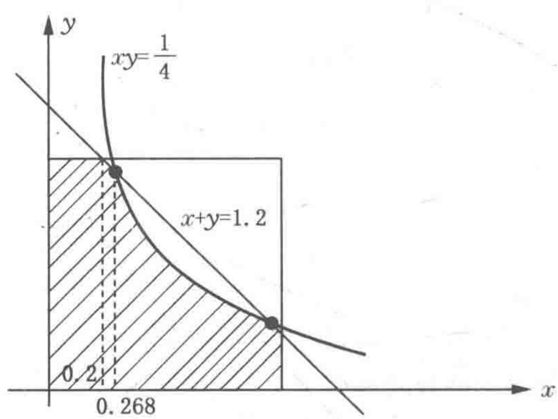

图 1—3

解方程组

$$\begin{cases}x+y=1.2\\ xy=\frac{1}{4}\end{cases},$$

不难得到直线 $x+y=1.2$ 与双曲线 $xy=\frac{1}{4}$ 的交点坐标为

$$\begin{aligned}(x_1,y_1)&=(0.6+0.1\sqrt{11},0.6-0.1\sqrt{11})\\&=(0.932,0.268),\\(x_2,y_2)&=(0.6-0.1\sqrt{11},0.6+0.1\sqrt{11})\\&=(0.268,0.932),\end{aligned}$$

所求概率为

$$p_3=0.2\times1+\int_{0.2}^{0.268}(-x+1.2)\mathrm{d}x+\int_{0.268}^{0.932}\frac{1}{4x}\mathrm{d}x+\int_{0.932}^{1}(-x+1.2)\mathrm{d}x$$

$$=0.2+\left(-\frac{1}{2}x^2+1.2x\right)\Big|_{0.2}^{0.268}+\frac{1}{4}\ln x\Big|_{0.268}^{0.932}+\left(-\frac{1}{2}x^2+1.2x\right)\Big|_{0.932}^{1}$$

$$=0.2+0.065\,7+0.311\,6+0.016=0.593.$$

例 10　在长为 a 的线段的中点的两边随机选取两点，求两点间的距离小于$\frac{a}{3}$的概率.

解　以 x 表示中点左边所取的点到线段左端点的距离，y 表示中点右边所取的点到线段左端点的距离，则 $0<x<\frac{a}{2}$，$\frac{a}{2}<y<a$，这样的(x,y)构成了 $O-xy$ 平面上的区域

$$\Omega=\{(x,y)\mid 0<x<\frac{a}{2},\frac{a}{2}<y<a\}.$$

所取两点间的距离小于$\frac{a}{3}$，这样的(x,y)构成的区域为 $D=\{(x,y)\mid(x,y)\in\Omega,y-x<\frac{a}{3}\}$，如图 1—4 所示，由几何概率的定义，所求概率为

$$p=\frac{D\text{ 的面积}}{\Omega\text{ 的面积}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{6}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}a-\frac{a}{2}\right)}{\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}}=\frac{2}{9}.$$

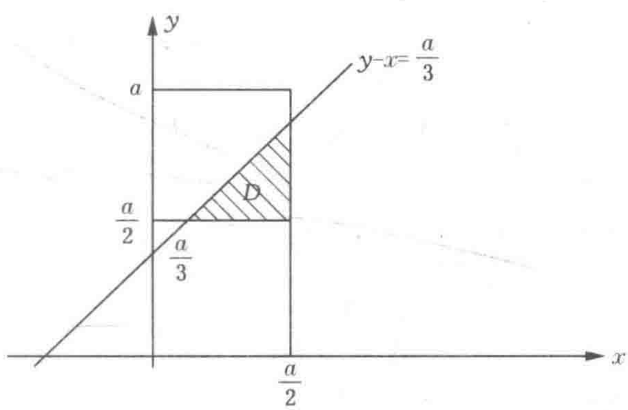

图 1—4

例 11　有 n 个人各填写了一份登记表，并交一张照片，现把登记表和照片任意地装入 n 个写有姓名的档案袋中（每袋只允许装一份表格和一张照片），求没有一袋的登记表及照片装对的概率。

解　记 A_i 为“第 i 份登记表和照片装对档案袋”的事件$(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$P(A_i)=\frac{(n-1)!\ \cdot1}{n!}=\frac{1}{n},$$

$$P(A_iA_j)=\frac{(n-2)!\ \cdot1\cdot1}{n!}=\frac{1}{P_n^2}(i\neq j),$$

$$\cdots\cdots$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=\frac{1}{n!},$$

因而所求概率为

$$
\begin{aligned}
&1-P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\\
&=1-\Big(\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)\Big)\\
&=1-\left(C_n^1\frac{1}{n}-C_n^2\frac{1}{P_n^2}+\cdots+(-1)^{n-1}C_n^n\frac{1}{P_n^n}\right)\\
&=1-\left(1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\right)\\
&=1-\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}}{j!}.
\end{aligned}
$$

例 12 为防止意外，某公司同时装了 A，B 两套报警系统。每套系统单独使用时，系统 A 能正确报警的概率为 0.95，系统 B 能正确报警的概率为 0.96.在系统 A 失灵的条件下，系统 B 正常报警的概率为 0.8，求：

(1)两套系统同时启用时能正确报警的概率；

(2)在系统 B 失灵的条件下，系统 A 能正确报警的概率。

解 记 A、B 分别为系统 A、B 能正确报警的事件，则

$$P(A)=0.95,\qquad P(B)=0.96,\qquad P(B|\overline{A})=0.8.$$

(1)两套系统同时使用时能正确报警的事件即为 $A\cup B$，所求概率为

$$
\begin{aligned}
P(A\cup B)&=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\overline{A}\overline{B})=1-P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A})\\
&=1-[1-P(A)][1-P(B|\overline{A})]\\
&=1-(1-0.95)(1-0.8)=0.99.
\end{aligned}
$$

(2)系统 B 失灵的条件下系统 A 能正确报警的概率为

$$
\begin{aligned}
P(A|\overline{B})&=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}\\
&=\frac{P(A)-[P(A)+P(B)-P(A\cup B)]}{1-P(B)}\\
&=\frac{P(A\cup B)-P(B)}{1-P(B)}=\frac{0.99-0.96}{1-0.96}=0.75.
\end{aligned}
$$

例 13 盒子中装有 20 个同样规格的零件，其中 16 个一等品，4 个二等品，用不放回抽样接连取三次，每次取一个，求第三次才取到一等品的概率。

解 记 A_i 为第 i 次取到一等品的事件($i=1,2,3$)，则“第三次才取到一等品”即为 $\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$，所求概率为

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{4}{20}\cdot\frac{3}{19}\cdot\frac{16}{18}=\frac{8}{285}.$$

例 14 某公司生产的产品以 100 件为一批，假定每批产品中的次品不超过 4 件，且有如下的概率分布：

一批产品中的次品数	0	1	2	3	4
概　率	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

现进行抽样检验，从每批产品中随机抽取 10 件进行检验。若发现其中有次品，即认为该批产