高校经典教材同步辅导丛书

配套高教版·同济大学数学系编

九章丛书

高等数学

（第六版·下册）

同步辅导及习题全解

主　编　苏志平　郭志梅

· 知识点窍 · 逻辑推理 · 习题全解

· 全真考题 · 名师执笔 · 题型归类

新版

中国水利水电出版社

www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

高等数学（第六版·下册）同步辅导及习题全解

主　编　苏志平　郭志梅

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书是高教版《高等数学》（第六版）教材的配套学习辅导及习题解答。编写的重点在于提供原教材中各章节全部习题的精解详答，并对典型习题做了详细的分析和提纲挈领的点评。每章都对知识点进行归纳和提炼，帮助读者梳理清楚各章脉络，统揽全局；并在教材给出的习题的基础上，根据每章的知识重点，精选了有代表性的例题，方便读者迅速掌握各章的重点和难点。

本书编写思路清晰、逻辑缜密、内容详尽，简明易懂，力求循序渐进地帮助读者分析并解决学习中遇到的问题。

本书可作为各专业本科学生《高等数学》课程教学辅导材料和复习参考用书及考研强化复习的指导书，也可以作为《高等数学》课程教师的教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（第六版下册）同步辅导及习题全解 / 苏志平，郭志梅主编.—北京：中国水利水电出版社，2009
（高校经典教材同步辅导丛书）
ISBN 978-7-5084-6749-8

I. 高… II.①苏…②郭… III.高等数学－高等学校－教学参考资料 IV.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 146929 号

策划编辑：杨庆川　责任编辑：杨元泓　加工编辑：郑秀芹　封面设计：李佳

书　　名	高校经典教材同步辅导丛书 **高等数学（第六版·下册）同步辅导及习题全解**
作　　者	主编　苏志平　郭志梅
出版　发行	中国水利水电出版社（北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（营销中心）、82562819（万水）
经　　售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京万水电子信息有限公司
印　　刷	北京市梦宇印务有限公司
规　　格	148mm×210mm　32 开本　9.5 印张　295 千字
版　　次	2009 年 8 月第 1 版　2009 年 8 月第 1 次印刷
印　　数	0001—7000 册
定　　价	12.50 元

前言

《高等数学》是大学数学课程中的一门重要的必修课，是理工科学生学习其他课程的基础和工具，也是硕士研究生入学考试的一门必考科目。然而由于高等数学自身的抽象性及其特有的逻辑方式，使其成为了众多学习者的一大难关。

为了帮助广大读者学好高等数学，我们根据国家教委审定的普通高等学校高等数学课程教学基本要求（教学大纲）和研究生入学考试教学大纲编写了这本辅导书。本书按照《高等数学》（同济大学应用数学系主编，第五版，高等教育出版社出版）的章节顺序编写，分为上下两册，共十二章，本册为第八至十二章。

各章具体体系及特点如下：

本章知识结构网络图 结合每年考研大纲的要求，分别对各章知识点做了简练的概括，使读者在各章的学习过程中目标明确，有的放矢。

典型例题与解题技巧以及每节课后习题解答 本书尽可能地归纳了该课程所涉及的重要题型，这些题型都是在对历年考试和考研所涉及的题型进行深入分析后总结出来的，具有一定的代表性。本书除了包括传统辅导书的解题过程外，还对大部分具有代表性的习题给出了知识点窍和逻辑推理。知识点窍部分简明扼要地点出了题中涉及的核心知识点，让学生清楚地了解出题者的意图；而逻辑推理则注重引导学生思维，旨在培养学生科学的思维方法，掌握答题的思维技巧。

本章重难点及考研要求 阐述每一章中重要的性质定理、公式及结论，并对一些难于理解但又是大纲所要求的考研常涉及到的内容进行了详细的解释和归纳。目的是使读者站在一个更高的角度去分析问题、解决问题。

由于时间较仓促和编者水平有限，难免书中有疏漏之处，敬请各位同行和读者给予批评、指正。

编者

2009 年 8 月

目录

第八章 空间解析几何与向量代数

知识结构网络图

- 向量代数与空间解析几何
  - 向量代数
    - 向量及其线性运算
    - 数量积、向量积、混合积
  - 曲面、曲线
    - 曲面及其方程
      - 一般式
      - 旋转曲面
      - 柱面
      - 二次曲面
    - 空间曲线及其方程
      - 一般式
      - 参数式
      - 在坐标平面上的投影曲线
  - 平面、直线
    - 空间平面及其方程
      - 点法式
      - 一般式
      - 截距式
      - 两平面的夹角
    - 空间直线及其方程
      - 一般方程
      - 对称式(点向式)
      - 参数式
      - 两直线的夹角
      - 直线与平面的夹角

8.1 向量及其线性运算

本节重难点及考研要求

重点及考点

1. 向量.

(1)定义.

既有大小又有方向的量称为向量.

(2)向量的表示.

用空间有向线段来表示向量,记为$\overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{AB}$ 表示以 A 为起点,以 B 为终点的向量. 有向线段的长度表示向量的大小,有向线段所指的方向表示向量的方向. 当向量定义为有向线段时,它只具有长度和方向两要素,与起点无关.

(3) 向量相等.

大小相等且方向相同的两个向量相等,记为 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

(4) 向量的模.

向量的大小称为向量的模,记为 $|\boldsymbol{a}|$.

(5) 单位向量、零向量及角向量.

模等于 1 的向量称为单位向量;模等于 0 的向量称为零向量,其方向是任意的;与 $\boldsymbol{a}$ 大小相等且方向相反的向量称为负向量,记作 $-\boldsymbol{a}$.

(6) 平行向量.

两个非零向量,如果它们的方向相同或相反,就称这两个向量平行,记为 $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$. 零向量与任何向量都平行.

(7) 向量的坐标.

将向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点与空间直角坐标系的原点重合,则向量 $\boldsymbol{a}$ 终点的坐标(x,y,z)称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标,记为(x,y,z),并且 $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

设向量的起点和终点分别为 $A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$,则向量$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

(8) 方向角与方向余弦.

非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与坐标轴的三个夹角 α、β、γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角. $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦. 以向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为坐标的向量就是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量 $\mathbf{e}_a$,故 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, $\mathbf{e}_a = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$,若 $\boldsymbol{a} = (x,y,z)$,则

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

(9) 向量在轴上的投影.

设向量 $\boldsymbol{a}$ 与数轴 u 轴的夹角为 φ,则 $|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴上的投影,记为 $Prj_u\boldsymbol{a}$ 或$(\boldsymbol{a})_u$.

$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cos\varphi$, $\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) = \mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_1 + Prj_u\boldsymbol{a}_2$,

$\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda Prj_u\boldsymbol{a}$.

向量在与其方向相同的轴上的投影为向量的模 $|\boldsymbol{a}|$.

在空间直角坐标系上,向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标(x,y,z)是 $\boldsymbol{a}$ 向各坐标轴的投影. 向量 $\boldsymbol{a}$ 可以表示成分量形式 $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

2. 向量的线性运算及性质

(1) 加减法运算.

向量加法运算服从平行四边形法则或三角形法则. 设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$,则

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$,

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=(x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2)$,

若把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移到同一起点,则向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 即为从 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 向 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 所引向量 $\overrightarrow{AB}$.

n 个向量相加 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$ 等于 $\boldsymbol{a}_1$ 的起点到 $\boldsymbol{a}_n$ 的终点所确定的向量.

(2) 数乘运算.

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积,记为 $\lambda\boldsymbol{a}$. 若 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$,则 $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$. $\lambda\boldsymbol{a}$ 的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$,$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向规定如下:

当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同;

当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反;

当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量,方向任意.

(3) 性质.

①$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;②$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;③$\lambda(u\boldsymbol{a})=u(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda u)\boldsymbol{a}$.

(4) $(\lambda+u)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+u\boldsymbol{a}$,　$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

(5) 设 $\boldsymbol{a}$ 是一非零向量,则 $\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{a}\Leftrightarrow$ 存在唯一实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

考研要求

1. 理解空间直角坐标系,理解向量的概念及其表示.
2. 掌握向量的线性运算,理解单位向量、方向角与方向余弦的概念.向量的坐标表达式,掌握用坐标表达式进行向量运算的方法.

典型例题与解题技巧

题型 Ⅰ:空间直角坐标系的概念

【题型分析】　向量的坐标表示.

如图 8-1 所示,在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中,以原点为起点,点 $M(a,b,c)$ 为终点,向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 都可以唯一地分解成基本单位向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 的线性组合.

$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$.

称 x,y,z 为向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 的坐标或分量,记

$\boldsymbol{r}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}=\{a,b,c\}$.

例 1 证明：以三点 $A(3,1,10)$，$B(9,-1,7)$，$C(1,4,4)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

分析 空间中两点 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$ 的距离

$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

解 $|AB|=\sqrt{(3-9)^2+(1+1)^2+(10-7)^2}=7$，

$|AC|=\sqrt{(3-1)^2+(1-4)^2+(10-4)^2}=7$，

$|BC|=\sqrt{(9-1)^2+(-1-4)^2+(7-4)^2}=7\sqrt{2}$.

因为 $|AB|=|AC|$，且 $|AB|^2+|AC|^2=|BC|^2$，

所以 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

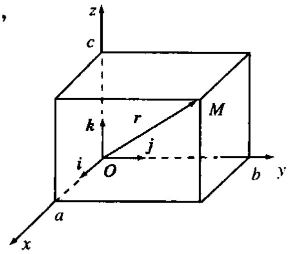

图 8-1

题型 Ⅱ：向量的概念和线性计算

【题型分析】 设 $M(x,y,z)$ 为空间直角坐标中任一点，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别为三个坐标轴上的单位矢量，则 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.

简记 $\boldsymbol{a}$ 的同向单位矢量为

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right\}.$$

若令 $\cos\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$\cos\beta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$\cos\gamma=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，

$\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\cos\alpha\,\boldsymbol{i}+\cos\beta\,\boldsymbol{j}+\cos\gamma\,\boldsymbol{k}$，且 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间直角坐标系中的两点，则

$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$，

$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$，

$$\cos\alpha=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z_2-z_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}.$$

例 2 已知 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{\pi}{4}$，求向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角.

分析 当已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模及夹角时，常常将其中一向量沿 x 轴摆放. 注意，这是一种常用方法，往往能起到化繁为简的作用.

解　如图 8-2 所示，将向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 表示在坐标系中，由此可得

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i},\boldsymbol{b}=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}\boldsymbol{i}+\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j},$$

故 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{2,1\},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\{0,-1\}$，

$$\cos(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=-\frac{\sqrt{5}}{5},$$

因此 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\arccos(-\frac{\sqrt{5}}{5})$.

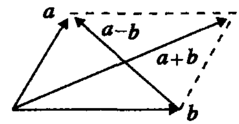

图 8-2

题型 Ⅲ：利用向量的运算性质求证的证明题

例 3　用向量的方法证明：三角形的中位线平行于底且它的长度等于底边的一半.

分析　只需证明表示中位线的向量与表示底边的向量方向相同，且前者长度是后者的一半即可.

证明　设 $\triangle ABC$ 中，D、E 分别为 AB、AC 的中点.

因 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{EA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$，

所以 $\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$，

即 $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

故 $\overrightarrow{DE}//\overrightarrow{BC}$ 且 $|\overrightarrow{DE}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$，结论得证.

课后习题解答（习题 8-1）

1. **解**　$2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=5\boldsymbol{a}-11\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}$.

2. **证明**　设四边形 $ABCD$ 中 AC 与 BD 交于 M（如图 8-3 所示），且 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MD}$. 因为
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DC}$，即 $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}$ 且 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$.
所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

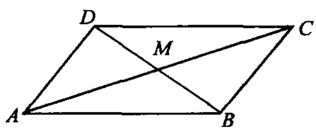

图 8-3

3. **解** 如图 8-4 所示，由题意$\overrightarrow{D_4D_3}=\overrightarrow{D_3D_2}=\overrightarrow{D_1B}=-\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{5}\boldsymbol{a}$,

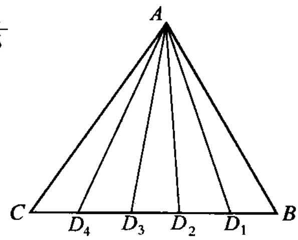

图 8-4

$$\overrightarrow{D_1A}=\overrightarrow{D_1B}+\overrightarrow{BA}=-\frac{1}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},$$

$$\overrightarrow{D_2A}=\overrightarrow{D_2B}+\overrightarrow{BA}=-\frac{2}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},$$

$$\overrightarrow{D_3A}=\overrightarrow{D_3B}+\overrightarrow{BA}=-\frac{3}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},$$

$$\overrightarrow{D_4A}=\overrightarrow{D_4B}+\overrightarrow{BA}=-\frac{4}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}.$$

4. **解** $\overrightarrow{M_1M_2}=\{1-0,-1-1,0-2\}=\{1,-2,-2\}$;

$-2\overrightarrow{M_1M_2}=-2\{1,-2,-2\}=\{-2,4,4\}$.

5. **解** $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}=11$,

故平行于向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量为

$$\pm\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\pm\frac{\boldsymbol{a}}{11}=\pm\frac{1}{11}\{6,7,-6\}=\pm\left\{\frac{6}{11},\frac{7}{11},-\frac{6}{11}\right\}.$$

6. **解** A 点在第 4 卦限，B 点在第 5 卦限，C 点在第 8 卦限，D 点在第 3 卦限.

7. **解** 在 xOy 平面、xOz 平面以及 yOz 平面上的点的坐标分别为$(x,y,0)$，$(x,0,z)$以及$(0,y,z)$，在 Ox、Oy、Oz 轴上的点的坐标分别为$(x,0,0)$，$(0,y,0)$，$(0,0,z)$. A 在 xOy 平面上，B 在 yOz 平面上，C 在 x 轴上，D 在y 轴上.

8. **解** (1) 点(a,b,c)关于 xOy 面的对称点是$(a,b,-c)$，关于 yOz 面的对称点是$(-a,b,c)$，关于 zOx 面的对称点是$(a,-b,c)$.

(2) 点(a,b,c)关于 x 轴的对称点是$(a,-b,-c)$，关于 y 轴的对称点是$(-a,b,-c)$，关于 z 轴的对称点是$(-a,-b,c)$.

(3) 点(a,b,c)关于坐标原点的对称点是$(-a,-b,-c)$.

9. **解** 答案如图 8-5 所示.

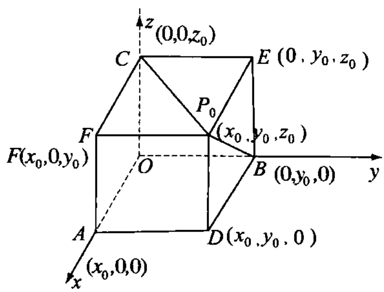

图 8-5

10. **解** 过 P_0 且平行于 z 轴的直线上的点有相同的横坐标 x_0 和相同的纵坐标 y_0，过 P_0 且平行 xOy 的平面上的点具有相同的竖坐标 z_o.

11. **解** 如图 8-6 所示，各点坐标如下：

$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)$；$B\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$；