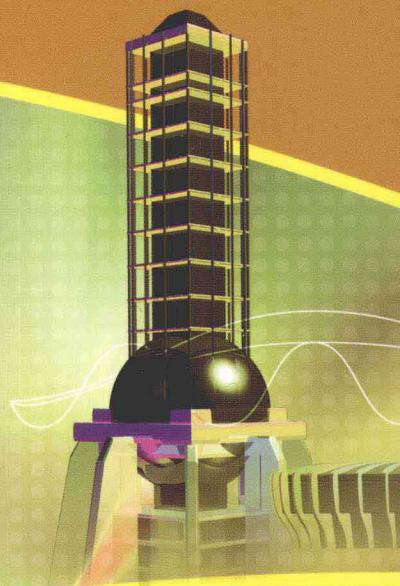


X INBIAN GAODENG
YINGYONG SHUXUE

新编高等 应用数学

主编◎马廷强 丁九桃

(第二版)



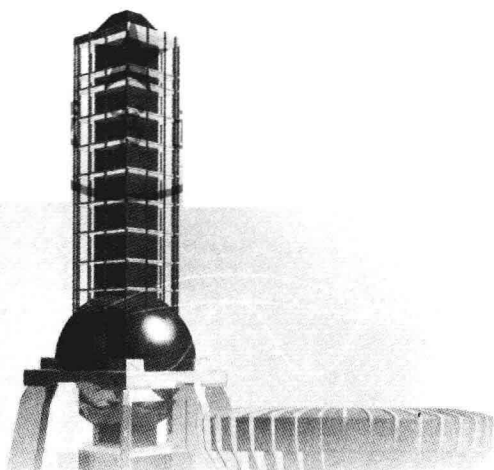
西南财经大学出版社

X INBIAN GAODENG
YINGYONG SHUXUE

新编高等 应用数学

主编◎马廷强 丁九桃

(第二版)



西南财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

新编高等应用数学/马廷强,丁九桃主编. —2版. —成都:西南财经大学出版社,2012.8

ISBN 978-7-5504-0833-3

I. ①新… II. ①马…②丁… III. ①应用数学—高等职业教育—教材 IV. ①O29

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第205364号

新编高等应用数学(第二版)

主 编:马廷强 丁九桃

责任编辑:孙 婧

封面设计:墨创文化

责任印制:封俊川

出版发行	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街55号)
网 址	http://www.bookej.com
电子邮件	bookej@foxmail.com
邮政编码	610074
电 话	028-87353785 87352368
印 刷	四川森林印务有限责任公司
成品尺寸	185mm×260mm
印 张	17.75
字 数	370千字
版 次	2012年8月第2版
印 次	2012年8月第1次印刷
印 数	1—4000册
书 号	ISBN 978-7-5504-0833-3
定 价	36.80元

1. 版权所有,翻印必究。
2. 如有印刷、装订等差错,可向本社营销部调换。
3. 本书封底无本社数码防伪标志,不得销售。

编 委 会

主 编：马廷强 丁九桃

顾 问：曾宪祖

主 审：王 缨 左艳芳

副主编：徐永梅 辛桂凤 宋爱萍

杨淑菊 朱美玲 刘旭云

参 编：温荣坤 夏开萍 耿敬荣

曹 剑 何文莉 伍 燕

李育琼 马丽宣 汤竹琼

序 言

高等数学是高职院校建筑工程类专业的核心课程之一, 不仅为后续课程提供了必备的数学工具, 而且这门课程的学习是培养大学生数学素质和理性思维的重要途径. 为了更好更快地掌握数学方法, 本教材注意与工程类专业课程的衔接, 注意结合工程类学生的实际, 使学生从实际背景中理解高等数学的来龙去脉, 获得解决问题的能力, 同时重视数学文化的育人功能.

本教材通过一年的教学实践, 教材使用的良好效果凸显, 在学校各个学院以及学生学习过程中得到高度赞赏. 鉴于现代教育技术和精品教材的需要, 本教材修订完成了以下各方面的工作:

1. 修改了第一版中个别不妥的文字, 以及印刷时排版遗漏和错误地方.

2. 章节习题量较原来基础上适当增大, 同时习题引入遵循难易度循序渐进的标准, 适合学生学习特点和学习心理.

3. 完成本书配套的教学演示文稿幻灯片, 本套教学幻灯片是在CAD课件的基础上完善形成的, 对教材的主要内容进行了详细、形象的讲解.

4. 修订了教材内容的深度和广度, 力求做到符合教学大纲.

5. 为了培养学生用数学思想、概念、方法消化吸收工程原理, 并考虑到数学的应用, 本教材注重数量分析和数据支撑, 增添了数学模型案例(附录3)分析引入, 使之既有代表性, 又有优美性.

感谢曾宪祖教授一直以来在教材编写和修订过程中给予的帮助和支持, 感谢昆明冶金高等专科学校数学教研室主任王缨教授和左艳芳教授对教材修订提出的宝贵意见! 同时感谢学校领导对教材编写和修订的关心和帮助.

教材已在不断实践中完善, 希望广大读者提出宝贵的意见, 编者将感激不尽!

编 者

2012年4月于昆明

前 言

随着我国经济的迅速发展, 社会对职业技术人才的需求日趋多元化. 为了提高职业技术人才的综合素质, 加深基础学科理论知识的训练、构建良好的专业基础课功底是十分必要的. 恰当地把握专业基础知识学习的尺度对专业学习的强化具有十分重要的作用. 长期以来, 高职公共数学教育在职业人才的素质培养上起着举足轻重的作用, 但高职院校对学生的数学基础知识训练稍显不足. 为了适应高职教育发展的步伐, 高职高专院校根据专业培训方向对公共数学课程教育进行了大量改革. 由于现行教育知识体系中没有对“专业人才”和“职业人才”加以区别, 高职经济数学课程内容和体系仍然偏重于系统化、知识化、理论化, 较少考虑社会实际需要和各专业人才素质特征及能力结构培养的需求, 导致大量教学资源的浪费和学习的盲目性. 为解决这些问题, 云南经济管理职业学院数学教研室全体老师在多年的教学实践中不断探索, 认真总结全国高职高专院校经济类各专业经济数学和高等数学课程改革经验, 结合高职院校专业课程设置的需求, 将经济数学和高等数学有机融合, 以数学知识为专业课服务作为指导思想, 编写成本教材.

本教材突出“专”和“职”的特点, 在编写内容和体例上有一定突破, 具体表现在:

(1) 考虑学习对象的实际情况及特点, 每章教学内容注重以实例引入知识点和相关的数学概念, 在理论阐述和习题编排中, 有意识地培养学生的数学思维和数学修养. 将经济问题、工程问题转化为数学模型的思想贯穿于各章, 加强与实际应用联系较多的基础知识、基本方法、基本技能的训练, 不过分追求复杂的计算和理论上的严密论证.

(2) 为了缓解高等职业院校数学课时少、教学内容多的矛盾, 恰当地把握教学内容的深度和广度, 在教学内容方面作了大胆的取舍, 知识结构及衔接顺序也根据教学经验作了相应调整.

(3) 在每章开始都用简短语言提出了本章知识点, 使学生一开始就明确各章节的学习内容和主要目标. 在各章节后都针对性地安排相应的习题, 以便学生及时检测学习效果和归纳学习内容, 达到复习和巩固的目的.

前 言

(4) 全书共十一章内容,以模块形式呈现:第一模块 微积分(一元微分学基础);第二模块 线性代数(行列式、矩阵与线性方程组);第三模块 概率论与数理统计.完成全书内容教学约需120学时,教学中可根据具体专业的需求选择教学内容.

本书由云南经济管理职业学院数学教研室马廷强、丁九桃担任主编;辛桂凤、徐永梅、朱美玲、杨淑菊担任副主编,负责二、三稿审稿.全书由马廷强、丁九桃统稿.

具体编写人员为:(第一章)汤竹琼、马廷强、丁九桃;(第二章)马廷强、李育琼、辛桂凤;(第三章)辛桂凤;(第四章)何文莉,曹剑;(第五章)耿敬荣、马廷强;(第六章)马廷强;(第七章)丁九桃;(第八章)马廷强;(第九章)杨淑菊;(第十章)朱美玲、徐永梅、温荣坤;(第十一章)夏开萍.

在本书的编写过程中,聘请了原云南省教育厅高校师资培训中心暨云南省教师资格认定指导中心办公室主任、云南省高教学会师资工作分会秘书长、云南经济管理职业学院教学督导组督导专家曾宪祖教授作为编写顾问.曾宪祖教授对教材的编写提出了许多宝贵意见,在此衷心感谢他一直对这本书付出的心血和辛勤劳动.

在此,还要感谢昆明冶金高等专科学校数学教研室主任王缨教授和左艳芳教授对教材的编写给予的指导和教材结构体系的构建提出的宝贵意见!

编写过程中,我们学习和借鉴了国内相关的文献、教材,由于数目众多,不便一一列举,对其作者,在此一并感谢.

尽管我们力求完美,但因经验和水平有限,本教材中的疏漏和不妥之处,敬请各位专家和使用本书的师生批评指正,以期再版时修正.

编 者

2011年4月于昆明

目 录

第一章 函数、极限与连续	(1)
第一节 函数的概念	(1)
习题 1-1	(6)
第二节 初等函数	(7)
习题 1-2	(9)
第三节 几种常用的经济函数	(9)
习题 1-3	(12)
第四节 极限	(12)
习题 1-4	(17)
第五节 无穷小量和无穷大量	(18)
习题 1-5	(20)
第六节 极限的运算法则	(21)
习题 1-6	(25)
第七节 函数的连续性和间断点	(26)
习题 1-7	(30)
第八节 闭区间上连续函数的性质	(30)
习题 1-8	(31)
第二章 导数与微分	(32)
第一节 导数的概念	(32)
习题 2-1	(37)
第二节 导数运算法则	(38)
习题 2-2	(43)
第三节 高阶导数	(43)
习题 2-3	(44)
第四节 函数的微分与近似计算	(44)
习题 2-4	(47)
第三章 导数的应用	(48)
第一节 洛必达法则	(48)
习题 3-1	(50)
第二节 函数的单调性	(50)
习题 3-2	(52)

目 录

第三节 函数的极值及其存在条件	(52)
习题 3-3	(54)
第四节 函数的最值	(54)
习题 3-4	(55)
第五节 导数在经济学中的应用	(55)
习题 3-5	(57)
 第四章 不定积分	(59)
第一节 不定积分的概念	(59)
习题 4-1	(61)
第二节 不定积分的性质和基本积分公式	(62)
习题 4-2	(64)
第三节 不定积分的换元积分法	(64)
习题 4-3	(69)
第四节 不定积分的分部积分法	(70)
习题 4-4	(72)
 第五章 定积分及其应用	(73)
第一节 定积分的基本概念	(73)
习题 5-1	(78)
第二节 微积分基本定理	(79)
习题 5-2	(81)
第三节 定积分的换元积分法	(82)
习题 5-3	(84)
第四节 定积分的分部积分法	(85)
习题 5-4	(86)
第五节 广义积分	(86)
习题 5-5	(88)
第六节 定积分的应用	(88)
习题 5-6	(91)

目 录

第六章 微分方程初步	(92)
第一节 微分方程基本概念	(92)
习题 6-1	(93)
第二节 一阶微分方程	(94)
习题 6-2	(97)
第三节 可降阶的二阶微分方程	(97)
习题 6-3	(99)
第四节 二阶常系数线性微分方程	(100)
习题 6-4	(103)
第七章 行列式与矩阵	(104)
第一节 二阶与三阶行列式	(104)
习题 7-1	(107)
第二节 行列式按行(列)展开	(108)
习题 7-2	(110)
第三节 行列式的性质	(111)
习题 7-3	(113)
第四节 行列式的计算	(114)
习题 7-4	(117)
第五节 克莱姆(Cramer)法则	(118)
习题 7-5	(119)
第六节 矩阵的概念	(120)
习题 7-6	(123)
第七节 矩阵的运算	(123)
习题 7-7	(128)
第八节 矩阵的初等变换与矩阵的秩	(130)
习题 7-8	(134)
第九节 逆矩阵	(135)
习题 7-9	(139)
第八章 多元函数微分学基础	(141)
第一节 空间解析几何简介	(141)
习题 8-1	(147)

目 录

第二节 多元函数的基本概念	(148)
习题 8-2	(150)
第三节 偏导数和全微分	(151)
习题 8-3	(154)
第四节 多元复合函数和隐函数的微分法	(155)
习题 8-4	(157)
第五节 多元函数微分学的应用	(158)
习题 8-5	(160)
 第九章 线性方程组	 (161)
第一节 线性方程组的一般解法	(161)
习题 9-1	(168)
第二节 线性方程组解的判定	(168)
习题 9-2	(171)
第三节 线性方程组解的结构	(171)
习题 9-3	(176)
 第十章 概率论	 (177)
第一节 随机事件	(177)
习题 10-1	(181)
第二节 随机事件的概率与古典概型	(182)
习题 10-2	(183)
第三节 概率加法公式	(184)
习题 10-3	(185)
第四节 条件概率与乘法公式	(186)
习题 10-4	(187)
第五节 事件的独立性	(188)
习题 10-5	(190)
第六节 全概率公式	(190)
习题 10-6	(192)
第七节 随机变量及其分布	(193)
习题 10-7	(208)
第八节 随机变量的数字特征	(209)

目 录

习题 10 - 8	(218)
第十一章 数理统计	(220)
第一节 数理统计的基本概念	(220)
习题 11 - 1	(226)
第二节 参数估计	(227)
习题 11 - 2	(231)
第三节 相关分析和一元线性回归分析	(232)
习题 11 - 3	(236)
附录 1 预备知识	(237)
附录 2 中值定理	(243)
附表 常用分布表	(245)
附表 1 常用的概率分布表	(245)
附表 2 泊松分布概率值表	(245)
附表 3 标准正态分布表	(247)
附表 4 t 分布表	(248)
附表 5 χ^2 分布表	(249)
附表 6 F 分布表	(251)
习题参考答案	(254)
参考文献	(275)

第一章

函数、极限与连续

数学是认识宇宙秩序和计量的学科,例如对万有引力,唯一可靠的认识就是数学的认识. 数学家从对运动规律的研究中,引出了函数的概念. 函数是微积分研究的中心概念和主要对象,极限是研究微积分的基本工具,连续是函数的重要性态. 本章将在复习和深入学习函数有关知识的基础上,讨论函数的极限与连续性等问题.

第一节 函数的概念

一、函数的概念

1. 常量与变量

在日常生活中,当我们研究某事物变化的过程时,常常会遇到各种不同的量,通常这些量可以分为两类:一类是在某一事物的变化过程中不发生变化、保持固定的常值的量,我们称其为常量,例如圆面积求解过程中,圆周率 π 始终保持一个相对固定的常值;另一类是在某一事物的变化过程中可以取不同数值的量,我们称其为变量,例如一天中气温总是随时间 t 的变化而变化.

一般地,常量用英文字母表中前面的字母 a, b, c, d 等表示,变量则用英文字母表中后面的字母 x, y, z 等表示.

2. 函数的定义

定义1 在某一事物的变化过程中,设 x 和 y 为两个变量, D 是一个给定的数集. 若对于 D 中每一个数 x ,按照一定的对应法则 f ,都有唯一确定的 y 与之对应,则称 y 是 x 的函数,记作:

$$y = f(x), x \in D$$

其中, x 称为自变量, y 称为因变量, f 称为函数记(符)号;当自变量 x 在 D 内取定某一值 x_0 时,有唯一确定值 $y_0 = f(x_0)$ 与之对应,此时称 y_0 为函数在 $x = x_0$ 时的函数值,记作:

$$y|_{x=x_0} \text{ 或 } f(x_0)$$

全体自变量 x 组成的集合称为函数的定义域;全体因变量 y 或全体函数值组成的集合称为函数的值域.

一般地,对于函数记号的表示是相对的,除了常用的 f 外,还可用其他英文字母或希腊字母如 g, h, F, φ 等表示,相应的函数可记为: $y = g(x), y = h(x), y = F(x), y = \varphi(x)$ 等. 也可直接用因变量的记号表示函数,即把函数记作: $y = y(x)$. 自变量与因变量的记

号也可以选择不同的字母来表示. 通常在不混淆时我们都选择 $y = f(x)$ 的表示形式.

从函数的定义我们不难看出: 函数的定义域和对应法则是构成函数的两个主要要素, 当且仅当这两个要素完全相同时, 两个函数才被认为是完全相同的函数.

例如 $y = x + 2$ 与 $y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, 因为定义域不同, 故为不同函数; 而 $y = x$ 与 $y = \sqrt{x^2}$,

定义域虽然相同, 但对应法则不相同, 故也不是相同函数; 然而 $y = x^2 + 1$ 与 $v = u^2 + 1$ 两个函数, 虽然表示自变量与函数的记号不一样, 但是它们的定义域和对应法则都相同, 所以是两个相同的函数. 最后一例再次说明函数关系的确定与自变量和因变量采用的字母无关.

例1 设 $f(x) = 2x^2 - 3$, 求 $f(0)$ 、 $f(2)$ 、 $f(-1)$ 、 $f(x_0)$ 、 $f(\frac{1}{a})$.

解 $f(0) = 2 \times (0)^2 - 3 = -3$; $f(2) = 2 \times (2)^2 - 3 = 5$;
 $f(-1) = 2 \times (-1)^2 - 3 = -1$; $f(x_0) = 2 \times (x_0)^2 - 3 = 2x_0^2 - 3$;
 $f(\frac{1}{a}) = 2 \times (\frac{1}{a})^2 - 3 = \frac{2}{a^2} - 3$.

例2 设 $f(x+3) = \frac{x+1}{x+2}$, 求 $f(x)$.

解 令 $t = x + 3$, 则 $x = t - 3$, $f(t) = \frac{t-3+1}{t-3+2} = \frac{t-2}{t-1}$,

所以 $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$.

3. 定义域的求法

在研究函数时, 我们必须在其自变量使函数表达式有意义的前提下进行, 这就需要我们首先确定函数的定义域. 函数有三种常用表示方法: 解析法(也叫公式法)、列表法和图像法. 后两者的定义域即自变量取值的全体构成的集合. 由实际问题构建的用解析法表示的函数的定义域除根据函数的数学表达式本身来确定外, 还要考虑所研究的问题的实际意义. 如何根据函数的表达式求函数的定义域? 若不考虑问题的实际意义, 函数的定义域就是指使得函数的表达式有意义的自变量 x 的所有取值构成的实数集.

对于用解析法表示的函数, 确定其定义域应注意以下几点:

- (1) 含分式的, 分母的值不能为零;
- (2) 含偶次根式的, 被开方式必须大于或等于零(非负);
- (3) 含对数式的, 真数必须大于零, 底数大于零且不等于1;

(4) 含正切函数或余切函数的, 正切、余切符号下的式子分别不能等于 $k\pi + \frac{\pi}{2}$ 、

$k\pi$ (其中 k 为整数);

(5) 含反正弦函数或反余弦函数的, 反正弦、反余弦符号下的式子的绝对值不能大于1;

(6) 如果函数式由若干项组成, 其定义域是各项定义域的交集(公共部分).

例3 求下列函数的定义域:

(1) $f(x) = \sqrt{4-x^2} + \frac{2}{x-1}$; (2) $f(x) = \sqrt{3+2x-x^2} + \ln(x-2)$;

$$(3) f(x) = \arcsin \frac{3x-1}{5} + \frac{1}{x}.$$

解 (1) 要使该函数有意义, 必须 $\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow -2 \leq x < 1$ 或

$$1 < x \leq 2.$$

用集合表示其定义域为: $\{x | -2 \leq x \leq 2, \text{且 } x \neq 1\}$; 用区间表示其定义域为: $[-2, 1) \cup (1, 2]$.

(2) 要使该函数有意义, 必须 $\begin{cases} 3+2x-x^2 \geq 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow 2 < x \leq 3.$

用集合表示其定义域为: $\{x | 2 < x \leq 3\}$; 用区间表示其定义域为: $(2, 3]$.

(3) 要使该函数有意义, 必须 $\begin{cases} \left| \frac{3x-1}{5} \right| \leq 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} -\frac{4}{3} \leq x \leq 2 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{4}{3} \leq x < 0$

或 $0 < x \leq 2.$

用集合表示其定义域为: $\{x | -\frac{4}{3} \leq x \leq 2, \text{且 } x \neq 0\}$; 用区间表示其定义域为: $[-\frac{4}{3}, 0) \cup (0, 2]$.

4. 反函数

定义2 设函数 $y = f(x)$ 是定义在数集 D 上的函数, 其值域为 A , 如果对于 A 中的每一个 y 值, 在数集 D 中, 都可以经关系式 $f(x) = y$ 确定唯一的一个 x 值与之对应, 则得到一个定义在 A 上的以 y 为自变量、 x 为因变量的新函数, 我们称它为 $y = f(x)$ 的反函数, 记作 $x = f^{-1}(y)$, 并称函数 $y = f(x)$ 为直接函数.

当然, 我们也可以说函数 $y = f(x)$ 是 $x = f^{-1}(y)$ 的反函数, 也就是说, 它们互为反函数. 由于函数对于用什么样的字母来表示自变量和因变量没有严格的限制, 因此对于字母没有规定意义的函数, 习惯上我们总是用 x 表示自变量, y 表示因变量, 把函数 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 写成 $y = f^{-1}(x)$. 显然, 从定义可知, 单调函数一定有反函数.

从定义也容易得出求反函数的过程可分为两步:

(1) 从函数 $y = f(x)$ 解出 $x = f^{-1}(y)$;

(2) 交换字母 x 和 y ;

(3) 确定所求反函数的定义域.

例4 求函数 $y = 2x - 1$ 的反函数, 并作图.

解 由 $y = 2x - 1$ 求出 $x = \frac{y+1}{2}$, 习惯写成 $y = \frac{x+1}{2}$, 所以, 函数 $y = 2x - 1$ 的反函数为 $y = \frac{x+1}{2}$, 其定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

其图像见图 1-1.

从此例也可以看出, 互为反函数的 $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

5. 分段函数

在定义域的不同区间内, 用不同的数学表达式表示的函数叫做分段函数.

分段函数在数学和工程技术以及日常生活中经常都会遇到. 求分段函数的函数值

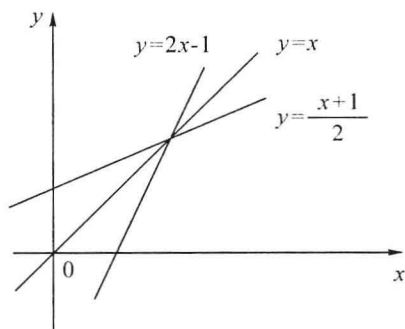


图 1-1

时,应先确定自变量取值的所在范围,再按相应的表达式进行计算. 在后面的章节中,我们将着重考察分段函数在分段点处的性态.

例 5 某城市规定出租车收费标准如下:路程在 2 千米以内收费 4 元,超过 2 千米的部分每千米按 1.8 元收费,求费用与路程的关系式.

解 路程用 x 表示,应交车费用 y 表示,由题意得:

$$y = \begin{cases} 4, & 0 \leq x \leq 2 \\ 4 + 1.8(x - 2), & x > 2 \end{cases}$$

这个函数就是一个分段函数. 分段函数的定义域应是各段自变量取值集合的并集. 因此这个分段函数的定义域为 $[0, +\infty)$.

例 6 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x^2+1}, & x \geq 2 \\ \frac{2-x}{x^2+1}, & x < 2 \end{cases}$ 求 $f(0)$ 、 $f[f(3)]$ 、 $f(a)$.

解 求分段函数的函数值时,应先确定自变量取值的所在范围,再按相应的表达式进行计算,所以:

$$x = 0 < 2, \text{ 故 } f(0) = \frac{2-0}{0^2+1} = 2;$$

$$x = 3 > 2, \text{ 故 } f(3) = \frac{3-2}{3^2+1} = \frac{1}{10}; \text{ 因 } f(3) = \frac{1}{10} < 2,$$

$$\text{故 } f[f(3)] = f\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{2 - \frac{1}{10}}{\left(\frac{1}{10}\right)^2 + 1} = \frac{190}{101};$$

计算 $f(a)$ 时,需分两种情况讨论:

$$\text{当 } a \geq 2 \text{ 时, } f(a) = \frac{a-2}{a^2+1};$$

$$\text{当 } a < 2 \text{ 时, } f(a) = \frac{2-a}{a^2+1}.$$

二、函数的几种特性

1. 函数的单调性

定义3 设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义,若对 $\forall x_1, x_2 \in D$,当 $x_1 < x_2$ 时,总有 $f(x_1) < f(x_2)$,就称 $f(x)$ 在 D 上单调递增(增加),称 $f(x)$ 为单调递增(增加)函数;若对 $\forall x_1, x_2 \in D$,当 $x_1 < x_2$ 时,总有 $f(x_1) > f(x_2)$,就称 $f(x)$ 在 D 上单调递减(减少),称 $f(x)$ 为单调递减(减少)函数. ($\forall$ 为数学符号,表示“任意的”.)

我们把函数的单调递增性和单调递减性统称为函数的单调性. 单调递增函数的图形是沿 x 轴正向逐渐上升的(见图1-2),单调递减函数的图形是沿 x 轴正向逐渐下降的(见图1-3).

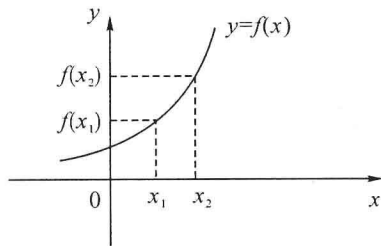


图 1-2

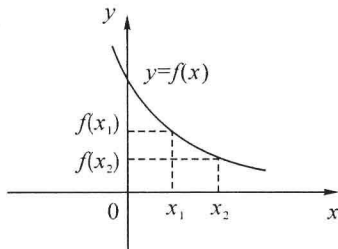


图 1-3

例如: $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是单调递减函数. 因为对 $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$,当 $x_1 < x_2$ 时,总有:

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}$$

因 $x_2 > x_1 > 0$ 时, $x_2 - x_1 > 0$,所以 $\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} > 0$,即 $f(x_1) > f(x_2)$,所以 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是单调递减函数.

2. 函数的奇偶性

定义4 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 是关于原点对称的数集,即若 $x \in D$,有 $-x \in D$. 若对 $\forall x \in D$,都有 $f(-x) = f(x)$ 恒成立,就称 $f(x)$ 为偶函数;若对 $\forall x \in D$,都有 $f(-x) = -f(x)$ 恒成立,就称 $f(x)$ 为奇函数.

例如: $y = x^2, y = \cos x, y = |x|$ 都是偶函数;

$y = x^3, y = \sin x, y = \operatorname{sgn} x$ 都是奇函数;

$y = x^2 + x^3, y = \cos x + \sin x$ 都是非奇非偶函数.

从函数的奇偶性定义我们很容易得到:要判断函数的奇偶性,首先看定义域是否关于原点对称,如果定义域不关于原点对称,则函数为非奇非偶函数;若其定义域关于原点对称,则还需讨论 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系,用奇偶性的定义来确定函数的奇偶性.

由定义易知偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称. 在实际操作中,我们也可以从函数的图形特征判断其奇偶性.

3. 函数的周期性

定义5 对于函数 $y = f(x)$,在其定义域 D 中,如果 $\forall x \in D$ 都有 $x + T \in D$ (T 为非零常数),且 $f(x) = f(x + T)$,那么函数 $y = f(x)$ 叫做周期函数,其中非零常数 T 叫做这个函数的周期. 如果 T 中存在一个最小的正数,则这个最小正数叫做这个函数的最小正周期.