马一 模块教材

高中新课标

数学

总主编：毛文凤 / 本册编著：萧柏荣

话说三角

——三角学原理与应用

中国大百科全书出版社

新课标高中数学模块教材

话说三角

——三角学原理与应用

《新课标数

总 主 编：毛文凤 博

执行主编：李君华 教授

执行副主编：萧柏荣（江苏教育学院数学系教授，江苏省中学数学教学专业委员会副理事长）

袁 桐（扬州新东方中学数学特级教师，江苏省名教师）

周敏泽（常州高级中学数学特级教师，全国模范教师）

徐沥泉（无锡市教学研究中心数学特级教师，全国数学学科方法论研究中心常务副主任兼秘书长）

丛书编委：李君华 萧柏荣 袁 桐 周敏泽 徐沥泉

刘云章 马永培 朱平天 杨润生 葛福生

周冠廷 孙志人 刘国祥 何继刚 卫 岗

蔡伟元 周公贤 刘威伯 顾曼生 管义桂

顾继玲 方彩云 张新华 陈小红 徐德同

本册编著：萧柏荣（江苏教育学院数学系教授）

中国大百科全书出版社

总编辑：徐惟诚　　　社　长：田胜立

图书在版编目(CIP)数据

话说三角：三角学原理与应用/毛文凤主编.-北京：中国大百科全书出版社,2005

新课标高中数学模块教材

ISBN 7-5000-7269-4

Ⅰ.数… Ⅱ.毛… Ⅲ.几何课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 021000 号

策划设计：可一图书　(http://www.keyibook.com)

责任编辑：简菊玲

新课标高中数学模块教材

话说三角：三角学原理与应用

* * *

中国大百科全书出版社出版

全国新华书店经销

http://www.ecph.com.cn

北京阜成门北大街 17 号　邮编：100037　电话：010-88390797

南京玄武湖印刷实业有限公司印刷

* * *

2006年 2 月第 1 版　2006 年 2 月第 1 次印刷

890×1240 毫米　32 开本　13.75 印张　200 千字

ISBN 7-5000-7269-4/G·858

定　价：20.00 元

序

普通中学数学课程标准的颁布引发了一场教学内容的大改革。与时俱进地审视数学课程教学的内涵，已成为人们关注的问题。人们开始正视传统的教材构成、传统的教学模式、传统的评价标准所产生的负面影响——学生缺乏学习数学的兴趣。

本模块教材系列的编写其旨意就是要在纷繁杂乱的数学读物中，编出一套能体现数学独特的知识和能力、历史和人文、情感和价值观的数学用书，从而最大限度地调动学生对数学的兴趣。数学作为一门科学，应注重概念清晰、计算正确、论证有据；数学作为一种文化，应让人在数学读物中体会到它的文化价值。因此适当地介绍数学文化的演绎过程及它对推动社会发展的作用与展望它的发展趋势是十分必要的，是符合新课标理念的。当然，归根结底，针对中学生的任一数学读物都是有着教育功能的，在这套模块教材中我们特别着重做到三个结合：适度的形式化与启发兴趣形式相结合，发展学生的思维能力与增强数学的应用能力相结合，掌握扎实的基础知识与拓展数学视野、培养创新精神相结合。

纵观每一分册的写作均分三个层次：第一层次为引论，背景资料、数学史话、名人轶事或自撰小品等简洁地勾画出通往所述数学模块专题内容的千年路径或近代畅想，使读者产生“登高望远”的感觉或“源远流长”的体会。第二层次为主体构架，与新课程相伴，通过解惑的方式，深入浅出地讲解数学，着重思维训练、方法积累与能力提高。第三层次为提高延伸部分，与新课标的选修内容（指高中）相配合，这是特地为对数学有浓厚兴趣的青少年朋友安排的，希望同学们能喜欢它。

这三个层次，在本系列丛书不同的模块分册中，有的是以章节为标志，层次分明、一目了然，有的则是融于章节之中相互渗透、各显特色。

这次参与丛书编写的作者，集中了目前数学普通教育的一些著名专家教授和教学一线的顶尖教师，尽管他们的认真负责精神和专业能力是毋庸置疑的，但由于编写时间仓促及作者对数学新课标的认识和实践水平有限，丛书在编写过程中难免有不足和疏漏之处，恳请广大读者批评指正。

（作者系南京师范大学数科院教授）

前言

三角学是研究三角函数与解三角形的一门数学学科。它最早起源于计算实践的需要，后来随着近代数学的发展，才逐渐完善了三角函数的理论。它作为描述周期现象的重要数学模型，在数学和其他领域中具有重要作用。新一轮的数学课程改革强调人人学有价值的数学，人人都能获得必要的数学，不同的人在数学上得到不同的发展。作者正是基于此目的，通过对三角学内容比较系统的阐述，力求对学生数学素养的提高能有所帮助。相信本书既可为广大中学生提供学习大学数学课程的坚实基础，又能发展他们的推理能力、运算能力以及应用意识、创新意识。

全书共分六章，第一章概述三角学的起源与发展。第二章从分析（函数）的观点，介绍三角函数的概念、图像和性质。第三章从代数的观点，介绍三角函数式的恒等变换。第四章阐述三角函数的应用，着重从几何的观点介绍在解三角形方面的应用。第五章概述反三角函数和简单三角方程。第六章介绍球面上的几何和球面三角的有关内容。在各章内容的编写中，作者不仅重视了三角函数理论的介绍，还重视了例子、习题的选配；不仅重视

了三角学发展历史足迹的追寻与概说，还重视了由其内容所反映的数学思想和方法的揭示与分析，其目的是使读者学到更有用的数学，促进其数学思维能力和一般能力的发展，并受到数学文化的熏陶。

按照新课程标准的精神编写本书难度很大，又囿于作者的水平，书中难免有疏误之处，敬请同行和广大读者不吝指正。最后，谨向为本书的写作和编辑出版予以指导和支持并付出辛勤劳动的李君华先生和中国大百科出版社的同志表示诚挚的谢意。

编者

目　录

第一章 三角学的起源与发展

数学史的学习是非常有益的,它不仅能告诉我们已经有了什么,而且能教给我们如何去增添什么.

——卡约里(F. Cajori)

一、三角学的起源

三角学是研究三角函数与解三角形的一门数学分支,它主要包括平面三角和球面三角两部分.

“三角学”一词,来自希腊文,原意是三角形的测量,也就是解三角形.这说明三角学和其他科学一样,是在解决实际问题的过程中产生并逐步发展的.古埃及人正是为了适应修建金字塔,整理尼罗河泛滥后的耕地,通商,航海以及观测天象的需要,积累了三角学方面的知识.从后来发现的兰德纸草书的记载中知道,早在公元前 17 世纪,在测量金字塔的陡度时就涉及棱锥底面与侧面所成二面角的余切问题.我们还可以从古巴比伦楔形书板的记载中看到,早在公元前 1900 年到前 1600 年的巴比伦数学书板——普林顿 322 号中实际上就包括了

一个余割表.公元前5～前4世纪的巴比伦天文学家已经收集了大量的观测数据,它们均和球面三角有关,后来大部分传到了希腊.

古代希腊在数学历史发展中占有十分重要的地位.毕达哥拉斯学派的数学研究和欧几里得的《几何原本》举世闻名.这不仅开了演绎数学的先河,而且对后来数学的发展产生了重大影响,三角学正是在希腊对几何进行定性研究的基础上,为适应建立定量天文学的需要而逐渐产生的.

说起三角学的起源,可以追溯到公元前6世纪古希腊著名的数学家和哲学家泰勒斯(Thales).他是希腊演绎数学开创时期的代表人物之一.据传他曾用一根已知长度的杆子,通过同时测量竿影和金字塔影子之长,求出了金字塔的高度.他还利用有关相似三角形的知识计算过船舶到海岸的距离.泰勒斯的相似理论被认为是三角学的萌芽.

喜帕恰斯

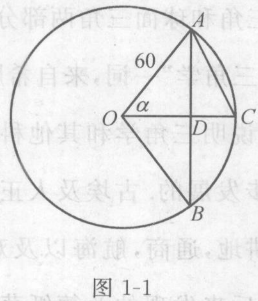

图 1-1

三角学的奠基人是古希腊的天文学家喜帕恰斯(Hipparchus),他大约生活在公元前2世纪.他在天文观测中的业绩使他在天文学上享有盛誉.然而,他有比在天文学上更重要的成就,那就是历史上都认为

他是三角学的创始者.喜帕恰斯编制了第一张弦表.他把圆周分为360°,把半径长度分为60等分,弦长以每一等分为单位,小数部分用60进位制来表示,并以符号 crdα 表示圆心角 α 所对的弦长,图1-1中,半径 OA 为60个单位,crdα=弦 AC 之长,crd2α=弦 AB 之长.那么

$$\sin\alpha=\frac{AD}{OA}=\frac{AB}{2\cdot OA}=\frac{\mathrm{crd}2\alpha}{120},$$

或者

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\mathrm{crd}\alpha}{120}.$$

若 $\alpha=36°$,则有 $\sin 18°=\frac{\mathrm{crd}36°}{120}=\frac{37.081\,944}{120}=0.309\,016.$

其中,喜帕恰斯对 crd36°的计算是:以半径 OA 的$\frac{1}{60}$为单位去量36°圆心角所对的弦长,其量数是37个单位(即半径的$\frac{37}{60}$),加上$\frac{4}{60}$个单位,再加上$\frac{55}{3\,600}$个单位.化为十进小数即37.081 944.喜帕恰斯不仅系统地使用过弦表,还知道一些与现代三角公式等价的公式.

希腊的三角术在公元1世纪梅内劳斯(Menelaus)时期得到进一步发展.他的主要著作是《球面学》,后来以阿拉伯文保存了下来.该书分为三卷.第1卷研究球面三角形,其中第一次把球面三角形定义为由球面上小于半圆的三段大圆弧构成的图形.他所证明的定理包括:球面三角形的两边之和大于第三边;球面三角形的三内角之和大于二直角;球面三角形的等边对等角;球面三角形的全等定理等.在全等定理中他证明了一个平面三角形里不能类比的定理:若两球面三角形的

三双角对应相等，则此两球面三角形全等.第2卷是讲天文学，间接地涉及到球面几何.第3卷是以著名的梅内劳斯定理为基础，展开有关球面三角的内容.

平面三角形的梅内劳斯定理是：若一条直线交平面三角形 ABC 的三边 AB、BC、CA（或其延长线）于 P_1、P_2、P_3（图 1-2），则有 $\frac{AP_1}{P_1B}\cdot\frac{BP_2}{P_2C}\cdot\frac{CP_3}{P_3A}=1$，即 $P_1A\cdot P_2B\cdot P_3C=P_1B\cdot P_2C\cdot P_3A$.

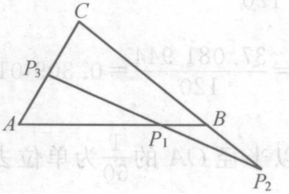

图 1-2

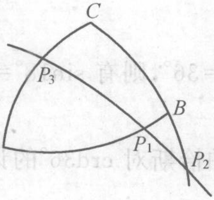

图 1-3

球面三角形的梅内劳斯定理是：若一个大圆交球面三角形 ABC 的三边 $\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{CA}$（或其延长线）于 P_1、P_2、P_3（图 1-3），则有

$$\sin\overset{\frown}{P_1A}\sin\overset{\frown}{P_2B}\sin\overset{\frown}{P_3C}=\sin\overset{\frown}{P_1B}\sin\overset{\frown}{P_2C}\sin\overset{\frown}{P_3A}.$$

梅内劳斯是用平面相应定理的结论来证明该定理的.

公元1～2世纪，托勒密(C. Ptolemy)集希腊天文学和三角术之大成，使希腊的三角术的发展及其在天文上的应用达到了顶点.托勒密著有权威性巨著《数学汇编》，阿拉伯人称它为《大汇编》.该著作共13卷.第1卷侧重三角内容，其中包括上面所述的弦表，它充实了喜帕恰斯和梅内劳斯的成果.后面各卷侧重天文，但内容还是数学性质的.他证明了定理：圆内接四边形两组对边乘积之和等于两对角线的乘积，

并运用此定理(后称托勒密定理)把 0°到 180°间所有相差为$(\frac{1}{2})^\circ$的弧所对应的弦长都算出并列成表，这是第一个三角函数表. 他还发现了平面三角和球面三角中的某些定理和公式，例如他推导出与下列公式

(1) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

(2) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

(3) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

(4) $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$

(5) $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}<\frac{\alpha}{\beta}\qquad(\beta<\alpha<\frac{\pi}{2})$

托勒密

等价的公式. 其中第(5)个公式是用来作内插法计算的. 又如，他证明了球面直角三角形中边角之间的一些关系.

在数学史上，希腊人的后继者是印度人. 印度人不仅在算术和代数方面有很多的创造，而且当希腊天文学和三角学逐渐衰落的时候，他们深入了对天文学的研究，并由此促进了三角学的发展. 印度人继承了托勒密的那套办法，把圆分成 360 度或 21 600 分，所不同的是以半径的 120 等分作为单位. 公元 5～6 世纪，阿耶波多(Aryabhata)作了两项改进：其一是他把半弦与全弦所对弧的一半相对应，于是“正弦”就相当于现在的正弦线长的 r 倍(r 是圆的半径)；其二是他用单位弧长去度量半径，即由 $2\pi r=21\ 600$，得

$$r=\frac{21\ 600}{2\pi}=\frac{21\ 600}{2\times3.141\ 6}\approx3\ 438,$$

进而以半径的 3 438 等分作为单位计算半弦弦长表. 印度人还采用了

正弦、余弦和正矢（$\text{versin}A=1-\cos A$）的等价概念，用关系式 $\text{versin}A=2\sin^2 A$ 计算半角的正弦. 后来，婆罗摩多（Brahmagupta）首先利用内插公式编制了一张 $R=150$ 的正弦表，其内插公式在计算效能上和一千多年后的牛顿－斯特林公式等价.

阿拉伯人在掌握希腊和印度的数学方面，以及在保存大量世界文化方面是卓有成效的. 公元 10～12 世纪成为阿拉伯数学的高峰期. 在三角方面，他们像印度人一样，计算半弦之长而非全弦之长. 天文学家巴塔尼（Al－Battani）从三角线出发用代数方法得到 6 种三角线的概念和相互关系，编制出自 0°到 90°每隔 1°的余切表，还研究了各种斜三角形的解法. 其斜三角形的基本解法是通过作出某边上的高，转化为直角三角形来解. 他还给出了钝角球面三角形的余弦定理. 阿布·瓦法（Abu al－Wafa）把所有三角线都定义在同一圆上，他用一种插值法编制了每隔 10′的正弦表和正切表，达到相当高的精确度.

13 世纪的阿拉伯数学家纳西尔丁（Nasir al－Din）总结了前人在三角方面的成就，并把它们从天文学中抽取出来加以系统阐述，形成了独立于天文的著作《论四边形》. 该书指出，由球面三角形的三个角可以求出三条边，反之由三边也可求出三角. 此书从基本概念和比例开始直到各种类型问题的解法，较完整地建立了三角学的系统，为三角学的诞生奠定了基础. 后于 15 世纪传到欧洲，从而对欧洲三角学的发展产生了重要影响.

15 世纪的欧洲已开始进入文艺复兴时期，社会经济的发展促进了思想的大解放和文化、艺术及科学的大发展. 所有这一切推动了数学

的发展.三角学的发展也很快,并最终脱离了天文学成为一门独立的数学学科.

文艺复兴时期三角学的显著进步主要应归功于德国数学家.其中最著名的是缪勒(J. Müller),又名雷琼蒙塔努斯(Regiomentanus).他最重要的著作是《三角全书》.全书共5卷,前2卷是平面三角,后3卷是球面三角,首次将平面三角与球面三角分离开来.我们知道,15世纪以前的三角术主要是为研究天文学而产生的,所以主要是球面三角的内容.书中采用印度人的正弦,即半弧的半弦,还用到余弦.后来,雷琼蒙塔努斯又给出一个五位正弦表.他在《三角全书》中对满足三个给定条件的三角形发生了很大兴趣,从而用代数方法研究了许多几何问题.书中后3卷对球面三角学作了系统的论述,包括球面三角中的正弦定理和余弦定理等内容.该书写于1464年,直到1533年才出版.该书的问世,标志着三角学正式成为一门独立的学科.后来另一位德国数学家雷提库斯(G. Rhaeticus)修改了正弦的含义.将原来$\overset{\frown}{AD}$的正弦是AB(即半弧所对的半弦)修改为$\angle AOB$的正弦是AB(图1-4).但AB的长仍依赖于半径长度单位的选取.这一改变使$\mathrm{Rt}\triangle AOB$成为基本的结构,而半径为OA的圆成为附带的了.他还使用了全部6个三角函数.出于当时天文观测日益精密的需要,他还编制出了空前精确的三角函数表.他令半径$r=10^{10}$和$r=10^{15}$,作每隔$10''$的正弦、正切和正割表.雷提库斯和他的助手勤奋工作达12年之久.直到死后才

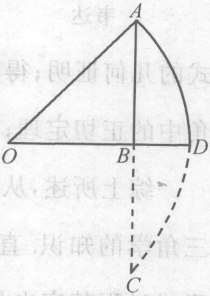

图1-4

由他的学生鄂图(V. Otho)于1596年完成.

韦达

16世纪的大数学家韦达(F. Viete)在符号代数和方程论方面的贡献是众人皆知的.他还著有《三角学的数学基础》,该书将平面和球面三角知识进一步系统化,并有所发展.他首次利用6种三角函数解平面三角和球面三角问题;首次将代数变换方法引入三角学.他补充了由托勒密所建立的诸多三角恒等式;给出了和角公式中和化积公式的几何证明;得到了n倍角正、余弦的一般公式.他还发现了平面三角中的正切定理;提出了三次方程不可约情况的一个三角学解法等.

综上所述,从远古开始,人类就在生产生活的实践中逐渐积累了三角学的知识.直到16世纪三角学形成,成为数学的一个分支.它的形成过程其实也是三角学不断丰富和发展的过程.不过,由于天文、测量等方面的研究需要,三角学一直围绕着它的一个基本问题——解三角形的研究展开.

我国很早就有了三角测量的方法.据《史记》记载,公元前2000年,大禹治水时就利用简单的三角术进行过山川地形的测量.公元前2世纪,我国最早的天文学著作《周髀算经》中就有商高用矩尺进行测量的记载.测量方法有勾股测量术和重差术,内容涉及勾股定理、相似直角三角形对应边成比例定理.公元3世纪,刘徽在《海岛算经》一书中,利用"重差术"解决了四次测望的复杂问题,使该书成为世界上著名的阐述解三角形的数学专著,反映了我国古代对三角学的研究水平.只