

三
国外海洋石油钻采集输设备参考资料之三

固定式海上平台设计问题

石油钻采机械行业技术情报网

第一机械工业部情报所

国外海洋石油钻采集输设备参考资料之三

固定式海上平台设计问题

天津大学编译

第一机械工业部情报所

前 言

遵照伟大领袖毛主席关于“洋为中用”的教导，为了适应当前我国海洋油气勘探与开发的大好形势的需要，石油钻采机械技术情报网组织了网成员单位 641 海洋研究所，627 工程筹备处，华东石油学院、兰州石油机械研究所等四个单位，并邀请了天津大学、第二海洋地质调查大队，上海交通大学，同济大学，一机部情报所等五个非成员网单位，共同编译了几种“国外海洋石油钻采集输设备参考资料”，供从事海洋石油工业有关人员参考。

本册《固定式海上平台设计问题》编译了国外有关固定式海上平台设计中的几个主要方面的问题及其计算方法。对于所介绍的计算方法及有关数据应根据我国海域的具体条件确定其有无参考价值而批判地吸收。

由于我们收集的资料不全，水平有限，错误与缺点在所难免，请读者批评指正。

石油钻采机械行业技术情报网

1974 年 1 月

目 录

绪言	1
第一章 作用在孤立桩柱上波压力的计算	7
§ 1-1 概述	7
§ 1-2 波浪理论	9
§ 1-3 拖曳力系数与惯性力系数	17
§ 1-4 波压力的线性波浪理论数学解法	22
§ 1-5 波压力的综合图解法	27
§ 1-6 波压力的无因次等值线图解法	33
§ 1-7 大陆架深水中波压力的计算	38
§ 1-8 海流对桩上波压力的影响	39
§ 1-9 波浪对桩群的作用	40
§ 1-10 作用在大直径桩柱上的波压力	44
第二章 海冰冰压力的计算及设计标准	47
§ 2-1 概述	47
§ 2-2 漂浮冰块作用于直立墩柱上的冰压力	48
§ 2-3 漂浮冰块作用于具有倾斜面的墩柱上的冰压力	59
§ 2-4 考虑建筑物墩柱变形的漂浮冰块冰压力计算	67
§ 2-5 冰覆盖对孤立建筑物的冻结作用力	73
§ 2-6 抗冰结构冰荷载设计标准	75
第三章 海冰冰压、冰情观测与冰的物理力学性质	77
§ 3-1 概述	77
§ 3-2 海冰的冰压力观测	77
§ 3-3 海冰的极限强度	81
§ 3-4 海冰其它物理力学指标的确定	91
第四章 抗冰结构	94
§ 4-1 概述	94
§ 4-2 使穿过冰区的结构物部分的暴露面积最小	94
§ 4-3 在冰区范围内采用锥体结构	95
§ 4-4 平台的挡冰防护措施	96
§ 4-5 其他措施	100
第五章 横向承载桩的计算分析	101
§ 5-1 概述	101
§ 5-2 考虑土反力模量 E_s 随深度变化时的计算方法	102
§ 5-3 相对刚度和相对桩长	114
§ 5-4 相对刚度变化问题	118
§ 5-5 考虑土反力、桩挠度之间非线性关系时的计算方法	121
§ 5-6 土反力、桩挠度关系曲线	124

§ 5-7 关于横向承载桩的计算机数解法	128
§ 5-8 桩的横向极限承载力	130
第六章 管节点的结构型式	140
§ 6-1 概述	140
§ 6-2 T型节点	140
§ 6-3 Y、K型节点	144
§ 6-4 扩散节点	148
§ 6-5 箱型节点	150
§ 6-6 其他型式的管节点	151
第七章 管节点应力分析和强度设计	154
§ 7-1 概述	154
§ 7-2 试验统计法	154
§ 7-3 有限单元法	159
§ 7-4 薄壳理论法	162
§ 7-5 管节点的强度设计	170
第八章 金属的防腐	176
§ 8-1 概述	176
§ 8-2 金属防腐的各种方法	179
§ 8-3 电化学防腐概要	179
附录一 爱利波理论的 d/L_0 函数表	182
附录二 有限单元法	196
§ 1 矩阵知识	196
§ 2 有限单元法的基本原理	205
§ 3 平面问题中的有限单元法	206
§ 4 薄板弯曲问题中的有限单元法	219
§ 5 壳体结构中的有限单元法	229
参考文献	236

绪 言

固定式海上平台的发展状况：

第二次世界大战以后，近四分之一世纪以来，国外海上钻井采油工业获得了迅速地发展。由于固定平台是在开阔水域中生产石油最实际的方法，因而得到了广泛的应用。在这期间，无论在建造技术方面，也无论在设计理论方面，都日趋完善。最初仅在二十呎水深的地方建造海上平台，现在已有许多平台建在水深二百五十呎以上的地方，最高达到三百四十呎。图1和图2可以用来概括地表示固定式海上平台的发展状况。

至于水下石油钻井的历史，还可追溯到更远。第一个水下石油钻井，大约于1900年，是在美国加利福尼亚进行的，那里的井是从滩地延伸入海的堤上钻的。1909或1910年在路易西安那州卡宴(Caddo)郡佛立(Ferry)湖上用丝柏树打桩，并且用安在“临时”平台上的木制井架钻井。二十世纪二十年代，在委内瑞拉马拉开波湖的浅水中，开始从木制平台上钻井。这个湖继续钻井直到今天已有5000多个平台，但这些不能认为是海上平台，因为马拉开波湖是个内陆湖。

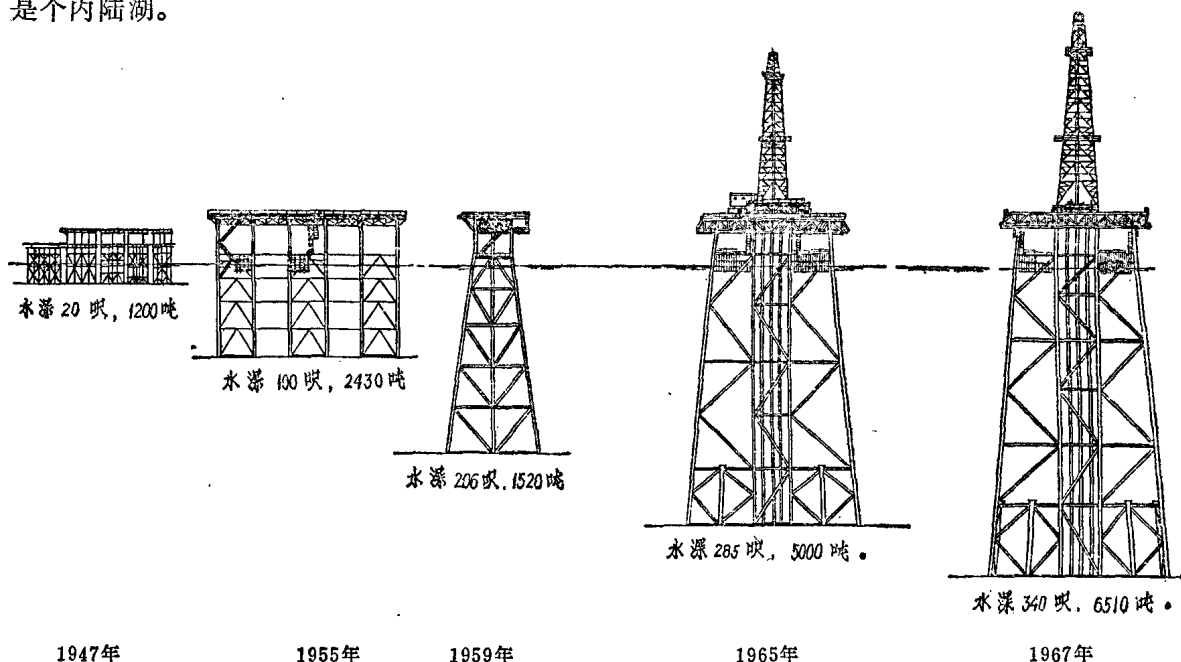


图1 平台发展的二十年

关于海上固定平台的发展，我们可以从墨西哥湾平台的发展加以说明。

墨西哥湾在1937年到1940年期间，海上钻井都离岸很近，采用木平台结构。图3就是这种平台的一个例子。该平台尺寸为50呎×90呎，于1938年建立在得克萨斯州莫法敦(Mcfaddin)海滨离岸一哩远的地方，在墨西哥湾卡姆伦(Carmeron)郡柯瑞敦尔(Creole)油田中。这种型式的建筑物继续到1940年。

第二次世界大战期间，墨西哥湾海上钻井采油停止发展了几年。1947年在沃密林(Ver-

million) 71地段水深20呎处建成的平台，第一次采用了导管架的结构型式。这个平台是全装备型，包括钻井架，设备和分开的“岛”型供应区（见图4）。该平台是由六个导管架支持在267根桩上，桩是由8吋和10吋管做成的。这个装置是用安在驳船上75吨旋转起重机构成的起重船和另一个为港口工作用的浮式起重机完成的。1948年在哥兰德（Grand）岛18段水深50呎处建成的平台（图5），共有两层，提供总计三万九千平方呎的面积。它支持在100根10吋H型钢桩上，桩通过25个10呎见方的导管架打下，共用了2000吨钢材。从图4和图5可以看出：支承平台的桩数目相当多，桩径则比较小，这是因为当时所能制造的钢构件尺寸和起

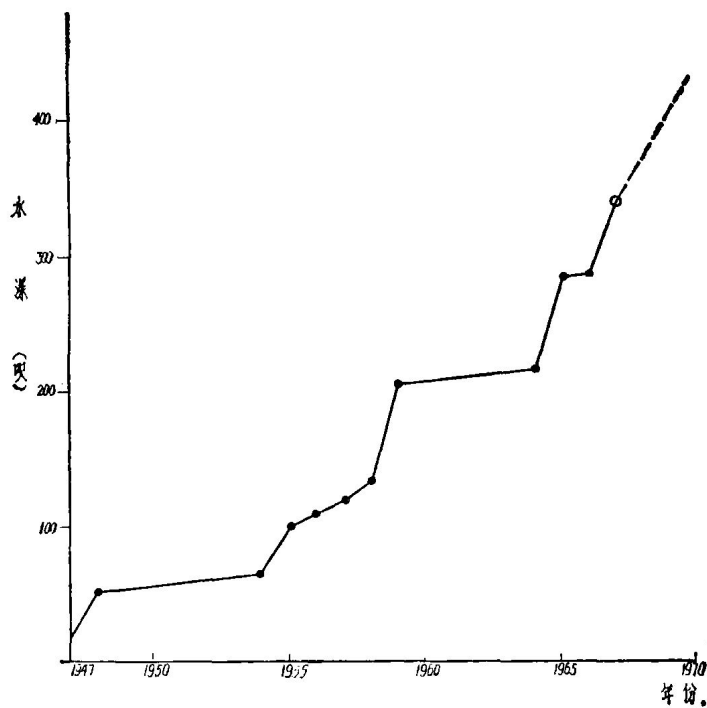


图2 平台水深与年份的关系

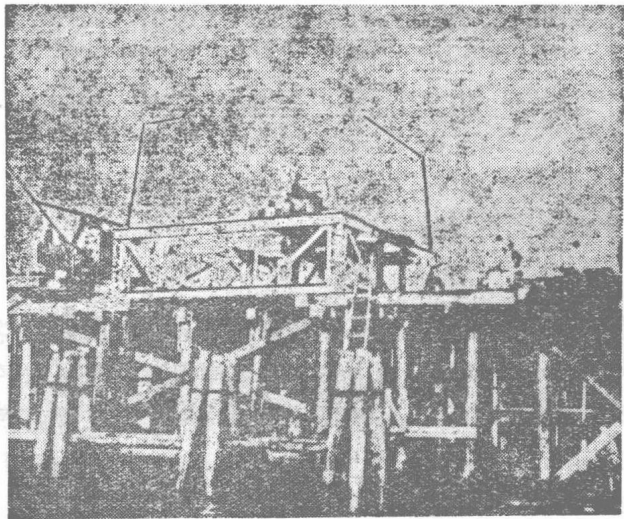


图3 1938年平台——得克萨斯州莫法敦海岸油田

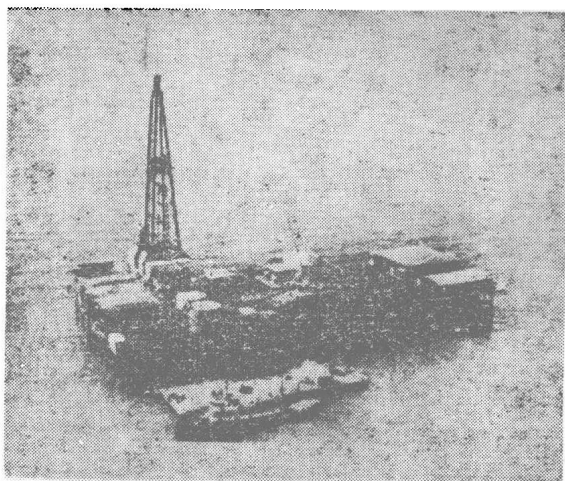


图4 1947年平台——沃密林71段油田，
用于水深20呎

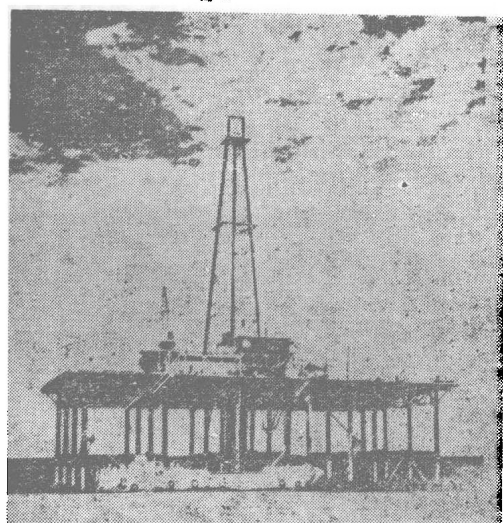


图6 1955年平台——哥兰德岛47段
油田，用于水深100呎

重船的起重能力与吊杆长度有限的缘故。1949年第一艘为海洋工程使用而建造的起重船投入了运转，它的船体尺寸为90呎×300呎，起重能力为150吨。1953年第二艘起重能力为250吨的起重船也工作了。

随着建筑技术的提高和更好设备的获得，设计也改进了。到五十年代中期，每根桩的尺寸增加到30吋外径，需要较少的桩，并且采用了更开阔的斜撑型结构。用于约100呎水深的第一个平台，其甲板尺寸为220呎×106呎，平台包括三个导管架，每个导管架有八根桩（见图6）。这是建立在墨西哥湾大型平台之一，所有甲板与导管架是用起重能力为250吨的起重船建造的，导管架是躺着制造的，放在水中被竖起来，然后放在运输驳船上运到安装地点。

下一个平台建于1959年，水深大大增加，它是4桩的带附属船最小尺寸的平台装置，水深为204呎，需要两个250吨起重船在安装地点将导管架从货驳上吊起放入水中（见图7）。

现在记录保持者是建于1967年夏，南帕斯（South Pass）62段340呎水深的平台，它基本上是一个八桩结构，并带有由于水深和土壤条件需要的护脚桩。由于导管架的重量，它在安装地点是从一个驳船上下滑入水的，八根桩与八根护脚桩全都是48吋外径，图8示出完成的平台和一个平台模型，用来说明结构的水下部分。

1965年，由于第一个500吨起重船的建成，可以在水深340呎处安置导管架。

截至1968年，墨西哥湾已建立了2000个以上油井平台，已经钻了9000个以上油井。今后固定式平台常常是放置在预先由活动平台或钻井船钻好

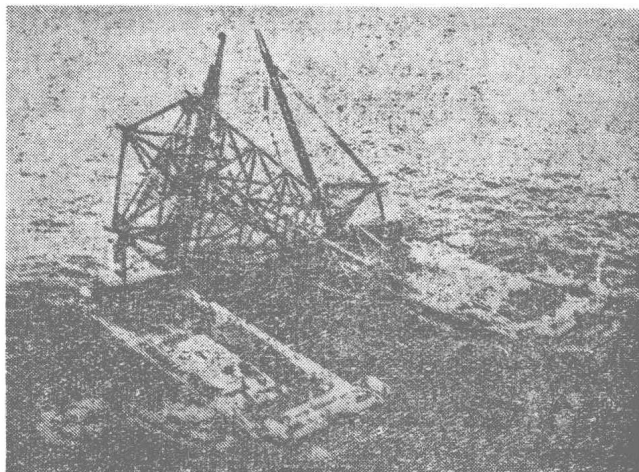


图7 1959年平台——南梯姆巴里尔131段油田，
用于水深200呎

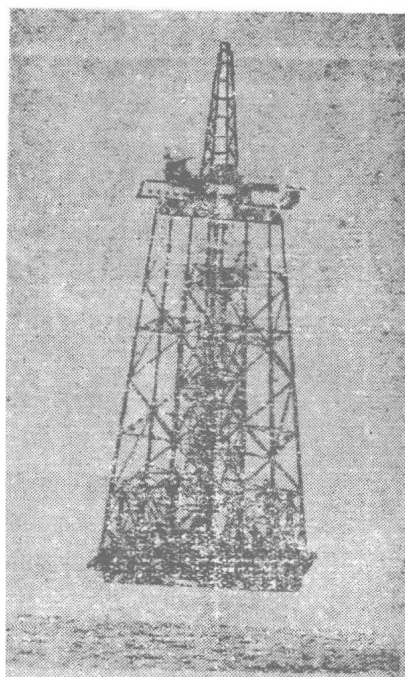
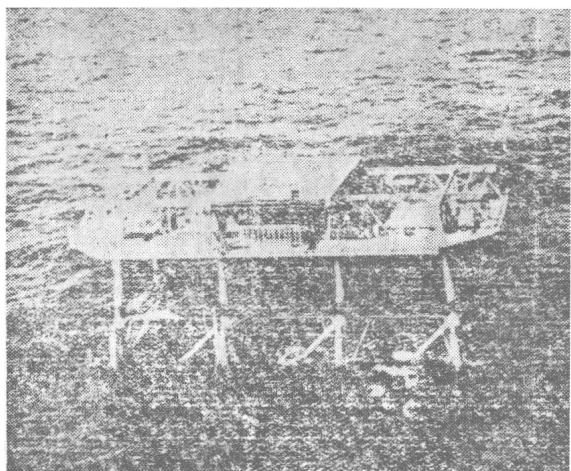


图8 1967年平台——南帕斯62段油田，用于水深340呎

的一个井上，其余的井则是从固定式平台上钻的。某些现行的工程计划是进行扩展现在平台的水深能力，模型试验和最终设计是向400呎到600呎水深范围发展。根据美国 G. C. Lee 的见解，固定式平台远远不是陈旧的，并无疑将用于大陆架的极限，考虑用于600呎水深。

固定式海上平台的类型：

从墨西哥湾固定式平台建筑的历史看，早期平台提供大的工作场地，设立标准陆地型钻机，并带有全部供应、设备与生活地区。因为当时从固定式平台钻井是唯一可利用的方法，为了寻求便宜的钻井方法，首次解决办法是用带供应船型式的平台，平台上仅设置钻机、绞车、主要钻井用机械和一些辅助设备，大多数重型设备，钻井供应和生活区则设在被叫做供应船的附属船上，这就可以使平台尺寸大为缩小。但是，它抵御恶劣天气的能力则大为减弱了，一迁到恶劣天气，就需要将供应船驶离平台，并停止钻井工作。

随着海洋工业技术的进步，为了减少钻井费用，可移式钻井装置（活动平台与钻井船）得到发展。可移式钻井装置是一个全装备型可移动的装置。它可以由一个钻井地方移运到另一个地方，到达位置后，临时支持在海底，并且留在这个位置直到钻井完成。可移式装置从钻井地方移开后，油井仍留在那里，这就提出要使用一个小平台来支承油井，也就是人们熟知的油井保护装置。这些最小尺寸的平台主要是用来支持导管抵抗风和波浪的作用力，并且为了生产的目的，预备出一个小面积的围绕井口的工作场地。

可移式钻井装置已经完善，并且能力增加了，甚至它可以在很深的水中钻井，但这种大型装置又大大地增加了投资，并反映在钻井费用的提高上。按 G. C. Lee 的意见，用可移式装置钻井费用的增加，导致了工作形式的发展——可移式装置通常用于勘探工作，而固定式平台用于钻井的发展阶段。

早期全装备型平台是按支持陆地型钻机设计的，很少想到最小需要空间。1955年型平台，其甲板尺寸为106呎×220呎。1956年全装备型装置开始更仔细地布置，每一个平台尺寸缩小

到大约110呎×140呎的面积。1960年一个新的发展方向是紧缩钻机到最小的需要面积，并且尽量缩小诸如泥浆、管材、燃料和水的供应量，这就成为今天最小全装备型钻井平台，平均甲板尺寸为66呎×118呎。

此外，在其他地区固定平台有一些不同的特点，如前所述在马拉开波湖有比墨西哥湾更多的平台，但是由于它是一个内陆湖，而不是大海，因此对其结构上的要求不是那么严格，并且通常平台较小，也不那么昂贵。由于马拉开波湖水有很高的腐蚀性，这些结构的大部分是用混凝土建造的，但是大约已有100个平台是由焊接的结构钢所建造。

仅次于墨西哥湾，波斯湾有最大量的在开阔水域中的平台。由于每个井出油量大，通常希望每个平台只钻一口井，所以在波斯湾大部分的结构型式采用油井保护装置，或是采用单井带附属船型的平台。这些结构与墨西哥湾平台相类似，只不过是按较低的风级设计的。相类似的结构，现在也大量地建筑在非洲海岸外，首先是尼日利亚海。

一些非常大的平台已建立在加利福尼亚海岸外，由于海岸坡度陡，深水靠岸近，通常控制设计不是风暴而是地震。由于地质和生产实践的不同，这些平台按支持大量油井设计，一些这样的平台是按“上倾”法建立的，这个方法是：用具有足够浮力的大直径腿柱，能使结构浮起呈水平位置，在到达位置上，用控制淹没法沉到海底，然后通过沉箱腿内的导沟打桩，一些桩也用作当钻井的导管。

阿拉斯加库克湾的全气候平台又有其不同特点，它必须按抵抗4~6呎厚的冰，35呎潮和10哩/时流设计。由于冰产生的水平力与暴风或地震条件相比是如此之大，以致典型的导管架平台不能满足要求。这些结构包括“上倾”平台在内，与在美国西海岸外用的那些相类似，但由于荷载增加了，重量也有所加大。在库克湾还曾建造了一个“独腿”的平台，建造方法是：用置于结构底部的水平浮箱把平台浮运到安置地点。由于在阿拉斯加地区遇到低温，这些结构的部分构件是用特殊高强度低温钢建造的。

固定式海上平台的设计问题：

开始设计一个平台时，需要确定其工作要求和设计标准。一个海上平台必须满足它的预定目的，并且结构上必须适当，建造方法必须实际，费用必须合理。一个海上平台的设计包含所有这些因素的考虑，首先需要阐明建造程序，换句话说，结构必须按照安置方法设计，然后按所支承的设备重量和由自然力诸如风、波、潮、流、冰或地震所形成的水平荷载设计。

结构按设备和供应重量设计没有提出新问题，因为可以参考用于其他结构同样的设计方法。平台设计中对于水平荷载则不能直接与其他结构设计相比，因为在海洋环境中这些水平荷载是巨大的，所用实际的设计方法，一个设计人员与另一个设计人员可能有所不同，然而，其结果一般地是相似的。目前结构设计通常是用电子计算机完成的。

海上平台建筑的早期，有关设计标准的基本资料是很有限的，最初的设计计算只能粗略地考虑。但是，今天所用的很多建筑概念是在早期阶段发展的，今天设计者做的许多工作是由于应用了工程数学而发展和扩大了早期的概念。

显然，从最开始就存在着对海上平台设计特别关键的三个方面的问题。这些问题是波压力、桩的侧向荷载和由管联结的结构节点，现分别简要叙述如下：

波压力：第一座海上平台设计时，关于在无掩蔽的水域中开敞骨架型结构所受波压力的知识很少。当时可以得到的资料大部分是关于作用在海堤上的波压力，而海堤是全部波压力

作用在上面的。随着海上石油工业的发展，波压力预报的科学在过去二十多年中是惊人地得到改进，虽然滨海工作者对采用的波浪标准还有分歧，但在波浪理论上还是相当一致的。关于波压力的知识，从前只是提供设计人员一个作用在海底以上指定高度的简单结果，今天这个知识通常是提供在一个座标系统上包括拖曳力和惯性力的图表。

桩的分析：从最早对海上平台的分析表明，桩不仅需要支持轴向荷载、而且需要支持很大的水平荷载。轴向荷载对设计人员来说没有提出新问题，但是，海上结构需要承受这么大的水平荷载则是建筑上的新问题。在那时没有满意的分析方法，“嵌固点”在淤泥线以下一个假定的距离的概念，对于比较小的荷载来说是可以相当满意的，然而，对于软土条件下的大荷载，这个方法完全不能证明是正确的。被采用的各种方法，包括古典的作用在挡土墙上主动与被动土压力的概念、假设桩是一个条形基础、或者假设桩是一根弹性地基梁。加之，二十多年来对这一问题的试验与研究，已经获得了可靠的分析方法，这个分析需要在当地钻探土壤，并作土力试验去确定它的强度和弹性性质。数学计算是十分复杂的，通常需要用计算机来解。

节点设计：海上平台利用管子作为波峰顶高程以下的结构杆件，这就需把不同尺寸的管状杆件焊接起来，在1947年时，几乎还没有连接管节点的知识，抱着假定壁厚可阻止冲剪的一些想法，将撑杆简单地焊在导管架腿上的型式是失败了。不久就显然看出：管节点是结构系统的“薄弱环节”。采取了许多加强节点的措施，研究指出：从静载荷观点看来，这些加强型式是合适的，但是产生的集中应力引起疲劳问题。虽然现在节点已有很多改进，但不可能获得完全满意的设计方法，尚须继续研究。

此外固定式海上平台设计中还会遇到地区特殊荷载与金属防腐以延长结构寿命等问题。在有些地区冰情严重，冰荷载成为海上平台结构的控制荷载。如有些地区地震厉害，地震荷载也会成为控制荷载。设计人员对地区特殊荷载应予充分地考虑。但到目前为止，对这些特殊荷载的研究尚不充分。人们知道海水是易于腐蚀金属的介质，如考虑不周，极大地影响结构的寿命。近来对金属腐蚀的本质有了比较深入的认识，目前国外对海上工程结构物广泛地采用电化学防腐的方法。

正如前述，国外固定式海上平台的设计，在二十多年中积累了不少科学知识。本着“洋为中用”的方针，我们编译了有关波压力、冰荷载与防冰措施，桩的分析，管节点强度设计、金属防腐等几个方面的问题。在管节点设计方面，可以说尚没有工程人员满意的设计方法，从国外目前研究的情况看，提出了用“有限单元法”以电子计算机解答的新课题。为了便于读者了解这种方法，也将有限单元法作为附录一并编译出版。

第一章 作用在孤立桩柱上波压力的计算

§1-1 概 述

无论是固定式海上平台，也无论是自升式或腿柱稳定式海上钻井平台，在设计中波压力是必需认真考虑的外荷之一，在作用于滨海建筑物上的外力当中，波压力是最不容易计算的困难问题之一。

关于建筑物设计波高，虽然发表有种种计算方法，但是，最可信赖的数值，是从长期观测的结果得来的，所以应将计算值与过去的实测值相对照，结合起来下最后的判断。

波高有种种定义，即（1）最大波高；（2）1/10最大波高——对于在一定期间内观测到的波，将其所有高度顺次排列，从大的方面选取其1/10的范围，加以平均而得出的波高值；（3）有效波高——对于在一定期间内观测到的波，将其所有高度顺次排列，从大的方面选取其1/3的范围，加以平均而得出的波高值；一般谈到波高时，就是指的这个波高值，因为用目力观察，实际上趋近于此值的原故；（4）平均波高——在一定期间内观测到的波高的平均值。

建筑物设计中所采用的波高，随建筑物的种类及其重要程度而异，如对于防波堤整体中沉箱滑动稳定性的分析，以及简易抛石堤中复盖石块重量的计算，采用有效波高；对于防波堤堤顶高度的决定，以及为防止基础冲刷用以加固根部的块体重量的决定，则采用1/10最大波高；但是，对于像固定平台这样的滨海建筑物，局部的一次破坏，会导致整体的倾覆，所以必须采用最大波的诸要素来进行设计。

最大波高、1/10最大波高、有效波高、平均波高之间的关系大致如下：

$$H_{max} = 1.86 H_{1/3}$$

$$H_{1/10} = 1.3 H_{1/3}$$

$$H_{1/3} = 1.6 H_{ave}$$

作用在孤立桩柱上波压力的计算问题，自从第二次世界大战以后，随着滨海钻井平台、雷达站和其他海上建筑物的发展，进行了广泛的实验与研究。主要研究者有美国人 J. R. Morison (1950) Alonzo Def. Quinn (1961) 和苏联人 Д. Д. Яанно (1960) 等，他们建立了取得作用在孤立桩柱上总波压力与相应的倾覆力矩的公式。

直到目前为止，在工程设计中仍被广泛采用的是莫里森 (Morison) 公式，它是以绕流理论为基础的半理论半经验的公式。

莫里森公式：作用于海中直立桩上的单位长度上的波压力，可用下式表示之，

$$f = \frac{1}{2} \rho C_D D u |u| + \rho C_M \frac{\pi}{4} D^2 \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1-1)$$

式中 f ——单位长度桩上所受到的波压力；

ρ ——海水的质量密度， $\rho = \frac{W}{g}$ W 为海水单位体积重量， g 为重力加速度；

u ——由于波浪运动在该处产生的垂直于桩的水质点速度；
 $\frac{\partial u}{\partial t}$ ——由于波浪运动在该处产生的垂直于桩的水质点加速度；
 D ——桩径；
 C_D ——拖曳力系数；
 C_M ——惯性力系数。

式(1-1)中第一项表示水平速度引起的拖曳力，第二项表示水平加速度所引起的惯性力。

水质点速度与加速度决定于波浪要素及水深，不仅随水面至力作用点的距离不同而变化，也随波浪相位的不同而变化。桩上所受总力可从海底到水面将式(1-1)积分求得(见图1-1)，如取力矩进行积分则可求得总倾覆力矩。

应当指出：上式仅包括波浪运动的效果，并不包括潮流或海流，但是，假如在一个特殊地方，它们被认为是重要而不可忽视的时候，在设计中也应加以考虑。

运用莫里森公式可以看出：计算波压力的主要问题是(1)选择合适的波浪理论去计算波浪内水质点的速度与加速度；(2)选择适当的拖曳力系数与惯性力系数。

滨海平台多在浅水中工作，也可能在深水中工作，所谓浅水与深水的界限，通常是指水深小于或大于半倍波长而言的，波浪按照边界条件与解法而有很大差别，分为微幅波理论与有限振幅波理论。其代表是：微幅波理论——爱利波(Airy wave)，有限振幅波理论——斯托克斯波(Stoke's wave)坦谷型波(Cnoidal wave)，孤立波(Solitary wave)。微幅波是这样的一种波，其波高与水深相比是非常之小，因此，如在浅水中仍用微幅波理论计算水质点速度则是不适当的，故浅水时，即 $h < L/2$ (h 为水深， L 为波长)时应当采用有限振幅波理论。外国海洋钻井的文献与许多报告中，都认为应用有限振幅波理论作为波力计算的基础。

关于拖曳力系数与惯性力系数，从实验室和现场观测得到的数值非常分散，变化范围是 $0.40 < C_D < 1.60$ ， $0.93 < C_M < 2.30$ ，这说明选择有确实根据的系数是相当困难的，而系数的选取又对波压力的数值影响很大，所以必须非常慎重地对待。

对于作用于孤立桩柱上波压力的研究远远还不能认为是满意的，因为实际上作用于桩柱上的波压力是不稳定流、不均匀流的结果，该不稳定不均匀流是以桩柱后尾流为表征的，关于不稳定流里漩涡的实际资料是不多的，同时对一垂直单桩来说，结构的自振周期有可能与发放漩涡的周期很接近，以致二者偶合产生一种自激的共振振动，就是说桩的侧向振动加强漩涡的发放，转而造成更大的漩涡力，如此循环，对稳定流来说，如风对烟囱的吹力已经相当好地被研究过，但在不稳定流如波浪的情况下，还少有合适的资料可用。

莫里森公式是建立在稳定流拖曳力的理论基础上，由于考虑波浪是不稳定流的情况加上一项由物体附近的加速或减速产生的一个惯性力，并且通过实验的途径解决确定拖曳力系数与惯性力系数数值问题的。所以说许多还没有被人们认识的因素统统包含在这两个系数中。如果系数选取适当或通过实验加以验证后，莫里森公式可与实际情况较为符合，故在工程设

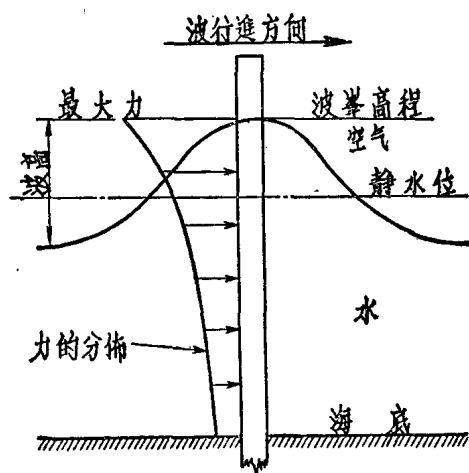


图1-1 波浪与作用在垂直单桩上波压力草图

计中仍得到广泛地采用。

根据日本运输省技术研究所水工部的实验及设置在日本海中的各种海洋建筑物的许多实践,大致得出如下见解:如令波高为 H ,桩径为 D 则:

1. $\frac{H}{D} = 2 \sim 5$ 时,式(1-1)中由拖曳力产生的力矩与由惯性力产生的力矩是同样重要的;
2. $\frac{H}{D} > 10$ 时,惯性力与拖曳力相比,前者可以略去不计;
3. $\frac{H}{D} < 1$ 时,与上相反,拖曳力实际上可以略去不计。

对作用在大直径桩柱上波压力的研究表明:当桩径与波长相比不能忽略时,波与桩相互作用将引起波浪的变形、反射与绕射,此时,以绕流理论为基础的莫里森公式就不适用了。关于作用在大直径桩柱上波压力研究中的绕射理论,已由 R. C. Mac Camy 和 R. A. Fuchs 研究并建立了波压力与倾复力矩的公式; R. Bonnefille 与 P. Germain 进行了实验室内的研究;但是尚无大量资料可去验证它的真实性,是今后继续深入研究的一项课题。

§1-2 波 浪 理 论

一、基本的流体动力学方程

波浪运动的基本方程是非压缩无旋理想液体的运动方程与连续方程,并考虑所处的边界条件而得到的。运动方程加以合并并积分给出不稳定流无旋运动的伯努里方程式:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + \omega^2) + \frac{p}{\rho} + gz = f(t) \quad (1-2)$$

式中 ϕ ——流速势;

u ——水质点速度的水平分量(dx/dt);

v ——水质点速度的与 u 垂直的水平分量(dy/dt);

ω ——水质点速度的垂直分量(dz/dt);

p ——压力;

ρ ——质量密度;

g ——重力加速度;

z ——垂直坐标,从静水位以上为正;

x ——水平坐标,与波浪行进方向一致;

y ——水平坐标,与波浪行进方向垂直;

t ——时间。

(1-2)式中, $f(t)$ 是一个任意的时间函数(积分常数),时常使之并入 $\partial \phi / \partial t$ 项中。连续方程为拉普拉斯方程式:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1-3)$$

坐标系统示于图1-2,方程式(1-2)与(1-3)必须连同边界条件来解,其边界条件为:在海底的边界条件:

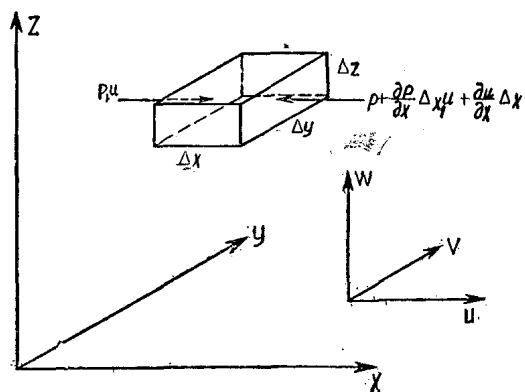


图1-2 单元液体受力的坐标系统

$$\omega = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad z = -d \quad (1-4)$$

运动学上的自由表面条件:

$$\left(\frac{dz}{dt} \right)_{z=\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (1-5)$$

动力学上的自由表面条件

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + g\eta = 0 \quad (1-6)$$

式中, 微分全是当 $z = \eta$ 求值, η 为波面高度, 即波面在静水位以上高度。

公式(1-2)至(1-6)代表普通自由表面波问题, 但边界 $z = \eta$ 仍是未知的, 由于这个原因波浪运动的一般解是非常复杂的。需要使用扰动法 (Perturbation technique), 假定其解为一级数的形式, 该级数能够满足波浪方程式。级数中的参数必须选择, 三个独立的参数可以描述一个波: 波高 H 、波长 L 与水深 d , 控制的参数为 HL^2/d^3 , 但是不可能按照这个参数去展开一个级数求解, 对于很深的水取 H/L 的升幂来展开, 在浅水中则需以 H/d 展开, 这两种展开形式分别得到正弦型波 (Sinusoidal wave) 与坦谷型波 (Cnoidal wave)。

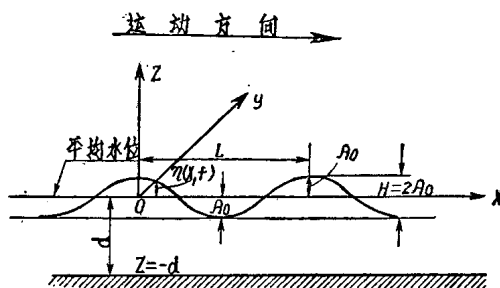


图1-3 微幅波坐标系统

二、正弦型(司托克斯)波

坐标系统如图1-3所示, 波行进方向为 $o-x$, 关于 $o-y$ 轴方向的变化取为零。流速势 ϕ 的解假定为 KA_0 的升幂级数。式中 $k = 2\pi/L$, L 为波长, $A_0 = H/2$, H 为波高, 即波峰与波谷之间的高差。其关系式为:

$$\phi = -\frac{C}{k} \sum_{n=1}^N a_n (kA_0)^n \frac{\cosh nk(d+z)}{\sinh nkd} \sin n\theta \quad (1-7)$$

式中 C ——波速;

θ ——相位角; 等于 $\frac{2\pi x}{L} - \frac{2\pi t}{T}$;

T ——波周期;

a_n —— $\cosh kd$ 与 $\sinh kd$ 的多项式。

相应的波形剖面与表面以下质点速度是:

$$\eta = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^N b_n (kA_0)^n \cos n\theta \quad (1-8)$$

$$u = C \sum_{n=1}^N na_n (kA_0)^n \frac{\cosh nk(d+z)}{\sinh nkd} \cos n\theta \quad (1-9)$$

$$\omega = C \sum_{n=1}^N na_n (kA_0)^n \frac{\sinh nk(d+z)}{\sinh nkd} \sin n\theta \quad (1-10)$$

式中 b_n 也是 $\cosh kd$ 与 $\sinh kd$ 的多项式, 更详细地了解可参阅关于高阶波理论的专门文献。

三、爱利波 (Airy wave)

爱利波可直接从线性流体动力学方程得到, 亦可根据正弦型波浪公式求出。如果将高阶项忽略, 取 $N = 1$, 此时系数 a_1 与 b_1 皆为 1, 那么即可得到爱利波理论公式。忽略高阶项仅对微幅波才是适用的, 但这种近似解迄今被应用在大波运动的许多情况, 应当指出: 爱利波仅为近似值, 当波高越大则越不精确。

爱利波公式:

$$\phi_1 = -\frac{H}{2} C \frac{\cosh k(d+z)}{\sinh kd} \sin \theta \quad (1-11)$$

$$\eta = \frac{H}{2} \cos \theta \quad (1-12)$$

$$u = \frac{\pi H}{T} \frac{\cosh k(d+z)}{\sinh kd} \cos \theta \quad (1-13)$$

$$w = \frac{\pi H}{T} \frac{\sinh k(d+z)}{\sinh kd} \sin \theta \quad (1-14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2\pi^2 H}{T^2} \frac{\cosh k(d+z)}{\sinh kd} \sin \theta \quad (1-15)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{2\pi^2 H}{T^2} \frac{\sinh k(d+z)}{\sinh kd} \cos \theta \quad (1-16)$$

$$p = \rho g \frac{H}{2} \frac{\cosh k(d+z)}{\cosh kd} \cos \theta - \rho g z \quad (1-17)$$

$$C^2 = \frac{g}{k} \tanh kd \quad (1-18)$$

式中 $\theta = kx - \omega t$,

$$k = \frac{2\pi}{L},$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}。$$

波群速 (与波能量传播的速度相同) 为:

$$C_g = nC \quad (1-19)$$

$$\text{式中 } n = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2kd}{\sinh 2kd} \right]。$$

因为能量守恒, 波浪从无限深水行进到有限深水中, 波高将从 H_0 变到 H , 此时,

$$H = K_s H_0 \quad (1-20)$$

$$K_s = \tanh kd \left(1 + \frac{2kd}{\sinh 2kd} \right)^{-\frac{1}{9}}$$

波长、波周期与水深的关系示于图1-4, 水深、波周期与波速的关系示于图1-5, 高阶项的效果示于图1-6与图1-7。

为了计算简便起见, 下面给出爱利波理论的 d/L_0 函数表 (见附录一) 此表的用法是: 如已知波周期 T 与水深 d , 则

(1) 计算深水中波长 $L_0 = g/2\pi T^2 = 5.12T^2$ (呎)。

(2) 计算 d/L_0 。

(3) 从表中查出欲求的数值 (可用插入法计算)。

(4) 由公式 $L = L_0 \tanh kd$, $C = L/T$ 求得波长 L 及波速 C 。

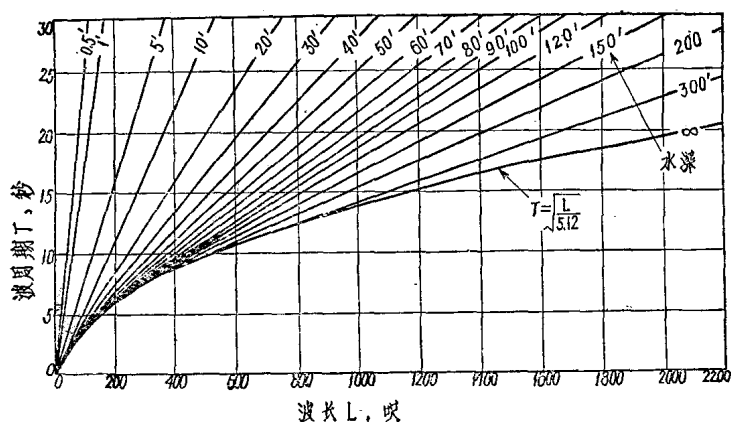


图1-4 波周期、波长与水深的关系 (爱利波理论)

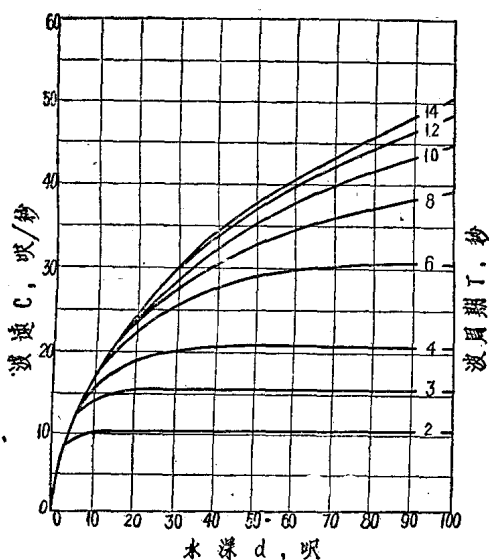


图1-5 波周期、波长与波速的关系 (爱利波理论)

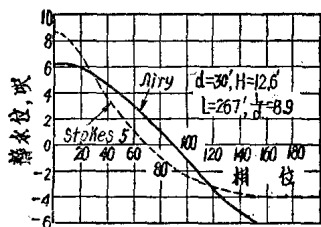


图1-6 爱利波与五阶司托克斯波波形剖面的比较

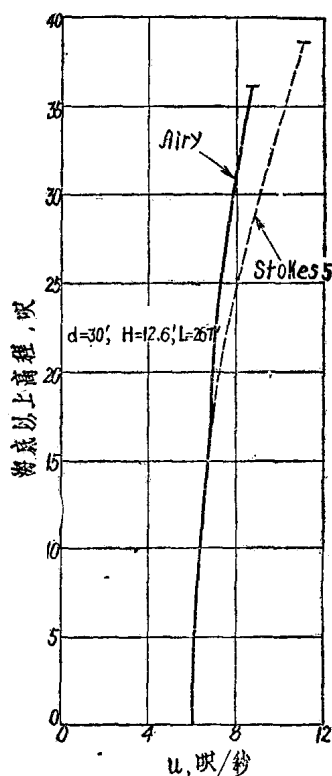


图1-7 爱利波与五阶司托克斯波波峰处水质点水平速度的比较

四、坦谷型波

在浅水中，高阶司托克斯波是有缺陷的，因为从来也没有证实过 $(H/L)^n$ 的级数是收敛的，所以甚至在非常浅水中也时常采用爱利波，但是如果水深太浅的话，会弄出一些不可思议的奇怪现象，并应指出：对任何有限振幅波，爱利理论不能满足动力学上自由表面的条件。