内容提要

本书包括事件与概率、离散型随机变量、连续型随机变量、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、点估计、假设检验、方差分析和回归分析、数理统计的一些应用等九章，可供高等师范院校与高等师范专科学校数学系作为试用教材使用。

本书由严士健教授审阅。

高等学校试用教材

概率论与数理统计教程

华东师范大学数学系　编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 16.75　字数 404,000

1983 年 10 月第 1 版　1984 年 4 月第 1 次印刷

印数 00,001—34,500

书号 13010·0946　　定价 1.95 元

目　录

引　言

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律的一门数学分科. 什么是随机现象呢?让我们先做两个简单的试验.

试验 I: 一个盒子中有十个完全相同的白球, 搅匀后从中任意摸取一球.

试验 II: 一个盒子中有十个相同的球, 但 5 个是白色的, 另外 5 个是黑色的, 搅匀后从中任意摸取一球.

对于试验 I, 在球没有取出之前, 我们就能确定取出的必定是白球. 这种试验, 根据试验开始时的条件, 就可以确定试验的结果. 而对于试验II来说, 在球没有取出以前, 我们从试验开始时的条件, 不能确定试验的结果(即取出的球)是白的还是黑的. 也就是说一次试验的结果, 出现白球还是出现黑球, 在试验之前是无法确定的. 对于这一类试验, 骤然一看, 似乎没有什么规律可言. 但是, 实践告诉我们, 如果我们从盒子中反复多次取球(每次取出一球, 记录球的颜色后仍把球放回盒子中并且搅匀), 那么总可以观察到这样的事实: 当试验次数 n 相当大时, 出现白球的次数 $n_{白}$ 和出现黑球的次数 $n_{黑}$ 是很接近的, 比值 $\frac{n_{白}}{n}$(或 $\frac{n_{黑}}{n}$) 会逐渐稳定于 $\frac{1}{2}$. 出现这个事实是完全可以理解的, 因为在盒子中白球数等于黑球数, 从中任意摸取一个球, 取得白球或黑球的“机会”应该是平等的.

于是, 我们面对着两种类型的试验. 试验 I 所代表的类型, 在试验之前就能断定它有一个确定的结果, 这种类型的试验所对应的现象, 称为**确定性现象**. 确定性现象非常广泛, 例如:

“早晨，太阳必然从东方升起.”

“苹果，不抓住必然往下掉.”

“边长为 a、b 的矩形，其面积必为 $a\cdot b$.”

“一个质点在 t 秒钟沿直线移动的距离为 $s(t)$，则此质点移动的速度必定是 $v(t)=\frac{ds(t)}{dt}$.”

……

过去我们所学的各门数学课程基本上都是用来处理和研究这类确定性现象的.

试验 II 所代表的类型，它有多于一种可能的试验结果，但是在一次试验之前不能肯定试验会出现哪一个结果. 就一次试验而言，看不出有什么规律. 但是，“大数次”地重复这个试验，试验结果又遵循某些规律，这种规律称之为“统计规律”，这一类试验称为**随机试验**，试验所代表的现象称为**随机现象**. 在客观世界中随机现象是极为普遍的，例如：

“某地区的年降雨量”

“检查流水生产线上的一件产品，是合格品还是不合格品？”

“某电话交换站在单位时间内收到用户呼唤的次数”

“打靶射击时，弹着点离靶心的距离”

……

概率论与数理统计就是研究随机现象的统计规律的数学学科，由于随机现象的普遍性，使得概率论与数理统计具有极其广泛的应用. 近年来，一方面它为科学技术、工农业生产等的现代化作出了重要的贡献；另一方面，广泛的应用也促进概率论与数理统计有了极大的发展.

第一章 事件与概率

§1.1 随机事件和样本空间

我们在引言中已经介绍了随机试验，现在进一步明确它的含意. 一个试验如果满足下述条件:

(1) 试验可以在相同的情形下重复进行;

(2) 试验的所有可能结果是明确可知道的，并且不止一个;

(3) 每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个，但在一次试验之前却不能肯定这次试验会出现那一个结果.

就称这样的试验是一个**随机试验**，为方便起见，也简称为**试验**.

随机试验的每一个可能的结果，称为**基本事件**. 因为随机试验的所有结果是明确的，从而所有的基本事件也是明确的，它们的全体，称作**样本空间**，通常用字母Ω表示. Ω中的点，即基本事件，有时也称作**样本点**，常用ω表示.

例 1.1 在前述试验 II 中，令

$$\omega_1=\{\text{取得白球}\},\quad \omega_2=\{\text{取得黑球}\}$$

则

$$\Omega=\{\omega_1, \omega_2\}$$

例 1.2 一个盒子中有十个完全相同的球，分别标以号码 1, 2, …, 10, 从中任取一球，令

$$i=\{\text{取得球的标号为 } i\}$$

则

$$\Omega=\{1, 2, \cdots, 10\}$$

例 1.3 讨论某电话交换台在单位时间内收到的呼唤次数，令

$$i=\{\text{收到的呼唤次数为 } i\}$$

则

$$\Omega=\{0, 1, 2, \cdots\}$$

例 1.4 测量某地水温，令

$$t=\{\text{测得的水温为 } t\,^{\circ}\mathrm{C}\}$$

则

$$\Omega=[0, 100]$$

在随机试验中，有时关心的是带有某些特征的基本事件是否发生．如在例 1.2 中，我们可以研究

$$A=\{\text{球的标号}=6\}$$

$$B=\{\text{球的标号是偶数}\}$$

$$C=\{\text{球的标号}\leqslant 5\}$$

这些结果是否发生？其中 A 是一个基本事件，而 B 与 C 则由多个基本事件所组成，相对于基本事件，就称它们是**复杂事件**．无论是基本事件还是复杂事件，它们在试验中发生与否，都带有随机性，所以都叫做**随机事件**或简称为**事件**．习惯上人们常用大写字母 A，B，C 等表示事件．在试验中，如果出现 A 中所包含的某一个基本事件 ω，则称作 A **发生**，并记作 $\omega\in A$．

我们已经知道样本空间 Ω 包含了全体基本事件，而随机事件不过是有某些特征的基本事件所组成，所以从集合论的观点来看，一个随机事件不过是样本空间 Ω 的一个子集而已．如在例 1.2 中，$\Omega=\{1, 2, \cdots, 10\}$，显然，前述的随机事件 A、B、C 都是 Ω 的子集，它们可以简单地表示为 $A=\{6\}$，$B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$，$C=\{1, 2, 3, 4, 5\}$．

又因为 Ω 是所有基本事件所组成，因而在任一次试验中，必然要出现 Ω 中的某一基本事件 ω，即 $\omega\in\Omega$．也就是在试验中，Ω 必然

会发生，所以今后又用Ω来代表一个**必然事件**．相应地，空集$\varnothing$可以看作是Ω的子集，在任意一次试验中，不可能有$\omega\in\varnothing$，也就是说$\varnothing$永远不可能发生，所以$\varnothing$是**不可能事件**．必然事件和不可能事件的发生与否，已经失去了“不确定性”，因而本质上它们不是随机事件．但是为了方便起见，我们还是把它们看作随机事件，稍后我们会理解，它们不过是随机事件的两个极端情形而已．

一个样本空间Ω中，可以有很多的随机事件．概率论的任务之一，是研究随机事件的规律，通过对较简单事件规律的研究去掌握更复杂事件的规律．为此，需要研究事件之间的关系和事件之间的一些运算．

如果没有特别的声明，在以下的叙述中总认为样本空间Ω已经给定，并且还给定了Ω中的一些事件，如A、B、A_i $(i=1,2,\cdots)$等等．

1．如果事件A发生必然导致事件B发生，则称B**包含**了A，或称A是B的**特款**，并记作$A\subset B$或$B\supset A$．比如在前面提到过的$A=\{$球的标号$=6\}$这一事件发生就导致事件$B=\{$球的标号是偶数$\}$的发生．因为摸到标号为6的球意味着标号为偶数的球出现了，所以前者是后者的特款，也就是后者包含了前者．

可以给上述的含意以一个直观的几何解释．设样本空间Ω是一个正方形(见图1.1)，A与B是两个事件，也就是说是Ω的某两个子集．“A发生必然导致B发生”意味着“属于A的ω必然属于B”，即A中的点全在B中，其几何图形如右所示：

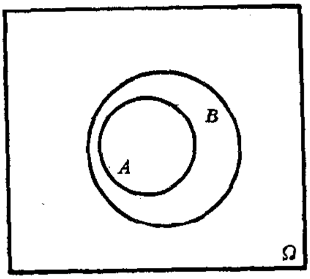

图 1.1

由此可知，事件$A\subset B$的含意与集合论中的意义是一致的．

因为不可能事件$\varnothing$不含有任何ω，所以对任一事件A，我们约

定

$$\varnothing \subset A$$

2. 如果有 $A \subset B, B \subset A$ 同时成立，则称事件 A 与 B **相等**，记作 $A=B$. 易知，相等的两个事件 A、B，总是同时发生或同时不发生.

如在例 1.2 中，若

$$A=\{球的标号为偶数\}$$

$$B=\{球的标号为 2、4、6、8、10\}$$

则显然有 $A=B$. 直截了当地说，所谓 $A=B$，就是 A、B 中含有相同的样本点. 因而，上述关于 $A=B$ 的说法，看起来有点"绕圈子"，但是稍后你就会明白，这种"绕圈子"的说法，在验证两个事件是否相等时，是非常有用的，在许多情形中可以说是唯一的一种方法.

3. "事件 A 与 B 中至少有一个发生"，这样的一个事件称作事件 A 与 B 的**并**(或**和**)，并记作 $A \cup B$. 它的几何表示如下图:

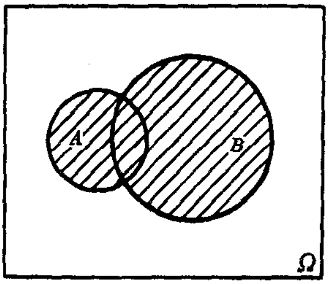

图 1.2

图中的阴影部分是事件"$A \cup B$". 如在例 1.2 中，若

$$A=\{球的标号为偶数\}$$

$$B=\{球的标号\leqslant 3\}$$

则

$$A \cup B=\{球的标号为 1、2、3、4、6、8、10\}$$

4. “事件 A 与 B 同时发生”，这样的事件称作事件 A 与 B 的**交**（或**积**），记作 $A\cap B$（或 AB），它对应图 1.3 中的阴影部分：

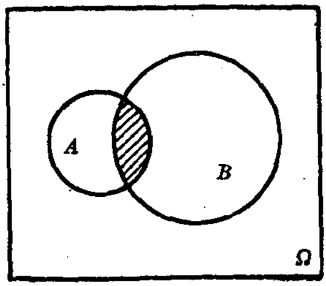

图 1.3

如在例 1.2 中，若 A、B 同上，则

$$A\cap B=\{\text{球的标号为 }2\}$$

5. “事件 A 发生而 B 不发生”，这样的事件称为事件 A 与 B 的**差**，记作 $A-B$，它表示了图 1.4 中的阴影部分：

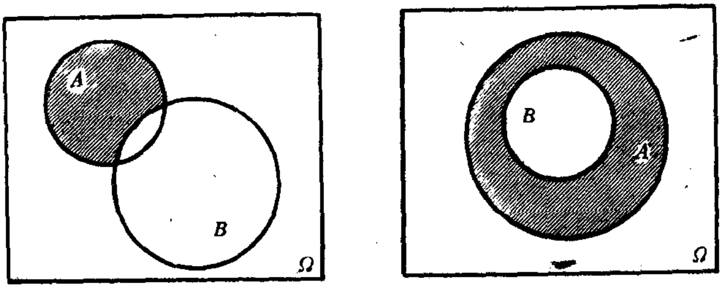

图 1.4

如在例 1.2 中，若 A、B 同上，则

$$A-B=\{\text{球的标号为 }4、6、8、10\}$$

6. 若事件 A 与 B 不能同时发生，也就是说 AB 是一个不可能事件，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与 B **互不相容**．下面的图 1.5 表示了这一情形；

如在例 1.2 中，若

$$A=\{\text{球的标号为偶数}\}$$

$$B=\{\text{球的标号为 }3\}$$

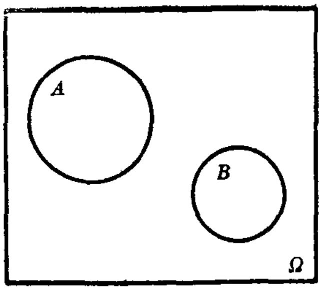

图 1.5

则显然 A 与 B 不可能同时发生，即有 $AB=\varnothing$，也就是说 A 与 B 是互不相容的.

7. 若 A 是一个事件，令 $\bar{A}=\Omega-A$，称 $\bar{A}$ 是 A 的**对立事件**或**逆事件**. 容易知道，在一次试验中，若 A 发生，则 $\bar{A}$ 必不发生（反之亦然）即 A 与 $\bar{A}$ 二者只能发生其中之一，并且也必然发生其中之一. 因而有

$$A\bar{A}=\varnothing$$

$$A\cup\bar{A}=\Omega$$

此外显然有

$$\bar{\bar{A}}=A$$

如在例 1.2 中，若

$$A=\{\text{球的标号为偶数}\}$$

则

$$\bar{A}=\{\text{球的标号为奇数}\}$$

8. 若有 n 个事件：$A_1, A_2, \cdots, A_n$，则“$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少发生其中的一个”这样的事件称作 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并，并记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$；若“$A_1, A_2, \cdots, A_n$”同时发生”，这样的事件称作 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的交，记作 $A_1A_2\cdots A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$.

如果读者已经有了一定的集合论知识．一定会发现事件间的关系及运算与布尔(Boole)代数中集合间的关系及运算之间是完全可以互相类比的．下面给出这种类比的对应关系：

概率论	集合论
样本空间	$\Omega=\{\omega\}$
事件	子集
事件 A 发生	$\omega\in A$
事件 A 不发生	$\omega\overline{\in} A$
必然事件	Ω
不可能事件	$\varnothing$
事件 A 发生导致事件 B 发生	$A\subset B$
“事件 A 与 B 至少有一个发生”	$A\cup B$
“事件 A 与 B 同时发生”	$A\cap B$(或 AB)
“事件 A 发生而 B 不发生”	$A-B$
事件 A 与 B 互不相容	$AB=\varnothing$

在许多场合，用集合论的表达方式显得简练些，也更容易理解些．但对初学概率论的读者来说，重要的是要学会用概率论的语言来解释集合间的关系及运算，并能运用它们．

例 1.5 设 A、B、C 是 Ω 中的随机事件，则

事件“A 与 B 发生，C 不发生”可以表示成 $AB\overline{C}$，

“A、B、C 中至少有二个发生”可以表示成 $AB\cup AC\cup BC$，

“A、B、C 中恰好发生二个”可以表示成 $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup \overline{A}BC$，

“A、B、C 中有不多于一个事件发生”可以表示成

$$\overline{A}\overline{B}\overline{C}\cup A\overline{B}\overline{C}\cup \overline{A}B\overline{C}\cup \overline{A}\overline{B}C$$

事件的运算满足下述规则：

(1) 交换律： $A\cup B=B\cup A,\ AB=BA$ (1.1)

(2) 结合律： $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ (1.2)

$$(AB)C = A(BC) \tag{1.3}$$

(3) 分配律: $(A\cup B)\cap C = AC\cup BC$ (1.4)

$$(A\cap B)\cup C = (A\cup C)\cap(B\cup C) \tag{1.5}$$

(4) 德摩根(De Morgan)定理(对偶原则):

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} \tag{1.6}$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i} \tag{1.7}$$

这些规律是不难证明的. 这里我们用集合论的语言证明其中的(1.5)及(1.6)两式作为范例, 请读者把它“翻译”成概率论的语言并证明其余各式以为练习.

(1.5)式的证明:

设 $\omega\in(A\cap B)\cup C$, 则

$$\omega\in A\cap B \quad 或 \quad \omega\in C$$

若 $\omega\in A\cap B$, 即有

$$\omega\in A, \omega\in B$$

同时成立, 也就有

$$\omega\in A\cup C, \omega\in B\cup C$$

同时成立, 即

$$\omega\in(A\cup C)\cap(B\cup C)$$

若 $\omega\in C$, 这表明同时有

$$\omega\in A\cup C, \omega\in B\cup C$$

成立, 从而也有

$$\omega\in(A\cup C)\cap(B\cup C)$$

所以无论 $\omega\in A\cap B$ 或 $\omega\in C$, 都有

$$\omega\in(A\cap C)\cap(B\cup C)$$

成立. 这说明

$$(A\cap B)\cup C\subset(A\cup C)\cap(B\cup C)$$

成立. 反过来，设有 $\omega\in(A\cup C)\cap(B\cup C)$, 则有

$$\omega\in A\cup C, \omega\in B\cup C$$

同时成立. 如果 $\omega\in C$, 则

$$\omega\in(A\cap B)\cup C$$

为显然. 如果 $\omega\overline{\in}C$, 则由 $\omega\in A\cup C, \omega\in B\cup C$ 知必有

$$\omega\in A, \omega\in B$$

同时成立. 于是 $\omega\in A\cap B$, 所以也有

$$\omega\in(A\cap B)\cup C$$

这就意味着

$$(A\cap B)\cup C\supset(A\cup C)\cap(B\cup C)$$

由于同时有"$\subset$","$\supset$"关系成立, 所以

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$$

(1.6) 式的证明:

设 $\omega\in\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}$, 即 $\omega\overline{\in}A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$, 这表明 ω 不属于 A_1, A_2, …, A_n 中任一个, 也就是 ω 既不属于 A_1, 不属于 A_2, 不属于 A_3, …, 也不属于 A_n, 即

$$\omega\overline{\in}A_1,\ \omega\overline{\in}A_2, \cdots,\ \omega\overline{\in}A_n$$

也就是

$$\omega\in\bar{A}_1, \omega\in\bar{A}_2, \cdots, \omega\in\bar{A}_n$$

同时成立, 所以

$$\omega\in\bigcap_{i=1}^{n}\bar{A}_i$$

于是

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} \subset \bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i$$

成立. 反过来, 设 $\omega \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} \bar{A}_i$, 即同时有

$$\omega \in \bar{A}_1,\ \omega \in \bar{A}_2,\ \cdots,\ \omega \in \bar{A}_n$$

从而同时有

$$\omega \overline{\in} A_1,\ \omega \overline{\in} A_2,\ \cdots,\ \omega \overline{\in} A_n$$

这意味着 ω 不属于 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任一个, 即

$$\omega \overline{\in} \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

也就是有

$$\omega \in \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}$$

这说明

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} \supset \bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i$$

成立. 因而有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i$$

(1.6)式得证.

在上述证明中, 我们就是按照事件相等的那种“绕圈子”的说法来加以验证的.

我们已经知道事件是 Ω 的某些子集, 如果把“是事件”的这些子集归在一起, 则得到一个类, 记作 $\mathscr{F}$, 称作**事件域**, 即

$$\mathscr{F} = \{A: A \subset \Omega,\ A\ \text{是事件}\}$$

在前面已经提到, Ω、$\varnothing$ 是事件, 所以 $\Omega \in \mathscr{F}$, $\varnothing \in \mathscr{F}$. 又讨论了事

件间的运算"∪""∩"和"－"，如果A与B都是事件，即$A\in\mathscr{F}$，$B\in\mathscr{F}$，非常自然地要求$A\cup B$、AB、$A-B$也是事件．因此，如果有$A\in\mathscr{F}$、$B\in\mathscr{F}$，就要求

$$A\cup B\in\mathscr{F},\ AB\in\mathscr{F}.\quad A-B\in\mathscr{F}$$

用集合论的语言来说，就是事件域$\mathscr{F}$关于运算"∪"、"∩"和"－"是封闭的．经过归纳与整理，事件域$\mathscr{F}$应该满足下述要求：

(1) $\Omega\in\mathscr{F}$;

(2) 若$A\in\mathscr{F}$，则$\bar{A}\in\mathscr{F}$;

(3) 若$A_i\in\mathscr{F}$，$i=1,2,\cdots,n$，则$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\in\mathscr{F}$.

（作为一个很好的练习，读者可以自己验证：如果$\mathscr{F}$满足(1)，(2)，(3)，那么$\mathscr{F}$对"∩"、"－"运算必定封闭．）在集合论中，满足上述三个条件的集合类，称作布尔代数．所以事件域应该是一个布尔代数．对于样本空间Ω，如果$\mathscr{F}$是Ω的一切子集的全体，那么显然$\mathscr{F}$是一个布尔代数．

§1.2 概率和频率

回忆引言中的试验II，我们已经知道它是一个随机试验，并且样本空间$\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$，其中

$$\omega_1=\{\text{取得白球}\},\omega_2=\{\text{取得黑球}\}$$

是基本事件．在一次试验中，虽然不能肯定是ω_1还是ω_2发生，但是我们可以问在一次试验中发生ω_1(或ω_2)的可能性有多大？由对称性，很自然地可以断定在一次试验中，出现ω_1(或ω_2)的可能性是1/2，因为我们知道盒子中白球数和黑球数都是5个．现在引入一个定义如下：

定义1.1 随机事件A发生可能性大小的度量（数值），称为A发生的**概率**，记作$P(A)$.