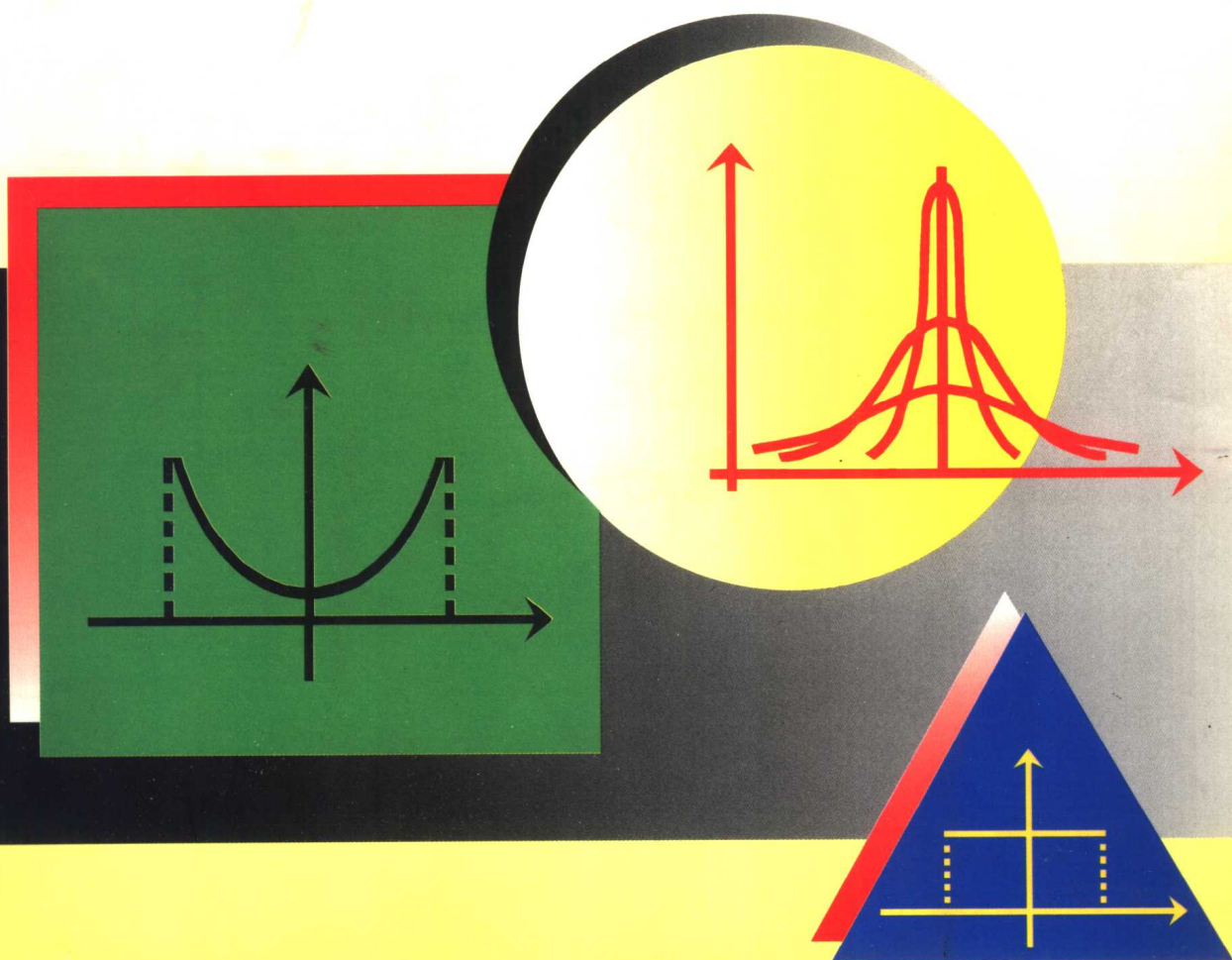


国家计量技术法规统一宣贯教材

测量不确定度 评定与表示指南

国家质量技术监督局计量司 组编



中国计量出版社

国家计量技术法规统一宣贯教材

测量不确定度评定与表示指南

国家质量技术监督局计量司 组编

中国计量出版社

图书在版编目(CIP)数据

测量不确定度评定与表示指南/国家质量技术监督局计量司组编. —北京:中国计量出版社, 2000. 1

ISBN 7-5026-1262-9

I. 测… II. 国… III. 不确定度-测量方法 IV. TB9

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 73609 号

内 容 提 要

本书是国家计量技术规范 JJF 1059—1999《测量不确定度评定与表示》的统一宣贯教材,由国家质量技术监督局计量司组织编写。主要内容包括三部分:第一部分介绍必要的概率论与数理统计基础知识;第二部分以逐步的展开方式阐述《测量不确定度评定与表示》计量技术规范的内容;第三部分是不确定度在各测量领域中的应用实例。书中附有由 7 个国际组织发布的《测量不确定度表示指南》(GUM)的原文。

本教材可供科研单位、检测/校准机构及工矿企业从事计量检定、检测/校准、产品检验、精密测试、质量管理及科学实验的人员使用,也可供高等院校有关专业的师生使用。

中国计量出版社出版

北京和平里西街甲 2 号

邮政编码 100013

电话(010)64275360

北京市迪鑫印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

版权所有 不得翻印

*

787 mm×1092 mm 16 开本 印张 11 字数 254 千字

2000 年 4 月第 1 版 2000 年 4 月第 1 次印刷

*

印数 1—5000 定价:40.00 元

编 审 委 员 会

主 审 王以铭

主 编 施昌彦

副 主 编 刘 风

编审委员 王以铭 施昌彦 刘 风 李慎安

叶德培 赵 彤 马纯良 马肃林

陈 红 陈明华 罗旭东 赵 峰

彭铁军

2017/9/20

序 言

在国民经济、国防建设、科学研究和社会生活中，人们每天都在进行大量的测量。测量在司法执法、商业贸易、维护权益、保护资源环境、医疗卫生等方面，起着越来越大的作用。测量者和利益相关各方最为关心的是测量是否有效、测量结果是否可信，或者说测量的质量（品质）如何。对测量的可信程度提出问题是自然的，因为人们需要比较、评价或再现（复现）测量结果；但是，回答这些问题有一定的难度，因为影响测量结果的因素很多，而人们对诸多的影响因素往往缺乏完整的了解。引入“测量不确定度”的概念，利用它的表示来评定测量水平或质量，是计量界在总结大量测量实践和误差理论的基础上进行大量研究的一个重要成果。

测量不确定度从词义上理解，意味着对测量结果有效性的可疑程度或不肯定程度。从传统上理解，它是被测量真值所处范围的估计值。但是真值是一个理想化的概念，实际上往往是难以操作的或是未知量，而可以具体操作的则是测量结果的变化。因此，现代的测量不确定度被定义为：“表征合理地赋予被测量之值的分散性，与测量结果相联系的参数”。

总之，测量不确定度是评定测量水平的指标，是判定测量结果质量的依据，它对科研、生产、商贸和国际技术交流等诸多相关测量领域影响甚大，具有现实的和重要的意义。

ISO/IEC 导则 25（已修订为 ISO 17025）《校准和检测实验室能力的通用要求》指明，校准实验室出具的每份证书或报告，均应包括有关测量结果不确定度的说明；这个要求必要时对检测实验室也同样适用。国际计量局（BIPM）等权威国际组织将实验室的“校准与测量能力”或“最佳测量能力”定义为通常提供给用户的最高的校准或测量水平，它用置信水准为 95% 的扩展不确定度表示。ISO 9001《质量体系 设计、开发、生产、安装和服务的质量保证模式》规定，使用测量设备时应保证其测量不确定度为已知。随着实验室认可体系和质量认证体系在我国的推行，以及法定计量检定机构考核工作的开展，测量领域中不确定度的多种表述方法亟待统一，并应与国际通行做法接轨。

ISO 出版的《测量不确定度表示指南》（缩写为 GUM），是由国际标准化组织、国际电工委员会、国际计量局、国际法制计量组织等 7 个国际组织联合制定的通

用指导性标准，于1993年正式发布，并于1995年修订。国家质量技术监督局非常重视这个指南，组织我国计量专家和管理专家进行了广泛深入的研究和探讨，并在此基础上于1999年1月批准发布了适合我国国情的《测量不确定度评定与表示》计量技术规范(JJF 1059—1999)，自1999年5月1日起施行。这个规范从易于理解、便于操作、利于过渡出发，原则上等同采用了GUM的基本内容，对科学研究、工程技术及商贸中大量存在的测量结果的处理与表示，均具有适用性。

为配合JJF 1059—1999的学习和贯彻，我局计量司组织编著了《测量不确定度评定与表示指南》宣贯教材。本宣贯教材主要介绍了正确表示测量不确定度的意义，不确定度的发展过程、发展动向及应用范围，评定与表示不确定度所需的概率论与数理统计基础知识，不确定度的相关基本术语及其概念，不确定度评定与表示的基本内容和方法，结合实例详述了不确定度评定的具体应用，以及报告结果的要求。教材包括各测量领域的应用实例并附有GUM的原文。本书可供科研、生产和教学等有关人员使用，是从事计量、标准、质量及实验等人员的必备资料。

由于时间紧迫，疏漏之处在所难免，恳请广大读者将意见寄送或转告国家质量技术监督局计量司。

国家质量技术监督局副局长、教授

王以铭

1999年11月1日

目 录

第一章 引言	(1)
一、正确表示测量不确定度的意义	(1)
二、测量不确定度的发展过程及动向	(2)
三、测量不确定度评定与表示的应用范围	(3)
第二章 概率论与数理统计基础知识	(4)
一、随机变量的基本概念	(4)
1. 随机事件和随机变量	(4)
2. 概率和分布函数	(5)
二、随机变量的数字特征	(7)
1. 数学期望	(8)
2. 方差	(9)
3. 矩	(11)
三、随机变量的基本定理	(11)
1. 大数定理	(11)
2. 中心极限定理	(12)
四、几种常见随机变量的概率分布及其数字特征	(12)
1. 均匀分布 (矩形分布)	(12)
2. 正态分布 (拉普拉斯-高斯分布)	(13)
3. t 分布 (学生分布)	(15)
4. 统计分布中常见术语图示	(16)
第三章 测量基本术语及其概念	(17)
1. [可测量的] 量	(17)
2. 量值	(17)
3. [量的] 真值	(17)
4. [量的] 约定真值	(17)
5. 被测量	(18)
6. 测量结果	(18)

7. 测量准确度	(18)
8. [测量结果的] 重复性	(18)
9. [测量结果的] 复现性	(18)
10. 实验标准 [偏] 差	(19)
11. [测量] 不确定度	(19)
12. 包含因子	(20)
13. 自由度	(20)
14. 置信概率	(20)
15. [测量] 误差	(20)
16. 修正值	(21)
17. 相关系数	(21)
18. 独立	(22)
第四章 产生测量不确定度的原因和测量模型化	(23)
一、测量不确定度的来源	(23)
二、测量不确定度评定及其数学模型的建立	(24)
三、不确定度传播律	(27)
四、测量不确定度分类	(27)
第五章 标准不确定度的 A 类评定	(29)
一、单次测量结果实验标准差与平均值实验标准差	(29)
二、测量过程的合并样本标准差	(31)
三、规范测量中的合并样本标准差	(32)
四、极差	(33)
五、最小二乘法中的不确定度	(34)
六、不确定度 A 类评定的独立性	(35)
七、阿伦方差	(36)
八、A 类不确定度评定的自由度和评定流程	(36)
第六章 标准不确定度的 B 类评定	(38)
一、B 类不确定度评定的信息来源	(38)
二、B 类不确定度的评定方法	(38)
三、B 类不确定度评定的自由度及其意义	(43)
四、B 类标准不确定度评定的流程	(44)
第七章 合成标准不确定度的评定	(45)
一、输入量不相关时不确定度的合成	(45)

二、输入量相关时不确定度的合成	(48)
三、合成标准不确定度的自由度	(51)
四、合成标准不确定度的计算流程	(52)
第八章 扩展不确定度的评定	(53)
一、输出量的分布特征	(53)
二、扩展不确定度的含义	(53)
三、包含因子的选择	(54)
四、扩展不确定度评定的流程	(55)
第九章 测量不确定度的报告与表示	(56)
一、测量结果及其不确定度的报告	(56)
二、测量不确定度的报告方式	(57)
1. 使用合成标准不确定度	(57)
2. 使用扩展不确定度	(58)
三、测量结果及其不确定度的有效位	(59)
四、测量不确定度评定的总流程	(60)
第十章 测量不确定度应用实例	(62)
一、长度测量中的应用	(62)
1. 在比较仪上校准量块	(62)
2. 用比长仪测量圆棒直径	(66)
3. 用千分尺测量圆柱体积	(68)
二、温度测量中的应用	(70)
三、力学测量中的应用	(76)
四、电学测量中的应用	(79)
1. 电阻测量	(79)
2. 数字多用表检定	(82)
五、无线电测量中的应用	(85)
1. 谐波测量	(85)
2. 脉冲产生通道时延的测量	(88)
六、时间频率测量中的应用	(90)
1. 用电子计数器测量信号频率	(90)
2. 电子表或秒表日时差的测量	(92)
3. 频率源的频率漂移率测量	(93)
七、光学测量中的应用	(96)

八、电离辐射测量中的应用	(100)
1. 液体闪烁计数器测量放射性活度	(100)
2. 含氢正比计数管测量中子注量	(102)
3. 用自由空气电离室复现照射量	(103)
九、酸度测量中的应用	(105)
1. 电计不确定度评定	(105)
2. 仪器扩展不确定度评定	(108)
3. 不确定度汇总	(110)
十、定量化学分析中的应用	(111)
1. 不确定度评定中的某些问题	(111)
2. 滴定分析结果测量不确定度评定举例	(113)
3. 单侧检验中测量不确定度评定举例	(114)
4. 直线回归计算及其不确定度评定举例	(115)
十一、声学测量中的应用	(117)
1. 毫瓦级超声功率计及其示值误差	(117)
2. 超声功率计示值误差的测量不确定度	(117)
附录 GUIDE TO THE EXPRESSION OF UNCERTAINTY IN MEASUREMENT (CORRECTED AND REPRINTED, 1995)	(125)
参考文献	(163)

第一章 引言

一、正确表示测量不确定度的意义

测量是科学技术、工农业生产、国内外贸易以至日常生活各个领域不可缺少的一项工作。测量的目的是确定被测量的值或获取测量结果。测量结果的质量(品质),往往会直接影响国家和企业的经济利益。例如,对出口货物称重不准就会造成很大的损失,多了白白送给外商,少了则要赔款。测量结果的质量还是科学实验成败的重要因素之一。例如,对卫星的质量或对运载火箭燃料的质量若测量不准,就有可能导致卫星发射因推力不足而失败。测量结果的质量也会影响到人身的健康和安。例如,在使用 γ 射线治疗疾病时,若对剂量测量不准,过少达不到治病的目的,延误治疗;过多则会对人体造成伤害。测量结果和由测量结果得出的结论,还可能成为执法和决策的重要依据。因此,当报告测量结果时,必须对其质量给出定量的说明,以确定测量结果的可信程度。测量不确定度就是对测量结果质量的定量表征,测量结果的可用性很大程度上取决于其不确定度的大小。所以,测量结果必须附有不确定度说明才是完整并有意义的。

测量不确定度的概念在测量历史上相对较新,其应用具有广泛性和实用性。正如国际单位制(SI)计量单位已渗透到科学技术的各个领域并被全世界普遍采用一样,无论哪个领域进行的测量,在给出完整的测量结果时也普遍采用了测量不确定度。尤其是在市场竞争激烈、经济全球化的今天,测量不确定度评定与表示方法的统一,乃是科技交流和国际贸易的迫切要求,它使各国进行的测量及其所得到的结果可以进行相互比对,取得相互承认或共识。因此,统一测量不确定度的表示方法并推广应用公认的规则,受到了国际组织和各国计量部门的高度重视。

目前,在我国推行的ISO/IEC导则25(已修订为ISO 17025)《校准和检测实验室能力的通用要求》和ISO 9001《质量体系 设计、开发、生产、安装和服务的质量保证模式》中,对测量结果的不确定度均有明确的要求。例如导则25指明,校准实验室出具的每份证书或报告都应包括有关测量结果不确定度评定的说明;在检测实验室出具的检测报告中,必要时也应予以说明。ISO 9001要求,所使用的测量设备应保证其测量不确定度为已知。因此,宣贯和推行《测量不确定度评定与表示》计量技术规范具有重要的现实意义。测量结果不确定度的评定和表示方法,经过20多年的争论、研究和发展,业已趋于成熟,许多发达国家和发展中国家已经普遍采用,国际间的量值比对和实验数据的比较,更是要求提供包含因子或置信水准约定的测量结果的不确定度。国内许多通过ISO 9000系列质量认证的单位,通过ISO/IEC导则25认可的实验室,以及独资、合资的企业,也要求对检测/校准的结果提供详细的不确定度说明或报告。

显然,我国要取得国际经济和市场竞争中的优势地位,就必须在各方面与国际接轨,例如,

在出具检定证书、校准证书、检测报告、鉴定报告以及撰写学术报告、技术规范、产品标准,甚至签订合同、协议等文件时,其有关测量结果和测量不确定度的报告,都应具有与国际一致的表达方式。因此,我们应重视《测量不确定度评定与表示》规范的学习与宣贯。

二、测量不确定度的发展过程及动向

早在 1963 年,美国国家标准局(NBS),现为国家标准与技术研究院(NIST)的 Eisenhart 先生在研究“仪器校准系统的精密度和准确度的估计”时,就提出了定量表示不确定度的建议。20 世纪 70 年代,NBS 在研究和推广测量保证方案(MAP)时,对不确定度的定量表示又有了进一步的发展。不确定度这个术语逐渐在测量领域内被广泛应用,但表示方法各不相同。1977 年 5 月,国际计量委员会(CIPM)下设的国际电离辐射咨询委员会(CCEMRI)中的 X- γ 射线和电子组,讨论了关于校准证书上如何表达不确定度的若干不同建议,但未做出任何决议。在 1977 年 7 月的 CCEMRI 会议上,提出了解决这个问题的必要性和迫切性。当时 CCEMRI 主席、美国 NBS 局长 Ambler 先生,同意将此问题列入送交国际计量局(BIPM)审议的报告。作为当时 CIPM 的成员,他正式提出了解决测量不确定度表示的国际统一性问题的提案。1978 年,CIPM 要求 BIPM 协同各国着手解决这个问题。BIPM 就此制定了一份详细的调查表,并分发到 32 个国家计量院及 5 个国际组织征求意见。1979 年底,收到 21 个国家计量院的复函。1980 年,BIPM 召集和成立了不确定度表示工作组,在征求各国意见的基础上起草了一份建议书,即 INC-1(1980)。该建议书向各国推荐了不确定度的表示原则,从而使测量不确定度的表示方法逐渐趋于统一。1981 年,第七十届 CIPM 批准了上述建议,并发布了一份 CIPM 建议书,即 CI-1981。1986 年,CIPM 再次重申采用上述测量不确定度表示的统一方法,并发布了 CIPM 建议书,即 CI-1986。这份 CIPM 建议书推荐的方法,以 INC-1(1980)为基础,要求所有 CIPM 及其咨询委员会赞助下的国际比对及其他工作的参加者,在给出结果时必须使用合成不确定度。

自 20 世纪 80 年代以来,CIPM 建议的不确定度表示方法已经在世界各国许多实验室和计量机构使用。但是,正如国际单位制计量单位不仅在计量部门使用一样,测量不确定度也可以应用于一切使用测量结果的领域。为了进一步促进 CIPM 方法在国际上的广泛使用,1980 年 CIPM 要求国际标准化组织(ISO)在 INC-1(1980)建议书的基础上,起草一份能广泛应用的指南性文件。这项工作得到了以下 7 个国际组织的支持和赞助。这 7 个国际组织是:国际计量局(BIPM)、国际电工委员会(IEC)、国际临床化学联合会(IFCC)、国际标准化组织(ISO)、国际理论化学与应用化学联合会(IUPAC)、国际理论物理与应用物理联合会(IUPAP)、国际法制计量组织(OIML)。自此,由 ISO 第四技术顾问组(TAG4)的第三工作组(WG3)负责起草《测量不确定度表示指南》(缩写为 GUM),其工作组成员则由 BIPM、IEC、ISO 和 OIML 提名。1993 年,GUM 以 7 个国际组织的名义正式由 ISO 出版发行。1995 年又作了修订和重印。

GUM 是在 INC-1(1980)、CI-1981 和 CI-1986 的基础上编制而成的应用指南,在术语定义、概念、评定方法和报告的表达方式上都作了更明确的统一规定。它代表了当前国际上表示测量结果及其不确定度的约定做法,从而使不同国家、不同地区、不同学科、不同领域在表示测量结果及其不确定度时具有一致的含义。因此,GUM 的贯彻应用必将推动科技进步,促进国际交流。

美国 NIST 非常重视这项工作,提出了执行 GUM 方法的方针,由院长批准后纳入管理手

册,并要求科学家和职工必须遵照执行。根据这个方针,NIST 保证在不确定度表示方面取得内部一致并与国际现行做法一致,从而有助于提高 NIST 在国内和国际市场的竞争力。目前,国际上许多国家的校准实验室和计量机构,也采取相应措施促进使用 GUM 规定的方法。一些区域性和全球性国际组织,都强调用 GUM 方法来表示测量结果及其不确定度,例如亚太计量规则组织(APMP)、欧洲计量组织(EUROMET)、国际实验室认可合作组织(ILAC)、亚太实验室认可合作组织(APLAC)及欧洲认可合作组织(EA)等。

三、测量不确定度评定与表示的应用范围

我国的国家计量技术规范 JJF 1059—1999《测量不确定度评定与表示》,规定的是测量中评定与表示不确定度的一种通用规则,它适用于各种准确度等级的测量,而不仅限于计量领域中的检定、校准和检测。其主要应用领域列举如下:

- ① 建立国家计量基准、计量标准及其国际比对;
- ② 标准物质、标准参考数据;
- ③ 测量方法、检定规程、检定系统、校准规范等;
- ④ 科学研究及工程领域的测量;
- ⑤ 计量认证、计量确认、质量认证以及实验室认可;
- ⑥ 测量仪器的校准和检定;
- ⑦ 生产过程的质量保证以及产品的检验和测试;
- ⑧ 贸易结算、医疗卫生、安全防护、环境监测及资源测量。

本规范主要涉及有明确定义的,并可用唯一值表征的被测量估计值的不确定度。对整套测量装置的不确定度的表示不在此列。至于被测量呈现为一系列值的分布或取决于一个或多个参量(例如,以时间为参变量),则对被测量的描述是一组量,应给出其分布情况及其相互关系。

第二章 概率论与数理统计基础知识

一、随机变量的基本概念

1. 随机事件和随机变量

(1) 事件和随机事件

观测或试验的一种结果,称为一个事件。例如,明天的天气是晴天、阴天还是雨天,这三种可能性中的每一种都称为事件。又如,测量工件的直径所得的结果为 9.91mm, 9.92mm, 9.93mm, ..., 这里每个可能出现的测量结果都称为事件。与测量结果相联系的不确定度是事件;若工件直径的真值已知,则相应的每一个误差也称为事件。

在客观世界中,我们可以把事件大致分为确定性和不确定性两类。向上抛一石子必然下落,纯水在标准大气压下加热到 100℃ 时必然沸腾等,均属肯定事件或确定性事件。抛掷一枚硬币的结果可能正面朝上、也可能反面朝上,打靶的结果可能射中、也可能射不中等,均属可疑事件或不确定性事件。

确定性事件有着内在的规律,这一点我们比较容易看到和处理。而对于不确定性事件,虽然就每一次观测或试验结果来看是可疑的,但在大量重复观测或试验下却呈现某种规律性(统计规律性)。例如多次重复抛掷一枚硬币,会发现正面朝上与反面朝上的次数大致相等。概率论和数理统计就是从两个不同侧面,来研究这类不确定性事件的统计规律性。在概率统计中,把客观世界可能出现的事件区分为最典型的三种情况:

① 必然事件。在一定条件下必然出现的事件,例如工件直径的测量结果为正,是必然事件。

② 不可能事件。在一定条件下不可能出现的事件,例如工件直径的测量结果为零或负值,都是不可能事件。

③ 随机事件。在一定条件下可能出现也可能不出现的事件,例如工件直径的测量结果出现在 9.91mm 与 9.92mm 之间,是一个随机事件。随机事件即是随机现象的某种结果。

(2) 随机变量

如果某一量(例如测量结果)在一定条件下,取某一值或在某一范围内取值是一个随机事件,则这样的量叫作随机变量。

随机变量不同于其他变量的特点是:它是以一定的概率,在一定的区间上取值或取某一个固定值。例如,工件直径的测量结果在 (9.90 ~ 9.92mm) 区间上取值的概率为 0.9。由前所述,可知测量结果及其不确定度均为随机变量。

随机变量根据其取值的特征可以分为两种:

① 连续型随机变量。若随机变量 X 可在坐标轴上某一区间内取任一数值,即取值布满区间或整个实数轴,则称 X 为连续型随机变量。例如重复测量中所得的一组观测值,就属于连续型随机变量。

② 离散型随机变量。若随机变量 X 的取值可离散地排列为 $x_1, x_2, \dots$, 而且 X 以各种确定的概率取这些不同的值,即只取有限个或可数个实数值,则称 X 为离散型随机变量。取有效数字的位数时,数字的舍入误差就是一种离散型随机变量。

2. 概率和分布函数

(1) 事件的概率

随机事件的特点是:在一次观测或试验中,它可能出现、也可能不出现,但是在大量重复的观测或试验中呈现统计规律性。例如,在连续 n 次独立试验中,事件 A 发生了 m 次, m 称为事件的频数, m/n 则称为事件的相对频数或频率,当 n 极大时,频率 m/n 稳定地趋于某一个常数 p ,此常数 p 称为事件 A 的概率,记为 $P(A) = p$ 。这就是概率的古典定义。概率 p 是用以度量随机事件 A 出现的可能性大小的数值。必然事件的概率为 1,不可能事件的概率为 0,随机事件的概率 $P(A)$ 为 $0 \leq P(A) \leq 1$ 。所以,必然事件和不可能事件是随机事件的两种极端情况。概率可以通过一定的法则进行运算,下面简要介绍概率的加法定理和乘法定理。

① 概率加法定理

先引入下列符号:

U 代表必然事件;

V 代表不可能事件;

$A \cup B$ 代表 A 或 B 中至少有一个出现的事件;

$\bar{A}$ 代表 A 不出现的事件,称 $\bar{A}$ 为 A 的对立事件;

AB 代表 A 与 B 同时出现的事件。

若 $AB = V$,称 A, B 为互斥事件,即 A 与 B 不能同时出现。概率加法定理叙述为:互斥的诸事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中任一事件出现的概率,为各个事件概率的总和。换言之,若

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n, \text{ 且 } A_i A_j = V \quad (1 < i < j < n)$$

则

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \quad (2.1)$$

[例] 加工某零件 100 件,要求零件尺寸是 $(100 \pm 0.01)\text{mm}$ 。加工后测量零件,在 100 件中,尺寸小于 99.99mm 的零件有 2 件,而大于 100.01mm 的零件有 3 件,问任取一件,其尺寸偏差超出公差 $(\pm 0.01\text{mm})$ 的概率是多少?

[解] 设 A_1 为零件尺寸大于 100.01mm 的事件,则 $P(A_1) = 3\%$; A_2 为零件尺寸小于 99.99mm 的事件,则 $P(A_2) = 2\%$ 。显然, A_1 与 A_2 为互斥的两个事件, $A_1 A_2 = V$, $A = A_1 \cup A_2$, 应用概率加法定理式(2.1) 可得

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = 5\%$$

② 概率乘法定理

若事件 A 的出现并不影响事件 B 的出现,则称事件 A 与事件 B 是相互独立的。由许多独立

的简单事件所组成,且各独立事件同时出现的事件称为复杂事件。则概率乘法定理可叙述为:复杂事件的概率,等于组成复杂事件的各个简单事件的概率的乘积。换言之,

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2) \cdots P(A_n) = \prod_{i=1}^n P(A_i) \quad (2.2)$$

[例]加工圆锥轴 100 件,加工后测得小端直径超出公差有 5 件,大端直径超出公差有 8 件,问任取一件,大端直径和小端直径同时超出公差的概率是多少?

[解]设 A_1 为小端直径超出公差的事件,则 $P(A_1) = 5\%$; A_2 为大端直径超出公差的事件,则 $P(A_2) = 8\%$ 。显然,小端直径和大端直径同时超出公差的事件 A 为复杂事件,它由 A_1 和 A_2 两个独立的简单事件所组成。故由概率乘法定理式(2.2)可得

$$P(A) = P(A_1)P(A_2) = 5\% \times 8\% = 0.4\%$$

(2) 分布函数

随机变量的特点是以一定的概率取值,但并不是所有的观测或试验都能以一定的概率取某一个固定值。例如,重复测量某圆柱体直径时,作为被测量最佳估计的测量结果是随机变量,记为 X ,它所取的可能值是充满某一个区间的(并非某一个固定值)。那么,我们所关心的是它落在该区间的概率是多少?即 $P[a \leq X \leq b] = ?$ 由概率加法定理有

$$P[a \leq X \leq b] = P[X < b] - P[X < a]$$

显然,我们只要求出 $P[X < b]$ 及 $P[X < a]$ 即可,这要比求 $P[a \leq X \leq b]$ 简便得多,因为它们只依赖于一个参数。

对于任何实数 x ,事件 $[X < x]$ 的概率当然是一个 x 的函数。令 $F(x) = P[X < x]$,显然有 $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$,我们称 $F(x)$ 为随机变量 X 的分布函数。所以,分布函数 $F(x)$ 完全决定了事件 $[a \leq X \leq b]$ 的概率,或者说分布函数 $F(x)$ 完整地描述了随机变量 X 的统计特性。下面按离散型和连续型两种情况,讨论随机变量的分布函数。

① 离散型随机变量的分布函数

设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是离散型随机变量 X 的所取值,而 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 为 X 取上述值的概率,即

$$P(X = x_i) = p_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.3)$$

概率 p_i 应满足条件 $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ 。式(2.3)称为离散型随机变量 X 的概率分布。离散型随机变量的分布规律可以用取值分布列(见表 2.1)和分布图(见图 2.1)直观地表示出来。

表 2.1 离散型随机变量分布表

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

离散型随机变量的分布函数 $F(x)$ 具有下列形式

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i \quad (2.4)$$

因此,任何离散型随机变量的分布函数都是不连续的。

② 连续型随机变量的分布函数

设连续型随机变量 X 取值于区间 (a, b) ,则 X 的分布函数 $F(x)$ 对于任意两实数 $x_1, x_2 (x_1$

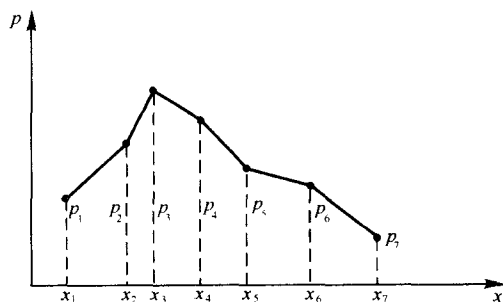


图 2.1 离散型随机变量分布图

$< x_2)$ 有

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 < X < x_2) \geq 0$$

即 $F(x)$ 是单调增函数, 并且假定 $F(x)$ 在 $-\infty < x < \infty$ 间是连续的, 在 $-\infty < x < \infty$ 间是可微分的, 且导数 $F'(x)$ 在此区间连续。

这两个假定在实际工作中常被满足。连续型随机变量与离散型随机变量不同, 其分布规律不可能用分布列表示。为了描述其概率分布的规律, 需要引入一个新的概念, 即概率分布密度函数 $f(x)$ 。显然, 变量 X 落在 x 至 $x + \Delta x$ 区间内的概率为

$$P(x < X \leq x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x)$$

则

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) = f(x)$$

所以, 概率分布密度函数 $f(x)$ 定义为概率分布函数 $F(x)$ 的导数。由此可将分布函数写成

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx \quad (2.5)$$

式(2.5)就是常用的概率积分公式。若已知概率分布密度 $f(x)$, 则随机变量 X 落在某一区间 (x_1, x_2) 内的概率 $P(x_1 < X \leq x_2)$ 为

$$P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \quad (2.6)$$

例如, 对于服从正态分布的随机误差, 其分布密度函数 $f(x)$ 具有如下形式

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\right] \quad (2.7)$$

式中 δ ——随机误差的可能值;

σ ——测量列的标准偏差或标准差。

二、随机变量的数字特征

由上所述, 利用分布函数或分布密度函数可以完全确定一个随机变量。但在实际问题中, 求分布函数或分布密度函数不仅十分困难, 而且常常没有必要。例如, 测量零件的长度得到了一系列的观测值, 我们往往只需要知道零件长度这个随机变量的一些特征量就够了, 如长度的