中学数学难点剖析丛书

初中数学综合训练

罗介玲等编著

西南师范大学出版社

中学数学难点剖析丛书

初中数学综合训练

罗介玲 等编著

西南师范大学出版社

责任编辑：卢　旭
装帧设计：傅孝修

中学数学难点剖析丛书

初中数学综合训练

罗介玲等 编著

西南师范大学出版社出版、发行
（重庆　北碚）
新华书店重庆发行所经销
西南师范大学出版社印刷厂印刷

•

开本：787×1092 1/32 印张：5.75 字数：125千 插页：1
1992年2月第一版　　1992年2月第1次印刷
印数：1—15,000

•

ISBN 7—5621—0644—4/G•458

定价：2.10元

○前　　言○

《中学数学难点剖析丛书》，是以国家教委制定的教学大纲（修改稿）为依据，在现行教材的基础上，吸收了几年来中学教学改革的经验与研究的新成果，邀请了十六个省市有丰富经验的特级、高级教师，教学研究人员和优秀青年教师参加编写的.

本丛书有以下特色：

有针对性地弥补和加强现行教材中的薄弱环节，帮助师生解决教与学的疑难问题，提高教学质量。

既可与教材同步加深对教材的理解，又可为毕业复习、参加竞赛提供综合训练；既有系统知识，又有重、疑、难点的剖析；既有标准化题，又有综合训练题；并注重知识的纵横联系与数学思想方法相结合．是一套具有科学性、系统性、针对性和可读性的中学数学参考读物.

适于配合新课学习的各册，有【基础知识】、【剖析与例题】、【基础练习】、【知识应用】(A)、(B)、【检测题】五个栏目。书末附有【习题答案或提示】。

适于初三、高三毕业专题复习的各册，有专题讲座、综合测试题、解答或提示．各专题又分概述、例题、习题三部分.

本丛书例题、习题均经作者精选，量多、典型、新颖．剖析或说明是撰写人多年教学经验的体现．对启迪思维，解

决疑难，预防错误，培养能力颇有帮助.

本册包括数、式的概念与运算技巧，圆的有关性质的应用，解题方法与技巧，怎样解选择题和填空题等十八个专题讲座，三套综合检测题。既注重基本概念的巩固和基本能力的培养，又注重深化、扩展数学的基础知识及纵横联系。选题典型新颖，难易适度，不超纲，复盖广，方法活，剖析透，综合性强.

本册由滕耀云、唐霞宾统稿.

本册主要供初中三年级毕业复习备考用，也可供教师教学的参考或自学青年及师范院校学生阅读.

由于时间仓促，水平有限，疏漏错误在所难免，希读者予以指正!

编　者

1991年10月

○目　　录○

1　实数的概念与运算

在初中代数中，数的概念经过了两次扩展，首先是从算术数扩展到有理数；然后扩展到无理数，数的范围便扩展到了实数．实数是初中数学的重要内容之一，它是学习其它数学知识的基础，因此，必须深刻理解实数的有关概念和性质，并能正确运用这些知识．

本单元的重点是实数的概念、运算性质和运算定律，其中有理数的运算更为重要，它是以后学习各种数学知识的基础．因此，要求能熟练掌握实数的运算性质、运算顺序，灵活运用运算定律简化运算过程，从而培养正确、合理、迅速的运算能力．

[例 1] 在 -0.5，$\lg\frac{1}{100}$，$(0.25)^{-\frac{1}{2}}$，$\sin 45°$ 中，哪些是自然数？哪些是有理数？哪些是无理数？哪些是非负实数？并把这些实数用数轴上的点表示出来．再比较它们的大小．

解：$\because \lg\frac{1}{100}=-2$，$(0.25)^{-\frac{1}{2}}=2$，$\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0.7$．

$\therefore (0.25)^{-\frac{1}{2}}$ 是自然数，-0.5，$\lg\frac{1}{100}$，$(0.25)^{-\frac{1}{2}}$ 是有理数，$\sin 45°$ 是无理数，$(0.25)^{-\frac{1}{2}}$，$\sin 45°$ 是非负实数．

这些实数在数轴上表示为图所示：

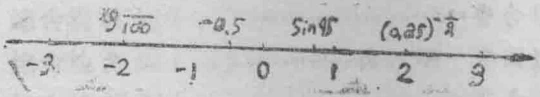

图1—1

根据上图所示可知它们的大小顺序是：

$$(0.25)^{-\frac{1}{2}}>\sin 45^\circ>-0.5>\lg\frac{1}{100}.$$

说明：(1)实数分类、比较大小，在数轴上表示实数，有时需要对原数进行必要的计算，无理数用近似数表示.

(2)利用数轴比较实数的大小，这是常用的方法.

[例 2] 写出下列各数的相反数、倒数和绝对值：

(1)-2； (2)$\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{3}$； (3)$\sqrt{a}-2$.

解：(1)-2的相反数、倒数、绝对值分别是2，$-\dfrac{1}{2}$，2.

(2)$\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{3}$的相反数、倒数、绝对值分别是

$\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{3}$，$-\dfrac{3(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2}$，$\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{3}$.

(3)$\sqrt{a}-2$的相反数是$2-\sqrt{a}$. 当$a\neq 4$时，$\sqrt{a}-2$的倒数是$\dfrac{\sqrt{a}+2}{a-4}$，当$a=4$时，$\sqrt{a}-2$无倒数.

$\sqrt{a}-2$的绝对值是

$$|\sqrt{a}-2|=\begin{cases}\sqrt{a}-2, & (a>4),\\ 0, & (a=4),\\ -(\sqrt{a}-2), & (a<4).\end{cases}$$

说明：(1)一个式子含有字母求它的倒数时，应判定式子是否为零，为零时无倒数.

(2)求一个式子的绝对值，如果这个式子含有字母，要根据绝对值的意义，从式子大于0、小于0、等于0三种情况分别进行讨论.

[例3] 计算：

(1) $8\div\left(-1\frac{2}{5}\right)\times 0.125\times\left(-3\frac{1}{2}\right)\div\left(-\frac{1}{2}\right)$；

(2) $(-5)\times(-2)^3\div 10\div 2-\sqrt{(-3)^2}\div(-6)\times 4$.

解：(1) 原式 $=8\div\left(-\frac{7}{5}\right)\times\frac{1}{8}\times\left(-\frac{7}{2}\right)$

$\div\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=8\times\left(-\frac{5}{7}\right)\times\frac{1}{8}\times\left(-\frac{7}{2}\right)\times(-2)$

$=-5$;

(2) 原式 $=(-5)\times(-8)\div 10\div 2+3\div 6\times 4$

$=2+2=4$

说明：(1)在算式里先进行第三级运算，再进行第二级运算，最后进行第一级运算；在同级运算中应从左到右依次运算.

(2)在正、负数的乘除运算中，先决定运算结果的符号：含有奇数个负数时，结果为负；含有偶数个负数时，结果为正.

[例4] 计算：

$\frac{1}{10}\div\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\div 5+\frac{3}{7}\div(-2)+\left(-\frac{1}{3}\right)\left(1\frac{1}{2}\right)$

$-\left(-\dfrac{1}{4}\right)+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{3}-\left(-\dfrac{4}{9}\right)\left(-\dfrac{9}{14}\right).$

解：原式$=\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{10}-\dfrac{3}{14}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}-\dfrac{2}{7}$

$=\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}\right)+\left(\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{10}\right)-\left(\dfrac{3}{14}+\dfrac{2}{7}\right)$

$=-\dfrac{3}{8}+\dfrac{5}{10}-\dfrac{7}{14}=-\dfrac{3}{8}.$

说明：把分母之间有倍数关系的分数结合，运算会更简便.

[例 5] 计算：

(1) $9\times 2^{4}+\left(-\dfrac{1}{3}\right)\times 45-24\div 4+(-30)\div(-2)-36\times(-2)^{2}-2\times(-3)$；

(2) $1.25-\left[1\dfrac{1}{3}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\left(-\dfrac{5}{8}\right)-\left(-1\dfrac{1}{6}\right)\right].$

解：(1) 原式$=9\times16-15-6+15-36\times4+6$

$=144-15-6+15-144+6$

$=(144-144)+(15-15)+(6-6)=0$；

(2) 原式$=1\dfrac{1}{4}-\left[\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{8}+\dfrac{7}{6}\right]$

$=\dfrac{5}{4}-\dfrac{4}{3}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{8}-\dfrac{7}{6}$

$=\left(\dfrac{5}{4}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{8}\right)-\left(\dfrac{4}{3}+\dfrac{7}{6}\right)=-\dfrac{1}{8}.$

说明：（1）把算式里的相反数结合，运算更简便.

（2）算式里既有小数又有分数，化小数为分数或化分数为小数，再进行运算. 熟记下列换算：$0.5=\frac{1}{2}$，$0.6=\frac{3}{5}$，$0.25=\frac{1}{4}$，$0.125=\frac{1}{8}$，$0.75=\frac{3}{4}$等等.

［例6］ 若$\sqrt{a-1}+(ab-2)^2+|a-b+c|=0$，求值.

$$\frac{1}{abc}+\frac{1}{(ac+1)(bc+1)}+\frac{1}{(ac+2)(bc+2)}+\frac{1}{(ac+3)(bc+3)}$$

解：$\because \sqrt{a-1}+(ab-2)^2+|a-b+c|=0$，

$$\therefore \begin{cases} a-1=0, \\ ab-2=0, \\ a-b+c=0. \end{cases} \text{解之，得} \begin{cases} a=1, \\ b=2, \\ c=1. \end{cases}$$

$$\therefore \frac{1}{abc}+\frac{1}{(ac+1)(bc+1)}+\frac{1}{(ac+2)(bc+2)}$$

$$+\frac{1}{(ac+3)(bc+3)}=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{45}=\frac{90+30+15+9}{180}=\frac{4}{5}.$$

另解：$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$$

$$=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}.$$

说明：实数的绝对值、偶次方、以及任何非负数的算术根，都是非负数. 若干个非负数的和为0，则每个非负数必为0.

[例 7]实数a、b、c在数轴上的对应点如图所示，其中 0 是原点，且$|a|<|c|$，

图 1—2

化简$\sqrt{a^2+2ac+c^2}+|b|+|a-b|-|b+c|$.

解：由已知条件知，$a>o$，$c<b<o$，且$|a|<|c|$.

$\therefore\sqrt{a^2+2ac+c^2}=\sqrt{(a+c)^2}=\sqrt{(a+c)^2}=|a+c|$
$=-(a+c)=-a-c$.

$|b|=-b$，$|a-b|=a-b$，$|b+c|=-b-c$

原式$=|a+c|+|b|+|a-b|-|b+c|$

$=-a-c-b+a-b+b+c=-b$.

说明：根据偶次根式的性质，根式可转化为绝对值. 由算术根的意义，$\sqrt{a^2}=|a|$.

[例 8]两个质数p、q恰是整系数方程$x^2-99x+m=0$的两根，求$\frac{p}{q}+\frac{q}{p}$的值.

解：$\because p+q=99$，$pq=m$. 又$\because p$、q是质数.

$\therefore$由$p+q=99$得p、q分别是 97、2 或 2、97，$m=194$.

$$\therefore\frac{p}{q}+\frac{q}{p}=\frac{p^2+q^2}{pq}=\frac{(p+q)^2-2pq}{pq}=\frac{99^2-2\times194}{194}=\frac{9413}{194}$$

[例9]　当$0<k<\frac{1}{2}$时，求方程$\sqrt{|1-x|}=kx$的解的个数.

解：原方程变形为$|1-x|=k^2x^2$，显然 1 不是原方程的解.

(1). 当$1-x<0$时，得$x-1=k^2x^2$，即k^2x^2-x+1

$=0$ （1）$\because 0<k<\dfrac{1}{2}$．$\therefore \triangle=1-4k^2>0$．方程(1)有两个不相等的实根，设为$x_1$、$x_2$，$\because x_1+x_2=\dfrac{1}{k^2}>4>0$，$x_1x_2=\dfrac{1}{k^2}>4>0$，$\therefore x_1$、$x_2$同正，且$x_1>1$，$x_2>1$，因此，$x_1$、$x_2$都是原方程的根；

（2）当$1-x>0$时，得$1-x=k^2x^2$，即$k^2x^2+x-1=0$ （2）$\because \triangle=1+4k^2>0$，$\therefore$方程(2)有两个不等实根，设为$x_3x_4$，又$\because x_3x_4=-\dfrac{1}{k^2}<0$，$\therefore x_3x_4$异号，方程(2)有一正根$x_3$和一负根$_4$，$\because$负根$x_4$使原方程右边为负，$\therefore$是增根．而正根$x_3=\dfrac{-1+\sqrt{1+4k^2}}{2k^2}=\dfrac{4k^2}{2k^2(\sqrt{1+4k^2}+1)}$
$=\dfrac{2}{\sqrt{1+4k^2}+1}<\dfrac{2}{1+1}=1$，$\therefore x_3$也是原方程的一个根．

由（1）(2）知原方程有三个解．

练 习 题 一

1．求28，42，108三个数的最大公约数和最小公倍数．

2．计算：

$$\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\right)\times 12-2.35\times 15+3.45\times 15.$$

3．计算：

$$-0.25^2\div\left(-\frac{1}{2}\right)^4\times(-1)^{15}$$

$$+\left(1\frac{3}{8}+2\frac{1}{3}-3.75\right)\times 24.$$

4．计算：

$$(-1)^5\times\left\{\left[4\frac{2}{3}\div(-4)+\left(-1\frac{1}{4}\right)\times(-0.4)\right]\div\left(-\frac{1}{3}\right)+2\right\}.$$

5．在整数 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 中，求质数的个数，偶数的个数，完全平方数的个数之和．

6．实数 a、b 满足 $\dfrac{(1-a)^2+|2-b^2|}{b+\sqrt{2}}=0$，求 $\log_{(a+b)}\dfrac{1}{a+b}$ 的值．

7．实数 a、b、c、在数轴上的对应点如图所示，其中 O 是原点，且 $|a|=|b|$．求 $\sqrt{a^2}-|a+c|+|b-c|+|a+b|$ 的值．

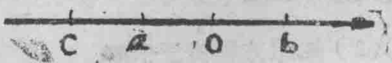

图 1—3

8．已知方程 $4x^2-2ax+2a-3=0$ 没有实数根，化简 $\sqrt{9a^2-30a+25}+|a-8|$．

9．求方程 $x^2-3|x|-2=0$ 的最小的一个根的负倒数．

10．计算：

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}.$$

2 整式、分式、根式、指数式运算及技巧

一、整式运算

整式运算是代数式运算中最基础的运算，因式分解是联系整式和分式的桥梁，学好这部分的内容，对后续学习影响很大，必须熟练掌握.

［例 1］：计算 $\left(x^2-\frac{1}{4}\right)\left(x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)$

解：原式 $=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)$

$\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)=\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)\right]$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)\Big]=\left(x^3+\frac{1}{8}\right)\left(x^3-\frac{1}{8}\right)$

$$=x^6-\frac{1}{64}.$$

说明：因式分解和乘法运算同时运用，能使化简过程简便.

［例 2］：分解因式：$a^2-4ab+3b^2+2bc-c^2$

解：原式 $=a^2-4ab+4b^2-(b^2-2bc+c^2)$

$$=(a-2b)^2-(b-c)^2$$

$$=(a-2b+b-c)(a-2b-b+c)$$

$$=(a-b-c)(a-3b+c)$$

说明：联系公式折配项，因式分解常用它.

［例 3］：在实数范围内，分解因式

$(x^2-x-6)(x^2+3x-4)+24.$

解：原式$=(x-3)(x+2)(x+4)(x-1)+24$

$$=[(x-3)(x+4)]\cdot[(x+2)(x-1)]+24$$
$$=[(x^2+x)-12]\cdot[(x^2+x)-2]+24$$
$$=(x^2+x)^2-14(x^2+x)+48$$
$$=(x^2+x-6)(x^2+x-8)$$
$$=(x+3)(x-2)\left(x+\frac{1+\sqrt{33}}{2}\right)\left(x-\frac{-1+\sqrt{33}}{2}\right)$$

说明：注意因式分解的范围．通常情况下，是在有理数范围．

二、分式运算

分式的概念是整式概念的进一步发展，分式的基本性质及其运算法则等都可与分数进行类比，分式运算的关键在于通分和约分．

［例 4］：计算

$$\frac{2a-b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{2b-c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{2c-a-b}{(c-a)(c-b)}$$

解：原式$=\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a-c}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{b-a}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{c-b}=0$

说明：上例中，逆用了分式的加减法则，把各个分式折成两个分式的和，使其正负分式互相抵消，迅速得出结果．

［例 5］：计算

$$\left(\frac{x^3+2}{x^2-x+1}+\frac{x^3-2}{x^2+x+1}-2x\right)\cdot\left(x^4+x^2+1\right)$$

解：原式$=\left(x+1+\frac{1}{x^2-x+1}+x-1-\frac{1}{x^2+x+1}-2x\right)$

$$\cdot(x^4+x^2+1)=\frac{2x}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}\cdot(x^4+x^2+1)$$
$$=2x$$