



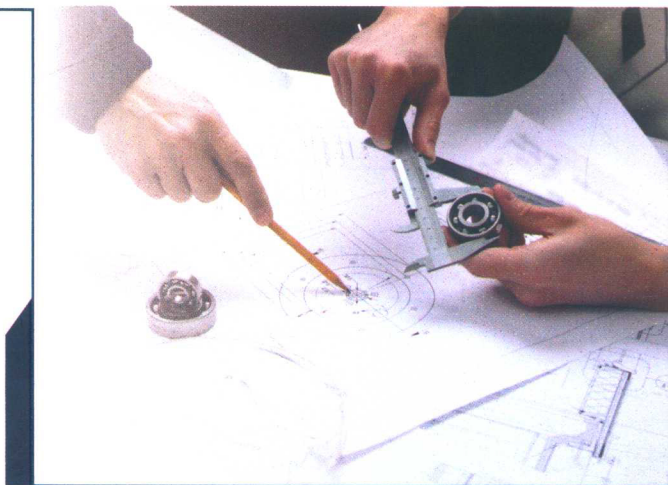
21世纪全国本科院校土木建筑类**创新型**应用人才培养规划教材

误差理论与 测量平差基础

胡圣武 肖本林 编 著

赠送电子课件

- 注重测绘的实际应用，重点介绍导线网平差、GPS网平差等常用方法
- 加强对序贯平差、秩亏自由网平差等近代平差方法的内容介绍，并附实例分析



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书系统地介绍了误差理论与测量平差基础的基本原理与应用。全书共分 11 章, 主要内容包括误差理论的基本知识, 误差传播律及其应用, 平差数学模型, 参数估计方法, 条件平差, 间接平差, GPS 网平差, 坐标值的平差, 误差椭圆, 近代平差概论。本书内容充实, 结构严谨, 体系完整, 强调原理与方法、理论与实际、经典与现代相结合, 可读性强、便于自学, 为培养学生的抽象思维和视觉思维能力提供了一个良好平台。

本书可以作为高等学校测绘工程专业的本科教材, 也可以作为科研院所、生产单位相关科学技术人员的学习参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

误差理论与测量平差基础/胡圣武, 肖本林编著. —北京: 北京大学出版社, 2012. 8

(21 世纪全国本科院校土木建筑类创新型应用人才培养规划教材)

ISBN 978 - 7 - 301 - 21003 - 1

I. ①误… II. ①胡… ②肖… III. ①误差理论 高等学校 - 教材②测量平差 - 高等学校 - 教材
IV. ①O241.1②P207

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 166384 号

书 名: 误差理论与测量平差基础

著作责任者: 胡圣武 肖本林 编著

策划编辑: 卢东 吴迪

责任编辑: 卢东 林章波

标准书号: ISBN 978 - 7 - 301 - 21003 - 1/P · 0082

出版者: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址: <http://www.pup.cn> <http://www.pup6.cn>

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62750667 出版部 62754962

电子邮箱: pup_6@163.com

印刷者: 三河市北燕印装有限公司

发 行 者: 北京大学出版社

经 销 者: 新华书店

787 毫米×1092 毫米 16 开本 19.25 印张 448 千字

2012 年 8 月第 1 版 2012 年 8 月第 1 次印刷

定 价: 37.00 元

未经许可, 不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有, 侵权必究

举报电话: 010 - 62752024

电子邮箱: fd@pup.pku.edu.cn

前 言

误差理论与测量平差基础课程是测绘科学与技术这个学科的一门重要的专业基础课，其为后续的专业课打下有关数据处理的基础，也是攻读相关专业研究生的一门必修课程。本书依据国家教育部颁布的《普通高等学校本科专业目录》中测绘类专业课程设置的要求，按照新的课程实际标准和教学大纲编写，以适应新时期测绘人才“宽口径、厚基础、强能力、高素质”的培养目标，以加强基础理论、注重基本方法和培养动手能力为出发点，在参考了各种平差基础教程和十几年来的教学体会和经验以及科研成果的基础上，经过多次修改完成。

本书主要讲述误差理论的基本知识和基于偶然误差的测量平差的基本理论和方法及其应用。本书的主要特色如下。

(1) 把测量平差与数学分开。目前很多教材都数学化，没有考虑测绘专业的实际。例如，大部分教材都把附有限制条件的条件平差作为平差的一种概括模型，虽然在数学上是可行的，但是在测绘中却是不可行的。

(2) 重应用。本书对测边网和测角网只在理论上作介绍，而没有在实例中重点分析。本书主要重点介绍目前用得较多的一些方法，如导线网平差、GPS网平差、坐标值的平差、误差椭圆等。

(3) 重基础理论。本书对测量平差所涉及的基本理论都加以介绍，如期望、方差、矩阵等，并重点讲述了一些基本理论，如条件平差与间接平差的基本原理等。

(4) 简单性。本书保留了经典理论，简化公式推导。

(5) 实例比较多。本书讲述每一理论后都讲解大量的实例，让学生进一步理解和消化知识。

(6) 精选了大量的习题。本书习题经过精选，便于学生巩固学习内容。

(7) 加强介绍近代平差方法中的序贯平差、秩亏自由网平差、附加系统参数的平差、最小二乘配置、稳健估计、数据探测与可靠性理论等的基本理论与应用，并用实例进行分析。

本书由河南理工大学胡圣武和湖北工业大学肖本林在 10 多年教学和科研的基础上撰写而成。

本书撰写时参考了国内外有关专家的误差理论与测量平差基础著作，并在写作过程中得到多方支持和帮助，在此表示感谢！另外，特别感谢河南理工大学测绘学院郭增长院长及湖北工业大学土木学院相关领导的支持！

限于编者水平，书中疏漏之处在所难免，恳请广大读者批判指正。

编者

2012 年 4 月

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 观测误差	2
1.1.1 观测误差的来源	2
1.1.2 观测误差分类	3
1.2 本学科的内容与任务	5
1.3 本学科的发展历史	6
本章小结	7
习题	7
第 2 章 误差理论的基本知识	8
2.1 随机变量的数字特征	9
2.1.1 数学期望	9
2.1.2 方差	10
2.1.3 协方差与相关系数	11
2.1.4 协方差阵	11
2.1.5 互协方差阵	12
2.2 测量常用的概率分布	13
2.2.1 正态分布	13
2.2.2 非正态分布	15
2.3 偶然误差的统计特性	19
2.3.1 真值与估值	19
2.3.2 偶然误差的特性	20
2.4 精度和衡量精度指标	23
2.4.1 精度	24
2.4.2 准确度	24
2.4.3 精确度	24
2.4.4 衡量精度的指标	25
2.4.5 不确定度	28
2.5 统计假设检验	29
2.5.1 统计假设检验的 主要原理	29
2.5.2 统计假设方法	32
2.6 有关矩阵的基本知识	39

2.6.1 矩阵的秩	39
2.6.2 矩阵的迹	39
2.6.3 矩阵对变量的微分	40
2.6.4 函数对向量的微分	40
2.6.5 特殊函数的微分	41
2.6.6 矩阵分块求逆及 反演公式	41
本章小结	42
习题	42
第 3 章 误差传播律及其应用	44
3.1 协方差传播律	45
3.1.1 观测值线性函数的方差	45
3.1.2 多个观测值线性函数的 协方差阵	46
3.1.3 协方差传播律	48
3.1.4 非线性函数的情况	50
3.1.5 应用协方差传播律的 注意事项和步骤	54
3.2 协方差传播律的应用	54
3.2.1 由三角形闭合差计算测 角中误差(菲列罗公式)	55
3.2.2 同精度独立观测值的 算术平均值	55
3.2.3 水准测量精度	55
3.2.4 三角高程测量的精度	56
3.2.5 若干独立误差的联合 影响	57
3.2.6 GIS 线元要素的方差	57
3.2.7 时间观测序列平滑 平均值的方差	58
3.2.8 支导线点位中误差的 估计	59
3.3 权及权的确定	60
3.3.1 权的定义	60

3.3.2	单位权的确定	61	4.5	测量平差的数学模型	90
3.3.3	权的确定方法	62	4.5.1	随机模型	91
3.4	协因数及其传播律	64	4.5.2	数学模型	91
3.4.1	协因数与协因数阵	64	4.5.3	高斯-马尔柯夫模型 ($G-M$ 模型)	92
3.4.2	权阵	65	4.5.4	n, r, l, c, u, s 的 含义和关系	92
3.4.3	协因数传播律	66	本章小结		93
3.5	单位权中误差的计算	69	习题		93
3.5.1	用不同精度的真误差 计算单位权方差的 计算公式	69	第5章 参数估计方法		96
3.5.2	由双观测值之差求 中误差	70	5.1	参数最优估计的性质	97
3.5.3	由改正数计算中误差	71	5.2	最大似然估计	99
3.6	系统误差的传播与综合	72	5.3	最小二乘估计	102
3.6.1	观测值的系统误差与 综合误差的方差	72	5.4	有偏估计与稳健估计	104
3.6.2	系统误差的传播	73	5.4.1	有偏估计	104
3.6.3	系统误差与偶然误差的 联合传播	73	5.4.2	稳健估计(Robust 估计)	104
本章小结		74	本章小结		105
习题		74	习题		105
第4章 平差数学模型		78	第6章 条件平差		106
4.1	概述	79	6.1	条件平差的基本原理	107
4.1.1	模型基本概念	79	6.1.1	基础方程及其解	108
4.1.2	几何模型	81	6.1.2	计算步骤	110
4.1.3	必要元素	81	6.1.3	实例分析	110
4.1.4	条件方程	81	6.2	条件平差的精度评定	113
4.1.5	多余观测数	82	6.2.1	$V^T P V$ 计算	113
4.1.6	闭合差	82	6.2.2	单位权方差的 估值公式	113
4.2	测量基准	82	6.2.3	协因数阵的计算	114
4.3	函数模型	83	6.2.4	平差值函数的中误差	115
4.3.1	条件平差函数模型	83	6.3	条件方程	116
4.3.2	间接平差函数模型	84	6.3.1	条件方程数的确定	116
4.3.3	附有参数的条件平差 函数模型	85	6.3.2	典型的条件方程	117
4.3.4	附有限制条件的间接 平差的函数模型	86	6.4	条件平差的应用	127
4.3.5	附有限制条件的条件 平差的函数模型	86	6.5	附有参数的条件平差	135
4.4	函数模型的线性化	88	6.5.1	平差原理	135
			6.5.2	精度评定	137
			6.5.3	平差应用	138

6.6 附有限制条件的条件平差	140	7.6.2 系数阵 A 、 B 之间的关系	195
6.6.1 平差原理	140	7.6.3 误差方程的常数项 l 与条件方程的闭合差 W 之间的关系	195
6.6.2 精度评定	142	7.6.4 间接平差中的 d 与条件平差中的 A_0 之间的关系	196
6.7 条件平差估值的统计性质	146	7.6.5 条件方程向误差方程的转换	196
6.7.1 估计量 \hat{L} 和 \hat{X} 均为无偏估计	146	7.6.6 误差方程转化为条件方程	197
6.7.2 估计量 \hat{X} 具有最小方差	147	7.7 间接平差估值的统计性质	197
6.7.3 估计量 \hat{L} 具有最小方差	148	7.7.1 估计量 \hat{X} 和 \hat{L} 具有无偏性	197
6.7.4 单位权方差估值 $\hat{\sigma}_0^2$ 是 σ_0^2 的无偏估计量	150	7.7.2 \hat{X} 的方差最小	199
本章小结	151	7.7.3 估计量 \hat{L} 具有最小方差	200
习题	151	7.7.4 单位权方差估值 $\hat{\sigma}_0^2$ 具有无偏性	201
第 7 章 间接平差	162	7.8 各种平差方法的共性与特性	202
7.1 间接平差的基本原理	163	本章小结	203
7.1.1 基础方程及其解	164	习题	203
7.1.2 计算步骤	165	第 8 章 GPS 网平差	213
7.1.3 实例分析	166	8.1 GPS 网的函数模型	213
7.2 误差方程	167	8.2 GPS 网的随机模型	214
7.2.1 确定待定参数的个数	167	8.3 实例分析	215
7.2.2 列误差方程的注意事项	168	本章小结	223
7.2.3 误差方程线性化	168	习题	223
7.2.4 测角网函数模型	169	第 9 章 坐标值的平差	229
7.2.5 测边网模型	171	9.1 坐标值的条件平差	229
7.2.6 导线网坐标平差的误差方程	172	9.1.1 直角与直角型的条件方程	230
7.3 间接平差的精度评定	172	9.1.2 距离型的条件方程	231
7.3.1 单位权中误差	172	9.1.3 面积型条件方程	232
7.3.2 协因数阵	173	9.1.4 实例分析	232
7.3.3 参数函数中的误差	174	9.2 坐标值的间接平差	234
7.4 间接平差的应用	177	9.2.1 拟合模型	234
7.5 附有限制条件的间接平差	187		
7.5.1 平差原理	187		
7.5.2 精度评定	189		
7.6 间接平差与条件平差的关系	194		
7.6.1 法矩阵之间的关系	194		

9.2.2 坐标转换模型	235	习题	264
9.2.3 七参数坐标转换模型	237	第 11 章 近代平差概论	267
9.2.4 单张相片空间后方 交会	239	11.1 序贯平差	268
9.2.5 实例分析	240	11.1.1 平差原理	268
本章小结	242	11.1.2 平差值的计算	270
习题	242	11.1.3 精度评定	270
第 10 章 误差椭圆	245	11.1.4 实例分析	271
10.1 概述	246	11.2 秩亏自由网平差	273
10.1.1 点位中误差的定义	246	11.2.1 引起秩亏自由网的 原因	273
10.1.2 点位方差与坐标 系统的无关性	247	11.2.2 算法原理	274
10.1.3 点位方差表示点位的 局限性	248	11.2.3 S 的具体形式	275
10.2 点位误差	248	11.2.4 实例分析	276
10.2.1 点位误差的计算	248	11.3 附加系统参数的平差	278
10.2.2 任意方向的位差	251	11.3.1 平差原理	278
10.2.3 位差的极值	252	11.3.2 系统参数的显著性 检验	280
10.2.4 以位差的极值表示 任意方向的位差	254	11.3.3 实例分析	280
10.3 误差曲线	256	11.4 最小二乘配置	281
10.3.1 误差曲线的概念	256	11.5 稳健估计	284
10.3.2 误差曲线的用途	256	11.5.1 模型误差与稳健估计	284
10.4 误差椭圆	257	11.5.2 稳健估计的方法	286
10.4.1 误差椭圆的概念	257	11.5.3 实例分析	287
10.4.2 误差椭圆代替误差 曲线的原理	258	11.6 数据探测与可靠性理论	290
10.4.3 误差椭圆的绘制	259	11.6.1 多余观测分量	290
10.5 相对误差椭圆及其应用	260	11.6.2 内部可靠性	293
10.5.1 利用点位误差椭圆 评定精度存在的 问题	260	11.6.3 外部可靠性	295
10.5.2 相对点位误差椭圆	261	11.6.4 单个粗差的检验及 定位	296
本章小结	263	本章小结	298
		习题	298
		参考文献	300

第1章

绪论

教学目标

本章主要介绍误差理论与测量平差基础这门课程的主要内容。通过本章的学习，应达到以下目标：

- (1) 了解本课程的研究内容和任务；
- (2) 掌握偶然误差、系统误差和粗差的基本概念；
- (3) 掌握观测误差的性质及其影响因素；
- (4) 了解误差理论与测量平差这门学科的发展历程。

教学要求

知识要点	能力要求	相关知识
观测误差的分类	(1) 掌握偶然误差的定义 (2) 掌握系统误差和粗差的定义和性质	(1) 偶然误差 (2) 系统误差 (3) 粗差
观测误差的来源	掌握误差的五大来源	(1) 测量仪器 (2) 方法误差 (3) 观测者 (4) 外界条件 (5) 观测对象
本学科的内容与任务	(1) 了解本学科的内容 (2) 了解本学科的任务	(1) 误差基本理论 (2) 测量平差模型 (3) 测量平差方法与应用
本学科的发展历程	了解本学科的发展历程	高斯提出最小二乘原理

基本概念

偶然误差、系统误差、粗差、观测误差

引言

从几何上知道一个平面三角形三内角之和应等于 180° ，但如果对这三个内角进行观测，则三内角观测值之和通常不等于 180° 。在同一量的各观测值之间，或在各观测值与其理论上的应有值之间存在差异

的现象，在测量工作中是普遍存在的，是什么原因引起每次结果不一致？如何对这些不一致的观测数据进行处理？这些内容就是本课程所要解决的主要问题。

1.1 观测误差

观测(测量)是指用一定的仪器、工具、传感器或其他手段获取与地球空间分布有关信息的过程和实际结果，而误差主要源于观测过程。通过实践，人们认识到，任何一种观测都不可避免地要产生误差。当对某量进行重复观测时，常常发现观测值之间存在一些差异。例如，对同一段距离重复丈量若干次，量得的长度通常是互有差异的。另一种情况是，如果已经知道某几个量之间应该满足某一理论关系，但对这几个量进行观测后，也会发现实际观测结果往往不能满足应有的理论关系。例如，从几何上知道一个平面三角形 3 个内角之和应等于 180° ，但如果对这 3 个内角进行观测，则 3 个内角观测值之和通常不等于 180° 。

由于观测值中存在观测误差，因此在测量工作中普遍存在同一量的各观测值之间，或在各观测值与其理论上的应有值之间存在差异的现象。

1.1.1 观测误差的来源

观测误差的产生原因概括起来主要有以下 5 方面。

1. 测量仪器

测量工作通常是利用测量仪器进行的。由于每一种仪器都具有一定限度的精密度，因而使观测值的精密度受到一定的限制。例如，在用只刻有厘米分划的普通水准尺进行水准测量时，就难以保证在估读厘米以下的尾数时完全正确；同时，仪器本身受制造工艺的限制也有一定的误差，例如，水准仪的视准轴与水准轴不完全平行，水准尺的分划误差等。因此，使用这样的水准仪和水准尺进行观测，就会使水准测量的结果产生误差。同样，经纬仪、全站仪、GPS 接收机等仪器的观测结果也会有误差的存在。

2. 观测者

由于观测者的感觉器官的鉴别能力有一定的局限性，所以在仪器的安置、照准、读数方面都会产生误差。同时，观测者的工作态度和技术水平，也可直接影响观测成果质量。

3. 外界条件

观测时所处的外界条件，如温度、湿度、压强、风力、大气折光、电离层等因素都会对观测结果直接产生影响，随着这些因素的变化，它们对观测结果的影响也随之不同，因此观测结果产生误差是必然的。

4. 观测对象

观测目标本身的结构、状态和清晰程度等，也会对观测结果直接产生影响，如三角测

量中的观测目标觇标和圆筒由于风吹日晒而产生偏差；GPS 导航定位中的卫星钟误差及设备延迟误差等，都会使测量结果产生误差。

5. 方法误差

方法误差是指由于测量方法(包括计算过程)不完善而引起的误差。事实上，不存在不产生测量误差的尽善尽美的方法。由测量方法引起的测量误差主要有两种情况。

(1) 由于测量人员的知识不足或研究不充分致使操作不合理，或对测量方法、测量程序进行错误的简化等引起的方法误差。

(2) 分析处理观测数据时引起的方法误差。例如，对同一组观测数据用不同的平差准则所得到的结果会不一样。

通常把测量仪器、观测者、外界条件、观测对象和方法误差这 5 个方面的因素合起来称为观测条件。观测条件的好坏与观测成果的质量有着密切的联系。当观测条件好一些，观测中产生的误差就可能相应地小一些，观测成果的质量就会高一些。反之，观测条件差一些，观测成果的质量就会相对低一些。如果观测条件相同，观测成果的质量也就可以说是相同的。但是，不管观测条件如何，观测的结果都会产生这样或那样的误差，测量中产生误差是不可避免的。当然，在客观条件允许的限度内，必须确保观测成果具有较高的质量。

1.1.2 观测误差分类

根据观测误差对观测结果的影响性质，可将观测误差分为偶然误差、系统误差和粗差。

1. 偶然误差

在相同的观测条件下作一系列的观测，如果误差在大小和符号上都表现出偶然性，即从单个误差看，该列误差的大小和符号没有规律性，但就大量误差的总体而言，具有一定的统计规律，这种误差称为偶然误差。简单地说，符合统计规律的误差称为偶然误差。

例如，经纬仪测角误差是由照准误差、读数误差、外界条件变化所引起的误差和仪器本身不完善而引起的误差等综合的结果。而其中每一项误差又是由许多偶然因素所引起的小误差。例如照准误差可能是由于照准部旋转不正确、脚架或觇标的晃动与扭转、风力风向的变化、目标的背影、大气折光等偶然因素影响而产生的小误差。因此，测角误差实际上由许多微小误差项构成，而每项微小误差又随着偶然因素的影响不断变化，其数值的大小和符号的正负具有随机性，这样，由它们所构成的误差，就其个体而言，无论是数值的大小或符号的正负都是不能事先预知的，是随机的，也是不可避免的。因此，把这种性质的误差称为偶然误差。偶然误差就其总体而言，具有一定的统计规律，有时又把偶然误差称为随机误差，其分布规律符合或近似正态分布。

2. 系统误差

在相同的观测条件下作一系列的观测，如果误差在大小、符号上表现出系统性，或者在观测过程中按一定的规律变化，或者为某一常数，那么，这种误差称为系统误差。

系统误差按其表现形式主要分为 4 类：线性系差、恒定系差、周期系差和复杂性系差。例如全站仪的乘常数误差所引起的距离误差与所测距离的长度成正比的增加，距离愈长，误差也愈大，这种误差属于系统误差中的线性系差，即误差是随测量时间或其他因素变化而逐渐增加或减少的；恒定系差是指误差不随时间或其他因素而变化，为恒定常数，如全站仪的加常数误差所引起的距离误差为一常数，与距离的长度无关；周期系差是指误差随测量时间或其他因素变化而呈周期性变化，如沉降监测中，在两固定点间每天重复进行水准测量，就会发现由于温度等外界因素变化而产生以年为周期的周期性误差；复杂性系差是指误差随测量时间或其他因素变化而呈十分复杂的规律，可能是前 3 种系差的叠加或服从某种较为复杂的分布。

系统误差在相同条件下不能通过多次重复观测而减少，它也不像偶然误差那样服从正态分布。其对于观测结果的影响一般具有累积作用，对成果质量的影响也特别显著。在实际工作中，应该采用各种方法来消除或减弱系统误差的影响，达到实际上可以忽略不计的程度，即将残余的系统误差控制在小于或最大等于偶然误差的量级内。为达到这一目的，通常采取如下措施。

(1) 找出系统误差出现的规律性并设法求出它的数值，然后对观测结果进行改正。例如尺长改正、经纬仪测微器行差改正、折光差改正；GPS 观测中根据电离层、大气层的折射模型对观测值进行改正等。

(2) 合理选择观测条件。如根据经验可知，三角测量中的系统误差源于观测条件的不同，主要是指天气(指太阳照射方向、日间或夜间、风向、风力、气温、气压等)，若观测条件改变，如由日间观测改为夜间观测，则观测值服从另一母体，有另一均值，因而有另一系统误差，同一观测角值的分群现象也可由此得到解释。所以利用不同的观测条件进行观测，系统误差就近似于偶然误差，取其平均，就可减少系统误差的影响。

(3) 改进仪器结构并制订有效的观测方法和操作程序，使系统误差按数值接近、符号相反的规律交替出现，从而在观测结果的综合中基本抵消。例如，经纬仪按度盘的两个相对位置读数的装置、测角时纵转望远镜的操作方法、水准测量中前后视尽量等距的设站要求以及高精度水平角测量中日、夜的测回数各为一半的时间规定等。

(4) 综合分析观测资料，发现系统误差并在平差计算中将其消除。例如，在 GPS 数据处理中用观测值的线性组合参加平差，以抵消电离层、大气折射的影响。

(5) 实验估计法。对在测量中无法消除但却可以估计出大小和符号的系统误差，可在测量结果中给予改正，如距离丈量中的尺长改正。

系统误差与偶然误差在观测过程中总是同时发生的。当观测值中有显著的系统误差时，偶然误差就居于次要地位，观测误差就呈现出系统的性质。反之，则呈现出偶然的性质。

当观测序列中已经排除了系统误差的影响，或者说系统误差与偶然误差相比已处于次要地位，即该观测序列中主要是存在着偶然误差。对于这样的观测序列，就称为带有偶然误差的观测序列。这样的观测结果和偶然误差都是一些随机变量，如何处理这些随机变量，就是误差理论与测量平差这一学科所要研究的内容。

3. 粗差

在测量工作的整个过程中，除了偶然误差和系统误差外，还可能发生粗差。粗差一般是指超限误差，即指比最大偶然误差还要大的误差，通俗地说，粗差要比偶然误差大

好几倍。例如,观测时大数读错,计算机输入数据错误,航测相片判读误差,控制网起始数据误差等。这是一种人为误差,在一定程度上可以避免。它的存在将极大地危害最终测量成果。随着现代测绘技术的发展,特别是空间技术在对地观测中发挥越来越大的作用,可以在短时间内通过自动化采集等方法获得大量的观测值,这样难免会有粗差混入信息之中。粗差问题在现今的高新测量技术(GPS、RS、GIS)中尤为突出。识别粗差的方法不是用简单方法就可以解决,需要通过数据处理技术进行识别、定位和消除。

上述三类误差中,偶然误差和系统误差属于不可避免的正常性误差,而粗差则属于能够避免的非正常性误差,是不允许的。因此,在误差数据处理中,对含有粗差的观测结果应予以剔除,使得测量结果只含有偶然误差和系统误差。

1.2 本学科的内容与任务

1. 本学科的内容

测量平差是测绘学中一个有悠久历史的专有名词。测量平差发展到现在,从其理论构成和计算技术来看,它是集概率统计学、近代代数学、计算机软件、误差理论、测量数据处理技术为一体的一门不断发展和完善的学科,其理论和方法对其他学科,如计量学、物理学、电工学、化工学及各类工程学科等,只要是处理带有误差的观测数据,有多余观测值问题,均可应用,所以测量平差的适用范围十分广泛。

通过本课程的学习使学生掌握测量误差的基本理论、处理测量数据的基本方法和基本技能,培养学生理论联系实际和解决实际问题的能力,为以后的专业学习,以及进一步学习和研究误差理论与测量平差打下坚实的基础。其主要内容如下所示。

(1) 误差基本理论:包括测量误差及其分类;偶然误差的概率特性;精度标准;中误差和权的定义及其确定方法;方差阵和权逆阵传播规律;方差传播和权倒数传播定律在测量中的应用;测量平差中必要的统计假设检验方法。

(2) 测量平差函数模型和随机模型的概念及建立,参数估计理论及最小二乘原理。

(3) 测量平差基本方法:重点介绍间接平差和条件平差。

(4) 测量平差的应用:重点介绍 GPS 网平差和坐标值平差及误差椭圆。

(5) 近代测量平差理论和方法简介。

2. 本学科的任务

由于观测结果不可避免地存在着偶然误差的影响,因此在实际工作中,为了提高成果的质量、防止错误发生,通常要使观测值的个数多于未知量的个数,也就是要进行多余观测。例如,一个平面三角形,只需要观测其中的两个内角,即可决定它的形状,但通常是观测 3 个内角。由于偶然误差的存在,通过多余观测必然会发现在观测结果之间不相一致,或不符合应有关系而产生的不符值。因此,必须对这些带有偶然误差的观测值进行处理,消除不符值,得到观测量的最可靠的结果。由于这些带有偶然误差的观测值是一些随机变量,因此,可以根据概率统计的方法来求出观测量的最可靠结果,这就是误差理论与测量平差的一个主要任务。误差理论与测量平差的另一个主要任务是评定测量成果的

精度。

从误差处理的角度，误差理论与测量平差的任务还包括：建立误差分析体系，研究误差来源、误差类型、度量误差的指标、研究误差的空间传播机制，削弱误差对测绘产品的质量影响，用统计分析理论进行产品的质量控制在等。

1.3 本学科的发展历史

18世纪末，在天文学、大地测量学以及与观测自然现象有关的其他科学领域中，常常提出这样的问题，即如何消除由于观测误差引起的观测值之间的矛盾，从多于待估量的观测值中求出待估量的最优值。当时各国许多著名科学家都开始研究这一课题。

1794年，年仅17岁的高斯首先提出了解决这个问题的方法——最小二乘法。他是以求算术平均值为待求量的最或然值，观测误差服从正态分布这一假设导出了最小二乘原理。1801年，天文学家对刚发现的谷神星运行轨道的一段弧长进行了一系列观测，后来因故中止了观测。这就需要根据这些极其有限且带有误差的观测结果求出该星运行的实际轨道。高斯用自己提出的最小二乘法解决了这个当时的难题，对谷神星运行轨道进行了成功预报，使天文学家又及时找到了这颗彗星。但高斯并没有及时行文发表他所提出的最小二乘方法。直到1809年，高斯才在《天体运动的理论》一文中，从概率的观点详细叙述了他所提出的最小二乘原理。而在此之前，1806年，勒让德发表了《决定彗星轨道新方法》一文，从代数的观点独立地提出了最小二乘法，并定名为最小二乘法。所以后人称它为高斯—勒让德方法。

自高斯1794年提出最小二乘原理到20世纪五六十年代的150多年中，许多学者对误差理论与测量平差的理论和方法进行了大量的研究，提出了一系列解决各类测量问题的平差方法。这些平差方法都是基于观测值随机独立的高斯最小二乘原则，所以一般称其为经典最小二乘平差。这一时期，由于计算工具的限制，误差理论与测量平差的主要研究方向是如何少解线性方程组。提出了许多分组解算线性方程组的方法，如克吕格分组平差，赫尔默特分区平差等都是为了使解算方程组变得简单。

自20世纪六七十年代开始，测量手段逐渐精密和现代化，特别是电子计算机、矩阵代数、泛函分析、最优化理论和概率统计在测量平差中广泛应用，对测量平差的理论和实际应用产生了深刻影响，误差理论与测量平差得到了很大发展，出现了许多新的平差理论和平差方法。

例如，田斯特拉于1947年提出相关观测值的平差理论，将经典平差中对观测值随机独立的要求，推广到随机相关的观测值；克拉鲁普在1969年提出最小二乘滤波、推估和配置理论；迈塞尔于1962年将高斯的最小二乘平差模型中的列满秩系数阵推广到奇异阵，提出了解决非满秩平差问题的秩亏自由网平差方法，之后其他学者综合各种情况得到了广义高斯-马尔柯夫平差模型，并把广义高斯-马尔柯夫模型的参数估计称为最小二乘统一理论；20世纪80年代以来有人将经典的先验定权方法改进为后验定权方法的研究，提出了多种方差-协方差分量的验后估计法；20世纪中期以来，很多学者致力于系统误差和粗差的研究，提出了附加系统参数的平差方法和粗差探测理论。

总之，自20世纪70年代以来，随着全球定位系统(GPS)、地理信息系统(GIS)和遥

感系统(RS)在测绘中的应用,测量平差理论和方法得到了飞速发展,出现了许多新的测量数据处理理论和方法,也推动了测量平差理论的发展。

本章小结

本章就观测误差的来源以及观测误差的分类进行了介绍,分析了本学科的任务与内容,简单回顾了本学科的发展历程。

习 题

1. 观测条件是由哪些因素构成的?它与观测结果的质量有什么联系?
2. 观测误差分为哪几类?它们各自是怎样定义的?对观测结果有什么影响?试举例说明。
3. 粗差对观测成果有何影响?怎样才能避免粗差的产生?
4. 系统误差对观测成果有何影响?怎样才能削弱或消除它?
5. 测量平差的任务是什么?
6. 观测误差可分为哪几种?
7. 用钢尺丈量距离,有下列几种情况使得结果产生误差,试分别判定误差的性质及符号。
 - (1) 尺长不准确。
 - (2) 尺不水平。
 - (3) 估读小数不准确。
 - (4) 尺垂曲。
 - (5) 尺端偏离直线方向。
8. 在水准测量中,有下列几种情况使水准尺读数有误差,试判断误差的性质及符号。
 - (1) 视准轴与水准轴不平行。
 - (2) 仪器下沉。
 - (3) 读数不准确。
 - (4) 水准尺下沉。
9. 什么叫多余观测?测量中为什么要进行多余观测?
10. 举出偶然误差和系统误差的例子各5个。

第2章

误差理论的基本知识

教学目标

本章是全书的基础理论，也是本书的重点，主要介绍测量误差理论的基本知识。通过本章的学习，应达到以下目标：

- (1) 掌握随机变量的数学期望、方差、协方差、协方差阵及互协方差的定义和性质；
- (2) 掌握正态分布的性质；
- (3) 掌握偶然误差的特性；
- (4) 重点掌握精度的概念以及评价精度的几种指标；
- (5) 掌握统计假设检验的步骤以及统计假设的几种方法；
- (6) 了解有关矩阵的基本知识。

教学要求

知识要点	能力要求	相关知识
随机变量的数字特征	<ol style="list-style-type: none"> (1) 掌握数学期望的概念与性质 (2) 掌握方差的概念和性质 (3) 掌握协方差、协方差阵及互协方差阵的概念及性质 	<ol style="list-style-type: none"> (1) 数学期望的概念 (2) 方差的概念 (3) 协方差、相关系数的概念 (4) 协方差阵、互协方差阵的概念
测量常用的概率分布	<ol style="list-style-type: none"> (1) 掌握正态分布的性质和类别 (2) 了解几种非正态分布 	<ol style="list-style-type: none"> (1) 一维正态分布的性质 (2) 标准正态分布的性质 (3) n 维正态分布的性质 (4) χ^2 分布的性质 (5) t 分布的性质、F 分布的性质
偶然误差的统计特性	掌握偶然误差的四大特性	<ol style="list-style-type: none"> (1) 误差的有界性 (2) 误差的对称性 (3) 误差的趋向性 (4) 误差的抵偿性
精度和衡量精度的指标	<ol style="list-style-type: none"> (1) 重点掌握精度及其相关概念的含义 (2) 重点掌握衡量精度几种指标的概念 (3) 重点理解几种精度指标的关系 (4) 了解不确定度的概念 	<ol style="list-style-type: none"> (1) 精度、准确度、精确度的概念 (2) 方差和中误差 (3) 平均误差、偶然误差 (4) 极限误差、相对误差 (5) 不确定度的概念
统计假设检验	<ol style="list-style-type: none"> (1) 掌握统计假设检验的原理 (2) 掌握统计假设的几种方法 	<ol style="list-style-type: none"> (1) 参数假设和非参数假设 (2) 显著水平的确定 (3) 接受域与拒绝域的确定 (4) u 检验法、t 检验法 (5) χ^2 检验法、F 检验法
矩阵的基本知识	<ol style="list-style-type: none"> (1) 了解矩阵的秩、迹的概念 (2) 了解矩阵的反演公式 	<ol style="list-style-type: none"> (1) 矩阵秩的概念 (2) 矩阵迹的概念



基本概念

数学期望、方差、协方差、协方差阵、互协方差阵、精度、准确度、精密度、正态分布、 χ^2 分布、 t 分布、 F 分布、平均误差、或然误差、极限误差、相对误差、不确定度、 u 检验法、 t 检验法、 χ^2 检验法、 F 检验法、矩阵秩、矩阵迹



引言

在测量中，用不同的仪器对同一目标进行观测，所得的观测数据不一样，用什么指标来衡量观测的数据不一样，从哪些方面来衡量观测数据不一样，这是本章所要解决的问题。

在实际的测量工作中，如果用不同仪器、在不同的条件下对同一目标进行观测，得到两组不同的观测数据，如何判断这两组数据是否一致，就用到本章的统计假设检验。

2.1 随机变量的数字特征

2.1.1 数学期望

1. 定义

随机变量 X 的数学期望定义为随机变量取值的概率平均值，记作 $E(X)$ 或 ξ 。

如果 X 是离散型随机变量，其可能取值为 $x_i (i=1, 2, \dots)$ ，且 $X=x_i$ 的概率 $P(X=x_i)=p_i$ ，则

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i \quad (2-1)$$

如果 X 是连续型随机变量，其分布密度为 $f(x)$ ，则

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad (2-2)$$

上述求数学期望的方法与力学中求质量重心坐标的方法一致，所以数学期望也可以看作分布重心的横坐标。

2. 性质

(1) 设 k 为常数，则

$$E(k) = k$$

(2) 设 k 为常数，则

$$E(kX) = kE(X)$$

(3) 无论各变量独立与否，其和的数学期望等于每一变量数学期望之和，即

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

证明如下:

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x+y)f(x,y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y) dx dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf_1(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} yf_2(y) dy = E(X) + E(Y) \end{aligned}$$

式中: $f_1(x)$, $f_2(y)$ 为边际密度函数, 一般

$$E(X_1+X_2+\cdots+X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$

(4) 如各变量相互独立, 则其乘积的数学期望等于各变量数学期望之积, 即

$$E(X_1X_2\cdots X_n) = E(X_1)E(X_2)\cdots E(X_n)$$

2.1.2 方差

1. 定义

随机变量 X 的方差记作 $D(X)$, 其定义为

$$D(X) = E[X - E(X)]^2 = E[(X - \xi)]^2 = E[(X - E(X))^2] \quad (2-3)$$

如果 X 是离散型随机变量, 其可能取值为 x_i ($i=1, 2, \dots, n$), 且 $X=x_i$ 的概率 $P(X=x_i)=p_i$, 则

$$D(X) = \sum_{i=1}^n [x_i - E(X)]^2 p_i = \sum_{i=1}^n [x_i - \xi]^2 p_i \quad (2-4)$$

如果 X 是连续型随机变量, 其分布密度函数为 $f(x)$, 则

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - \xi]^2 f(x) dx \quad (2-5)$$

2. 性质

(1) 如 k 为常数, 则 $D(k) = 0$ 。

(2) 如 k 为常数, 则 $D(kX) = k^2 D(X)$ 。

(3) 设 a 、 b 为常数, 则 $D(aX+b) = a^2 D(X)$ 。

(4) 设 X 的数学期望为 ξ , 方差 $D(X) = \sigma^2$, 则

$$D\left(\frac{X-\xi}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} D(X-\xi) = \frac{1}{\sigma^2} D(X) = \frac{1}{\sigma^2} \sigma^2 = 1$$

(5) $D(X) = E(X^2) - E^2(X)$ 。

证明如下:

$$\begin{aligned} D(X) &= E[X - E(X)]^2 = E[X^2 - 2XE(X) + E^2(X)] \\ &= E(X^2) - 2E[XE(X)] + E^2(X) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E^2(X) \\ &= E(X^2) - E^2(X) \end{aligned}$$