

理論力學原理及習題

(並介紹拉格蘭方程式及漢彌敦原理)



理論力學原理及問題

（適用於初級中學、大學、及工程技術學校）



中國電力出版社
（北京）

理論力學原理及習題

(並介紹拉格蘭方程式及漢彌敦原理)

我們的一個目標

文明的進步，因素很多，而科學居其首。科學知識的傳播，是提高工業生產，改善生活環境的主動力，在整個社會長期發展上，乃人類對未來世代的投資。科學宗旨，固在充實人類生活的幸福也。

近三十年來，科學發展速率急增，其成就超越既往之累積，昔之認為絕難若幻想者，今多已成事實。際茲太空時代，人類一再親履月球，這偉大的綜合貢獻，出諸各種科學建樹與科學家精誠合作，誠令人有無限興奮！

時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就人才，促進科學研究與發展，允為社會、國家的急要責任，培養人才，起自中學階段，學生對普通科學，如生物、化學、物理、數學，漸作接觸，及至大專院校，便開始專科教育，均仰賴師資與圖書的啓發指導，不斷進行訓練。科學研究與教育的學者，志在將研究成果貢獻於世與啓導後學。旨趣崇高，立德立言，也是立功，至足欽佩。

科學本是互相啓發作用，富有國際合作性質，歷經長久的交互影響與演變，遂產生可喜的意外收穫。

我國國民中學一年級，便以英語作主科之一，然欲其直接閱讀外文圖書，而能深切瞭解，並非數年之間，所可苛求者。因此，從各種文字的科學圖書中，精選最新的基本或實用科學名著，譯成中文，依類順目，及時出版，分別充作大專課本、參考書，中學補充讀物，就業青年進修工具，合之則成宏大科學文庫，悉以精美形式，低廉價格，普遍供應，實深具積極意義。

本基金會為促進科學發展，過去八年，曾資助大學理工科畢業學生，前往國外深造，贈送一部份學校科學儀器設備，同時選譯出版世界著名科學技術圖書，供給在校學生及社會大眾閱讀，今後當本初衷，繼續邁進，謹祈：

自由中國大專院校教授，研究機構專家、學者；

旅居海外從事教育與研究學人、留學生；

大專院校及研究機構退休教授、專家、學者；

主動地精選最新、最佳外文學科技術名著，從事翻譯，以便青年閱讀，或就多年研究成果，撰著成書，公之於世，助益學者。本基金會樂於運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。掬誠奉陳，願學人們，惠然贊助，共襄盛舉，是禱。

原 序

在十七世紀牛頓列出其著名之力學定律。這些非常簡單的定律用以描述及預測在宇宙中可觀察物體之運動，包括太陽系中行星之運動。

早在廿世紀初期已發現由牛頓引證之不同理論結果與電磁學及原子現象由精確實驗所求出的結果不相符合。此種矛盾導出愛因斯坦的相對力學，革新了空間與時間的觀念，而引導出量子力學。凡物體運動之速率小於光速甚多或其大小大於分子及原子甚多時，牛頓力學亦稱古典力學仍極適用。由此原因，其在科學及工程仍保有其重要性。

本書之目的在提出牛頓力學的說明及其應用。本書計劃用作所有現行標準教本之補充或力學之正式課本。本書對學習物理，工程，數學，天文，天體力學及空氣動力學等學生及任何門類需瞭解力學基本定律公式者可證明極為有用。

每章開始對適當定義，定律及定理作一明確之陳述，加以證明及其他敘述之材料。隨後分類列出已解及補充習題。已解習題說明並擴大理論，深入精確之處，否則學生將繼續不安之感，且對有效學習極具重要之基本定律予以複習。甚多定理之證明及基本定律之引證均包括在已解習題之內。大多數補充習題備有答案，為每章全部材料之完全複習。

所列課目包括質點，一組質點及剛體之動力學及靜力學。向量方法，有助於自己熟習簡易記數符號及幾何及物理意義，首先予以介紹且用之於全書，向量計算列於第一章中，可於開始時學習之，或於需要時再提及。已加材料包括羅雲方程式及漢彌登理論，列有牛頓力學之相當公式極具實用及理論價值。

已包括較大部課程為多之材料。此可使本書具伸縮性，備為較有用之參考書及鼓勵對課目之更多興趣。

目 次

第 一 章 向量、速度及加速度	1
力學、運動學、動力學及靜力學、力學的公理基礎、數學方式、空間、時間及物質、無向量和向量、向數代數學、向量之代數定律、單位向量、直角單位向量、一向量之分量、點或無向量積，又或向量積，三重積、向量之導數、向量之積分、速度、加速度、相對速度及加速度、切線及法線加速度、圓週運動、對時間之導數表示法、梯度、散度及旋度 (Gradient, Divergence and Curl)、線積分、與路徑無關、自由、滑動及約束力量、有解習題、補充習題。	
第 二 章 牛頓運動定律、功、能和動量	43
牛頓定律、力與質量之定義、力及質量之單位、橫性坐標、絕對運動、功率、動能、保守力場、位能或位、能量不滅、衝量、轉矩及角動量、動量不滅、角動量不滅、非保守力、一質點之定力學或平衡、平衡之穩定、有解習題、補充習題	
第 三 章 在一均勻力場・落體及拋射體	79
均勻力場、等加速度運動、由重力所生之重量及加速度、牛頓定律、力與質量之定義、力及質量之單位、重力單位系統、一平地球之假設、自由落體、拋射體、均勻力場之位或位能、一阻撓介質中之運動、系統隔離、約束運動、摩擦力、在均勻重力場中之靜力學、有解習題、補充習題。	
第 四 章 簡諧振盪器及單擺	109
簡諧振盪器、簡諧運動之振幅、週期及頻率、簡諧振盪器之能量、阻尼簡諧振盪器、過阻尼、臨界阻尼及低阻尼運動、強迫振動、共振、單擺、二度或三度空間簡諧振盪器、有解習題、補充習題。	

第五章 中心力與行星運轉..... 145

中心力、中心力場之某些重要特性、中心力場中質點運動方程式、由運動方程式導出之重要方程式、中心力場中質點之位能、能量不減、由中心力決定軌道、由軌道決定中心力、天文學中之某些定義、刻卜勒行星運動定律、牛頓萬有引力定律、其他物體及球體之引力、反平方力場之運動、有解習題、補充習題。

第六章 動座標系..... 179

非慣性座標系、旋轉座標系、導數運算子、動座標系中之加速度、柯里歐利和向心加速度、相對於地球的質點運動、柯里歐利力及向心力、一般動座標系、富考特擺、有解習題、補充習題。

第七章 質點系..... 205

分離及連續系、剛體與彈性體、自由度、質量中心（質心）、重心、一質點系之動量、質心之運動、動量不減、質點系之角動量、作用於一系統之總外轉矩、角動量與總外轉矩之關係、角動量不減、質量系之動能、功、位能、能量不減、相對質心之運動、衝量、約束力、完全約束及非完全約束（Holonomic and Non-holonomic）虛位移、質點系靜力學及虛功、保守場中之平衡及其穩定、達拉伯（D'Alembert）原理、有解習題、補充習題。

第八章 振動系統、火箭和碰撞之應用..... 241

變質量問題、火箭、質點之碰撞、連續質點系、振動絃、邊界值問題、福里哀級數、奇或偶函數、福里哀級數之收斂、有解習題、補充習題。

第九章 剛體之平面運動..... 277

剛體、移動及轉動、歐拉定理、轉動瞬時軸、剛體之一般運動、蔡氏定理、一剛體之平面運動、轉動慣量、迴轉半徑、

轉動慣量之定理、特殊轉動慣量、力偶、動能和對一固定軸之角動量、剛體對於一個定軸之運動、功和功率、衝量、角動量不減、複擺、剛體之一般平面運動、瞬時中心、空間及物體中心、剛體靜力學、虛功原理及達拉伯原理、最小位能原理、穩定性、有解習題、補充習題。

第十章 剛體之空間運動..... 315

剛體在空間之一般運動、自由度數、剛體之純轉動、剛體中一點固定時之速度及角速度、角動量、轉動慣量、慣矩積、轉動慣量方陣及張量、轉動之動能、慣量主軸、對主軸之角動量及動能、慣量橢球、運動之歐拉方程式、無力運動、不變線及面、卜因叔構造、物錐線、空錐線、空間及物體錐、對稱剛體、地球之旋轉、歐拉角、對歐拉角表及角速度及動能、旋轉陀螺運動、旋轉器、有解習題、補充習題。

第十一章 拉格蘭方程式..... 349

力學之一般方法、廣義定理、記數法、轉換方程式、力學系統分數、時間無關及時間有關系統、完全及非完全系統、保守及非保守系統、動能、廣義速度、廣義力、拉格蘭方程式、廣義動量、非完全系之拉格蘭方程式、衝力之拉格蘭方程式、有解習題、補充習題。

第十二章 漢彌敦原理..... 385

漢彌敦法、漢彌敦、漢彌敦方程式、守恒系統之漢彌敦函數、不定或循環座標、相空間、李奧偉定理、度量之積分、漢彌敦原理、正則或連續轉換、正則轉換之條件、引生函數、漢彌敦、傑克畢方程式、漢彌敦·傑克畢方程式之解、漢彌敦函數與時間無關之條件、相積分作用和角變量、有解習題、補充習題。

附錄 A 單位及因次..... 417

附錄 B 天文數據資料..... 420

附錄C	特殊微分方程式之解.....	422
附錄D	特別符號及表示法.....	437

第一章 向量、加速及加速度

力學，運動學，動力學及靜力學

力學為物理學之一部門，涉與自然物體位置之運動或變化。常再劃分為

1. 運動學，涉與運動之幾何學。
2. 動力學，涉與運動之物理原因。
3. 靜力學，涉與無明顯運動下之情況。

力學的公理基礎

力學公理之發展，與其他科學相同，應包括下列基本要素：

1. 未下定義之項目或觀念。此屬需要，因任何定義必需以未下定義之事項為基本。
 2. 未證明之學說。此為基本之說明，常用數學之形式，希將經研究之現象作有效之敘述。通常此種說明稱之為公理或假定，以實驗觀測或其摘要為基本。此情況下，常稱之為定律。
 3. 已下定義之項目或觀念。此項定義係利用未下定義之項目或觀念而獲得。
 4. 已證明之學說。此常稱之為定理，係由定義或公理而證得。
- 歐氏幾何中，有一「想向之公理」，即點與線為未下定義之觀念。

數學方式

將真正自然物體，用適當數學方式來代替，常可將物理現象的數學敘述予以簡化。例如敘述地球繞太陽公轉時，實用上，吾人常視地球及太陽為一點。

空間，時間及物質

由日常生活經驗，吾人對下列項目或觀念的意義，均具有某些思想，但却甚難簡明陳述其完全適合之定義。故吾人可視之為未下定義之觀念。

1. 空間。此與點，位置，方向及位移等觀念有密切關係。在空間量度包含吾人假定熟習之長度與位移之觀念。長度的單位為呎，米，哩等等。本書

中吾人假定其為歐氏空間，即歐氏幾何之空間。

2. 時間。此項觀念從吾人經驗由某一事件發生之前，後或同時所發生之其他事件而得來。時間之量度，例如可用鐘來完成之。時間的單位為秒，小時，年等等。

3. 物質。自然物體係由“物質之小點”所組成，例如原子和分子。由此吾人獲得一物質物體的觀念，稱之為質點，可視為佔住空間一點或隨時間而移動者。一質點“物質的量”的量度，稱為質量。質量的單位為克，仟克等等。除非特別說明，吾人恒假定一質點之質量係不隨時間而變化者。

長度，質量及時間常稱之為因次，其他物理的量，均由之而導出。單位和因次的討論詳附錄A。

無向量和向量

物理的各種量，諸如長度，質量和時間，只需用一單獨實數來表明之者（與量度之單位有別，因其應事先決定者）。此種量稱之為無向量，其實數稱之為量的大小。一無向量分析上用英文字母 t , m 等代表之。

其他物理的量，諸如位移，需用方向和大小來表明之者，稱之為向量。一向量分析時以粗線條字母如 A 代表之，如圖 1—1。幾何上，以箭頭 PQ 表示之， P 被稱為起點， Q 為端點。向量的大小或其長度用 $|A|$ 或 A 來表示。



圖 1—1

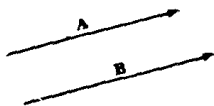


圖 1—2



圖 1—3

向量代數學

代數中熟習的實數加減乘法之運算，具適當之定義，能推廣應用於向量代數中。下列為基本定義：

1. 無論 A 與 B 兩向量之起點為何，如其大小和方向相同，則該兩向量相等。因此在上圖 1—2 中， $A = B$ 。

2. 一向量與向量 A 之方向相反，但具相同長度時，以 $-A$ 表示之如上圖 1—3。

3. 下圖 1—4(a) 中，向量 A 與 B 之和或合向量為向量 C ，係將 B 之起點

移至A之端點，再連接A之起點和B之端點而形成之向量。(詳下圖1-4(b))。吾人寫為 $C = A + B$ 。此定義相當向量加法的平行四邊形定律，如圖1-4(c)所示。

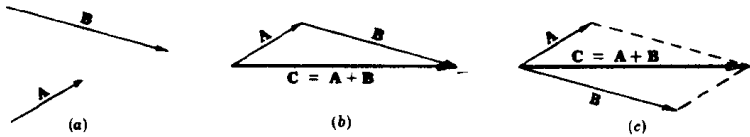


圖 1-4

直接推廣以求多於兩向量之和。例如，下圖1-5示如何可獲得向量A，B，C及D之和或合向量E。

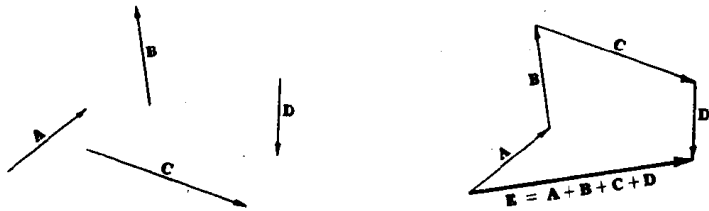


圖 1-5

4. 向量A和B之差以 $A - B$ 代表之，其差為向量C，則當C加B時應為A。 $A - B$ 相當於 $A + (-B)$ 之定義。如 $A = B$ ，則 $A - B$ 為零或零向量，以0代表。其大小為零，方向未確者。

5. 向量A乘以一無向量 p 時為向量 pA 或 Ap ，其大小為A大小之 $|p|$ 倍，方向與A同或相反，視 p 為正或負而定。如 $p = 0$ ， $pA = 0$ ，為零向量。

向量之代數定律

如A，B及C為向量， p 及 q 為無向量，則

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $p(qA) = (pq)A = q(pA)$
4. $(p + q)A = pA + qA$
5. $p(A + B) = pA + pB$

加法的交換律

加法的結合律

乘法的結合律

分配律

分配律

注意上列定律中，僅確定一向量與一無向量或更多無向量之乘法。以後

當再確定向量間之乘積。

單位向量

向量具單位長度者，稱之為單位向量。如 A 為一向量，其長度 $A > 0$ ，則 $A/A = a$ 為一單位向量，其方向與 A 相同，及 $A = Aa$ 。

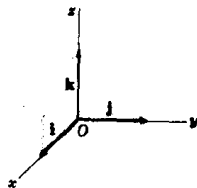


圖 1-6

直角單位向量

直角單位向量 i ， j 及 k 為相互垂直之單位向量，其方向分別與直角坐標中正 x ， y 及 z 軸相同（見圖 1-6）。除特別說明外吾人恒採用右手直角坐標制。此制之名稱係由右旋線螺絲由 Ox 旋轉 90° 到 Oy ，將向正 Z 方向前進之事實而得來。通常三向量 A ， B 及 C ，具相同之起點而不在同一平面內，可稱之形成右手制或右旋制，只要右旋螺絲由 A 旋轉到 B 小於 180° ，而向 C 方向前進（見下圖 1-7）。

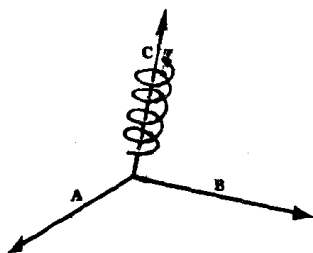


圖 1-7

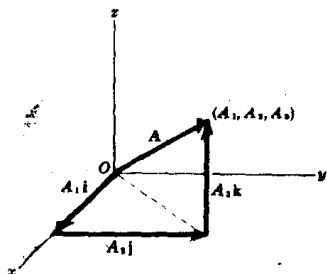


圖 1-8

一向量之分量

在三度空間，任一向量可使其起點置於直角坐標制之原點而表示之（見上圖 1-8）。 A 之起點在原點時，令 (A_1, A_2, A_3) 為其端點。則 A_1i ， A_2j 及 A_3k 被稱之為 A 分別沿 x ， y 及 z 方向之直角分向量，或簡稱為分向量。 A_1 ， A_2 及 A_3 則稱之為 A 分別沿 x ， y 及 z 方向之直角分量，或簡稱分量。 A_1i ， A_2j ，及 A_3k 之合成或合向量為 A ，故吾人可寫為

$$A = A_1i + A_2j + A_3k \quad (1)$$

$$A \text{ 之大小爲 } A = |A| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \quad (2)$$

特別當位置向量或半徑向量 $\mathbf{r}$ 由 O 至 (x, y, z) 可寫為

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (3)$$

及其大小 $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

點或無向量積

兩向量 $\mathbf{A}$ 及 $\mathbf{B}$ 之點或無向量積，以 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ 表示（讀作 $\mathbf{A}$ 點 $\mathbf{B}$ ），其定義為 $\mathbf{A}$ 及 $\mathbf{B}$ 之大小和兩者夾角餘弦之積。符號表示為

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (4)$$

注意 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ 為一無向量，不是向量。

下列定律為有效可證明者：

1. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ 點積之交換律
2. $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ 分配律
3. $\rho(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\rho\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (\rho\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\rho$ ，式中 ρ 為一無向量。

$$4. \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$$

$$5. \quad \text{如 } \mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k} \text{ 及 } \mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}, \text{ 則}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = B^2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2$$

$$6. \quad \text{如 } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0, \text{ 且 } \mathbf{A} \text{ 及 } \mathbf{B} \text{ 均非零向量, 則 } \mathbf{A} \text{ 及 } \mathbf{B} \text{ 互相垂直。}$$

叉或向量積

$\mathbf{A}$ 及 $\mathbf{B}$ 的叉或向量積為一向量 $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ （讀作 $\mathbf{A}$ 叉 $\mathbf{B}$ ）。其定義為 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 之大小為 $\mathbf{A}$ 及 $\mathbf{B}$ 之大小和兩者夾角正弦之乘。 $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 之方向係垂直於 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 之平面，使 $\mathbf{A}$ ， $\mathbf{B}$ 及 $\mathbf{C}$ 形成右手制。符號表示為

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \sin \theta \mathbf{u}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (5)$$

式中 $\mathbf{u}$ 示 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 方向之單位向量。如 $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ 或 $\mathbf{A}$ 平行於 $\mathbf{B}$ ，則 $\sin \theta = 0$ ，吾人稱 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ 。

下列定律為確實可證明者

1. $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ （叉積之交換律無效）
2. $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$ 分配律
3. $\rho(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\rho\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (\rho\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})\rho$ ，式中 ρ 為一無向量。

4. $i \times i = j \times j = k \times k = 0$, $i \times j = k$, $j \times k = i$, $k \times i = j$ 。

5. 如 $A = A_1 i + A_2 j + A_3 k$, 及 $B = B_1 i + B_2 j + B_3 k$, 則

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

6. $|A \times B|$ 是以 A 及 B 為兩邊之平行四邊形面積。

7. 如 $A \times B = 0$ 且 A 及 B 為均非零向量, 則 A 及 B 相互平行。

三重積

無向量三重積下定義為

$$A \cdot (B \times C) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \quad (6)$$

式中 $A = A_1 i + A_2 j + A_3 k$, $B = B_1 i + B_2 j + B_3 k$, $C = C_1 i + C_2 j + C_3 k$ 。代表以 A, B, C 為三邊之平行四邊體之體積, 或體積之負值, 視 A, B, C 形成或不形成右手制而定。吾人知 $A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B)$ 。

向量三重積下定義為

$$A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C \quad (7)$$

因 $(A \times B) \times C = (A \cdot C)B - (B \cdot C)A$, 顯然 $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$

向量之導數

如對每一無向量度數 u 有一相當之向量 $A(u)$, 或簡寫為 A , 則 $A(u)$ 稱之為 u 的一(向量)函數。 $A(u)$ 的導數下定義為

$$\frac{dA}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{A(u + \Delta u) - A(u)}{\Delta u} \quad (8)$$

若此極限存在時。如 $A(u) = A_1(u)i + A_2(u)j + A_3(u)k$, 則

$$\frac{dA}{du} = \frac{dA_1}{du}i + \frac{dA_2}{du}j + \frac{dA_3}{du}k \quad (9)$$

同理, 吾人能對高次導數下定義之。例如 $A(u)$ 之二次導數如存在, 則寫作

$$\frac{d^2 \mathbf{A}}{du^2} = \frac{d^2 A_1}{du^2} \mathbf{i} + \frac{d^2 A_2}{du^2} \mathbf{j} + \frac{d^2 A_3}{du^2} \mathbf{k} \quad (10)$$

例題，如 $\mathbf{A} = (2u^2 - 3u) \mathbf{i} + 5 \cos u \mathbf{j} - 3 \sin u \mathbf{k}$ ，則

$$\frac{d\mathbf{A}}{du} = (4u - 3)\mathbf{i} - 5 \sin u \mathbf{j} - 3 \cos u \mathbf{k}, \quad \frac{d^2 \mathbf{A}}{du^2} = 4\mathbf{i} - 5 \cos u \mathbf{j} + 3 \sin u \mathbf{k}$$

雖然乘積因子之次序常甚重要，微積分中，一般熟習之微分法則，可推廣至向量中。例如 $\phi(u)$ 為一無向量函數，而 $\mathbf{A}(u)$ 及 $\mathbf{B}(u)$ 為向量函數，則

$$\frac{d}{du}(\phi \mathbf{A}) = \phi \frac{d\mathbf{A}}{du} + \frac{d\phi}{du} \mathbf{A} \quad (11)$$

$$\frac{d}{du}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du} \cdot \mathbf{B} \quad (12)$$

$$\frac{d}{du}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du} \times \mathbf{B} \quad (13)$$

向量之積分

令 $\mathbf{A}(u) = A_1(u) \mathbf{i} + A_2(u) \mathbf{j} + A_3(u) \mathbf{k}$ 為 u 之一向量函數。吾人確定 $\mathbf{A}(u)$ 之非定積分為

$$\int \mathbf{A}(u) du = \mathbf{i} \int A_1(u) du + \mathbf{j} \int A_2(u) du + \mathbf{k} \int A_3(u) du \quad (14)$$

如一向量函數 $\mathbf{B}(u)$ 存在，且 $\mathbf{A}(u) = \frac{d}{du} \{ \mathbf{B}(u) \}$ ，則

$$\int \mathbf{A}(u) du = \int \frac{d}{du} \{ \mathbf{B}(u) \} du = \mathbf{B}(u) + \mathbf{c} \quad (15)$$

式中 $\mathbf{c}$ 為一任意常數向量，與 u 無關。定積分在極限 $u = \alpha$ 及 $u = \beta$ 間，與基本微積分情況同，得

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{A}(u) du = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{du} \{ \mathbf{B}(u) \} du = \mathbf{B}(u) + \mathbf{c} \Big|_{\alpha}^{\beta} = \mathbf{B}(\beta) - \mathbf{B}(\alpha) \quad (16)$$

此定積分亦能下定義為一和之極限，類似基本微積分者。

速度

假定一質點沿一路徑或曲線 C (下圖 1-9) 移動。令在時間 t 時， P 點之位置向量為 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ，而當時間為 $t + \Delta t$ 時，其點之位置向量為 $\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t)$ 。則質點在 P 點之速度 (稱為瞬時速度) 當為

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \quad (17)$$

爲 C 在 P 點之一開量切線。

如 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ，吾人能寫爲

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \quad (18)$$

速度之大小被稱之速率，當爲

$$v = |\mathbf{v}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \frac{ds}{dt} \quad (19)$$

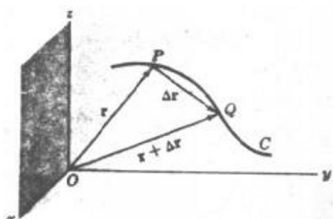


Fig. 1-9

式中 s 爲沿 C 由某起點至 P 點之弧長。

加速度

如 $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ 爲質點之速度，吾人確定質點 P 之加速度（亦稱爲瞬時加速度）爲

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} \quad (20)$$

以 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ 表示則加速度爲

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} \quad (21)$$

及其大小爲

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2} \quad (22)$$

相對速度及加速度

如兩質點 P_1 及 P_2 各以速度 $\mathbf{v}_1$ 及 $\mathbf{v}_2$ ，和加速度 $\mathbf{a}_1$ 及 $\mathbf{a}_2$ 移動，則向量

$$\mathbf{v}_{P_2/P_1} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \quad \text{and} \quad \mathbf{a}_{P_2/P_1} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 \quad (23)$$

各爲 P_2 對 P_1 之相對速度及加速度

切線及法線加速度

假定質點 P 之位置向量 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 沿曲線 C （圖 1-10）移動。吾人可視爲一直角坐標制沿質點而移動，而確定沿曲線 C 之單位切線向量 $\mathbf{T}$ ，單位主