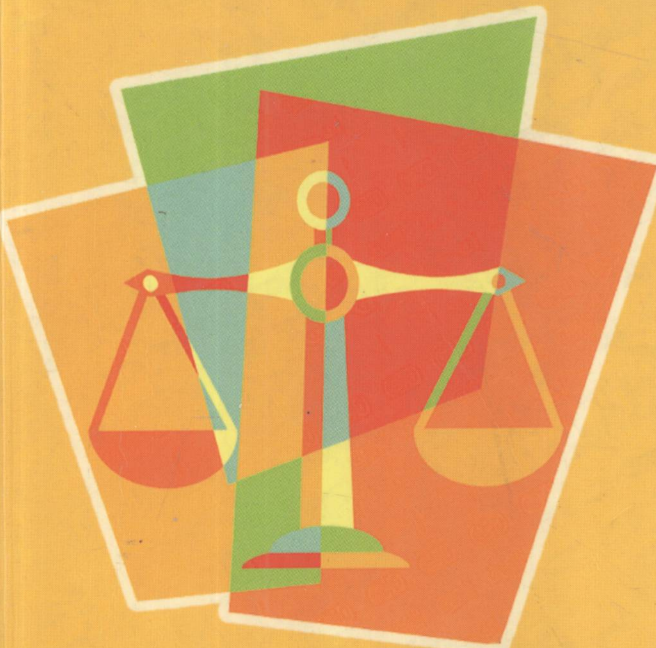
模块教材

高中新课标



数学

总主编：毛文凤 / 本册编著：朱平天 朱新芳

数列

中国大百科全书出版社

新课标高中数学模块教材

数 列

本 册 编 著：朱平天（南京师范大学数科院教授）

朱新芳（苏州一中数学高级教师）

中国大百科全书出版社

总编辑:徐惟诚　　　社　长:田胜立

图书在版编目(CIP)数据

数列/毛文风主编.-北京:中国大百科全书出版社,

2005

新课标高中数学模块教材

ISBN 7-5000-7219-8

Ⅰ.数… Ⅱ.毛… Ⅲ.代数课—高中—教学参考资料

Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 142244 号

策划设计:可一图书　(http://www.keyibook.com)

责任编辑:简菊玲

新课标高中数学模块教材

数　列

* * *

中国大百科全书出版社出版

全国新华书店经销

http://www.ecph.com.cn

北京阜成门北大街 17 号　邮编:100037　电话:010-88390797

山东省沂源县教育印刷厂

* * *

2005 年 7 月第 1 版　2005 年 7 月第 1 次印刷

890×1240 毫米　32 开本　10 印张　200 千字

ISBN 7-5000-7219-8/G·817

定　价:14.00 元

序

普通中学数学课程标准的颁布引发了一场教学内容的大改革。与时俱进地审视数学课程教学的内涵，已成为人们关注的问题。人们开始正视传统的教材构成、传统的教学模式、传统的评价标准所产生的负面影响——学生缺乏学习数学的兴趣。

本模块教材系列的编写其旨意就是要在纷繁杂乱的数学读物中，编出一套能体现数学独特的知识和能力、历史和人文、情感和价值观的数学用书，从而最大限度地调动学生对数学的兴趣。数学作为一门科学，应注重概念清晰、计算正确、论证有据；数学作为一种文化，应让人在数学读物中体会到它的文化价值。因此适当地介绍数学文化的演绎过程及它对推动社会发展的作用与展望它的发展趋势是十分必要的，是符合新课标理念的。当然，归根结底，针对中学生的任一数学读物都是有着教育功能的，在这套模块教材中我们特别着重做到三个结合：适度的形式化与启发兴趣形式相结合，发展学生的思维能力与增强数学的应用能力相结合，掌握扎实的基础知识与拓展数学视野、培养创新精神相结合。

纵观每一分册的写作均分三个层次：第一层次为引论，背景资料、数学史话、名人轶事或自撰小品等简洁地勾画出通往所述数学模块专题内容的千年路径或近代畅想，使读者产生“登高望远”的感觉或“源远流长”的体会。第二层次为主体构架，与新课程相伴，通过解惑的方式，深入浅出地讲解数学，着重思维训练、方法积累与能力提高。第三层次为提高延伸部分，与新课标的选修内容（指高中）相配合，这是特地为对数学有浓厚兴趣的青少年朋友安排的，希望同学们能喜欢它。

这三个层次，在本系列丛书不同的模块分册中，有的是以章节为标志，层次分明、一目了然，有的则是溶于章节之中相互渗透、各显特色。

这次参与丛书编写的作者，集中了目前数学普通教育的一些著名专家教授和教学一线的顶尖教师，尽管他们的认真负责精神和专业能力是毋庸置疑的，但由于编写时间仓促及作者对数学新课标的认识和实践水平有限，丛书在编写过程中难免有不足和疏漏之处，恳请广大读者批评指正。

（作者系南京师范大学数科院教授）

前　言

各位读者对“数”都很熟悉。绝大多数人从小时候开始就学习数数，并且每天都会接触到各种各样的“数”，所以“数”是无处不在、无人不用的。经济学家可以根据一些数据预报出未来经济发展的趋势，制定出新的发展规划；作曲家可以利用七个音符巧妙地组合，编写出各种优美的曲调、动听的音乐，使人赏心悦“耳”，精神振奋；数学家与“数”更是亲密，他们通过研究“数”的规律，发现“数”的性质，揭示自然现象，解决实际问题，因此“数”是数学上最基本的概念。本书专门讨论按照一定的规则排列的一列数：

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

通常称它为数列，记作$\{a_n\}$。其中第一项a_1称为$\{a_n\}$的首项，第n项a_n称为$\{a_n\}$的通项，n称为项数。

在数列$\{a_n\}$中，通项a_n是项数n的函数，这个函数关系可以通过各种不同的形式表达，例如“由所有奇数组成的数列”是用文字描述了这个数列中每一个数所具有的性质，这个数列也可以表示为：

$$1,3,5,7,\cdots \qquad ①$$

这里要注意，这是一个无限数列，用①那样列举的形式不可能写出它的所有的数，而仅从列出的前面几个数，即使再多也不能完全确定这个数列的每一项，因此往往再写出它的通项，即第 n 项：

$$1,3,5,7,\cdots,2n-1,\cdots \qquad ②$$

这样这个数列就完全确定了。

若数列 $\{a_n\}$ 中，通项 a_n 与项数 n 的函数关系用一个解析式

$$a_n=f(n)(n=1,2,3,\cdots)$$

来表示，这个解析式就称为数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

若数列 $\{a_n\}$ 中对所有 $n\geqslant 2$ 都有 $a_n>a_{n-1}$，则称 $\{a_n\}$ 是递增数列；对所有 $n\geqslant 2$ 都有 $a_n=a_{n-1}$，则称 $\{a_n\}$ 是常数列；对所有 $n\geqslant 2$ 都有 $a_n<a_{n-1}$，则称 $\{a_n\}$ 是递减数列。

数列的种类很多，各自具有不同的特点和规律，它们导演出许多美妙的乐章，产生出很多奇妙的效用。其中最基本最常用的数列是等差数列与等比数列，我们在第一章中谈等差数列，在第二章中谈等比数列，第三章中谈其他一些特殊的数列，第四章中谈高阶等差数列与高阶等比数列，第五章中谈线性递推数列。

编者

目　录

第一章　等差数列

从德国伟大数学家、誉为数学王子的高斯(1777—1855)在幼年时的一个生动的故事谈起.

高斯在幼年时就表现出超人的数学天才. 在十岁时，小学老师出了一道算术难题："计算 $1+2+3+\cdots+100=?$"这可难为了初学算术的学生，大多数小孩依次逐项相加，那太困难和麻烦了. 但是高斯却在几秒后就将答案解了出来，如此正确的结果，如此快捷的速度，连老师都感到惊讶，真是一个天才！那么高斯是怎么算的，用的什么方法呢？原来他利用这个求和式子的和的对称性：与首末两项等距离的两个数的和都等于 101. 于是把式子中的数一对对的凑在一起：$1+100$，$2+99$，$3+98$，…，$49+52$，$50+51$，而这样的组有 50 组，每一组都等于 101，所以答案很快的就可以求出是：$101\times 50=5\,050$. 多么巧妙的思维，多么灵巧的算法！这个方法直到现在还在广泛的使用，其思维方法的美妙更是启发了许多数学家的创造精神.

1，2，3，…是由正整数组成的数列. 在这个正整数数列中，从第二项起，每一项与前一项的差都等于常数 1，这种数列称为等差数列. 一般地

在数列$\{a_n\}$中，若从第二项起，每一项与前一项的差都等于同一个常数d，即

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_{n+1} - a_n = \cdots \quad ①$$

则$\{a_n\}$称为**等差数列**，d称为其**公差**.

①也可以表示为：

$$a_{n+1} = a_n + d, \ \forall n \in \mathbf{N}^*$$

§1 等差数列中各个数量之间的关系

一、基本公式

等差数列$\{a_n\}$中最重要的数量有五个：公差 d，首项 a_1，通项 a_n，项数 n，前 n 项的和 S_n，它们互相关联，像五个兄弟互相提携，只要知道其中三个，就可以求出其余两个. 它们之间的主要关系是：

(1) $a_n = a_1 + (n-1)d$ 或者 $a_n = a_m + (n-m)d$

$$a_n = \begin{cases} S_1 & \text{当 } n = 1 \text{ 时} \\ S_n - S_{n-1} & \text{当 } n \geqslant 2 \text{ 时} \end{cases}$$

(2) $S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$

或者 $S_n = na_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d$

$$= na_n - \frac{n(n-1)}{2}d$$

(3) $d = \dfrac{a_m - a_n}{m-n}(m \neq n)$，特别 $d = a_{n+1} - a_n$

或者 $d = \dfrac{2(nS_m - mS_n)}{mn(m-n)}(m \neq n)$，特别 $d = S_2 - 2S_1$

$a_n = a_1 + (n-1)d$　　$a_1 + 2d + a_1 + 6d = 2$　　$2a_1 + 8d = 2$　　$a_1 + 4d = 1$

例 1　设等差数列$\{a_n\}$中，$a_3 + a_7 = 2$，$a_{23} - a_{10} = 52$.

$a_1 + 22d - (a_1 + 9d) = 52$

(1)求这个等差数列的通项 a_n 与前 n 项的和 S_n；

$13d = 52$

$d = 4$

(2)问第几项等于 41？前几项的和等于 999？

$a_1 = -15$

$a_m = a_1 + (m-1) \cdot d = 41$　　$S_m = S_m - S_{m-1}$

$-15 + 4m - 4 = 41$

$a_n = -15 + 4(n-1)$

$= -15 + 4n - 4$

$4m = 60$

$m = 15$

$a_n = -19 + 4n$

思路点拨 等差数列的通项 a_n、前 n 项的和 S_n 都是由首项 a_1、公差 d 与项数 n 确定的，所以首先利用给出的条件，列方程组求出 a_1 与 d.

解 设这个等差数列的公差是 d，则

$$\begin{cases}(a_1+2d)+(a_1+6d)=2\\(a_1+22d)-(a_1+9d)=52\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}2a_1+8d=2\\13d=52\end{cases}$$

解得 $a_1=-15$，$d=4$，于是通项公式：

$$a_n=-15+4(n-1)=4n-19$$

前 n 项的和的公式：

$$S_n=-15n+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 4=2n^2-17n$$

(1)若 $a_n=41$，即 $4n-19=41$，解得 $n=15$.

(2)若 $S_n=999$，即 $2n^2-17n=999$，解得 $n=27$.

思维误区 注意数列中的项数 n 是一个正整数，所以这个例子中方程 $2n^2-17n=999$ 的另一个解 $n=-\frac{37}{2}$ 不合题意，应当删去.

$a_1+9d=29$

举一反三 **例 1.1** 设等差数列 $\{a_n\}$ 的第 10 项 a_{10} 等于 29，前 5 项的和 S_5 等于 40，求这个等差数列的第 20 项 a_{20} 与前 20 项的和 S_{20}.

$S_5=5a_1+\frac{5\times4}{2}d=40$

a_n a_n S_{20}

解 设这个等差数列的公差是 d，则

$$\begin{cases}a_1+9d=29\\5a_1+\frac{5\times4}{2}d=40\end{cases}$$

解得：$a_1 = 2$, $d = 3$.

因此 $a_{20} = 2 + 19 \times 3 = 59$, $S_{20} = \dfrac{20 \times (2 + 59)}{2} = 610$.

例 1.2 设等差数列$\{a_n\}$中，公差 $d = 3$，第 n 项 $a_n = 41$，前 n 项的和 $S_n = 300$，求项数 n.

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot 3 = 41$ $\quad a_1 + 3n = 44$

$S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = 300$ $\quad na_1 + 3n^2 = 44n$

$na_1 + 3n^2 - 44n = 0$

解 解法一：由假设

$n(a_1 + 41) = 600$

$na_1 + 41n = 600$

$$\begin{cases} a_1 + 3(n-1) = 41 & ① \\ \dfrac{n(a_1 + 41)}{2} = 300 & ② \end{cases}$$

$3n^2 - 44n - 41n = -600$

$3n^2 - 85n + 600 = 0$

由①得 $a_1 = 44 - 3n$，代入②得

$$3n^2 - 85n + 600 = 0$$

即
$$(n - 15)(3n - 40) = 0$$

所以 $n = 15$.（因为 n 是正整数，另一个解 $n = \dfrac{40}{3}$ 不合题意）

解法二：利用公式 $S_n = na_n - \dfrac{n(n-1)}{2}d$，将 $d = 3$，$a_n = 41$，$S_n = 300$ 代入得

$$41n - \frac{3n(n-1)}{2} = 300$$

解得 $n = 15$.

例 1.3 (1)求能被 3 整除的两位数的和；

(2)求能被 3 整除而不能被 5 整除的两位数的和.

解 (1)能被 3 整除的正整数组成一个公差为 3 的等差数列$\{a_n\}$，其通项公式是 $a_n = 3n$. 由假设 $10 \leqslant 3n < 100$，所以 $3\dfrac{1}{3} \leqslant n < 33\dfrac{1}{3}$，

$33\frac{1}{3}-3\frac{1}{3}=30$

其正整数解为：$n=4, 5, \cdots, 33$. 从而，符合条件的 n 共有 30 个，因此所求的和为

$$S=a_4+a_5+\cdots+a_{33}=30a_4+\frac{30\times 29}{2}\times d$$

$$=30\times 12+\frac{30\times 29}{2}\times 3=1\,665$$

(2)一个正整数既能被 3 整除又能被 5 整除，相当于能被 15 整除，而能被 15 整除的正整数组成一个公差为 15 的等差数列 $\{b_n\}$，其通项公式是 $b_n=15n$. 令 $10\leqslant 15n<100$，则 $\frac{2}{3}\leqslant n<6\frac{2}{3}$，其正整数

$6\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=6$

解为：$n=1, 2, 3, 4, 5, 6$. 这 6 项之和为

$$T=6\times 15+\frac{6\times 5}{2}\times 15=315$$

因此能被 3 整除而不能被 5 整除的两位数的和是 $S-T=1\,665-315=1\,350$.

例 1.4 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差是正数，且 a_1、a_2 是方程 $x^2-a_3x+a_4=0$ 的两个实根，求通项公式与前 n 项和的公式.

解 设这个等差数列的公差是 d，由假设

$$\begin{cases} a_1+a_2=a_3 \\ a_1a_2=a_4 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 2a_1+d=a_1+2d \\ a_1(a_1+d)=a_1+3d \end{cases}$$

因为公差 d 是正数，解得 $a_1=d=2$. 因此通项公式是 $a_n=2+$

$(n-1)\times 2=2n$；前 n 项和的公式是 $S_n=\dfrac{n(2+2n)}{2}=n(n+1)$.

二、相连项的求法

例 2 设三个数成等差数列，且三项的和等于 27，三项的平方和等于 315，求这个等差数列.

思路点拨 若三个数 a_1，a_2，a_3 成等差数列，则中间一项 a_2 称为 a_1 与 a_3 的**等差中项**，且 $a_1+a_3=2a_2$. 在求三个成等差数列的数时，经常将等差中项设为 a，公差设为 d，于是三个数分别为：

$$a-d,\ a,\ a+d$$

若求四个成等差数列的数，经常将中间两项分别设为 $a-c$，$a+c$，于是公差 $d=2c$，四个数分别为：

$$a-3c,\ a-c,\ a+c,\ a+3c$$

这个方法可以推广到一般情形.

解 因为三个数成等差数列，可以分别设为 $a-d$，a，$a+d$，由假设

$$\begin{cases}(a-d)+a+(a+d)=27\\(a-d)^2+a^2+(a+d)^2=315\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}3a=27 & ①\\3a^2+2d^2=315 & ②\end{cases}$$

由①得 $a=9$，代入②得 $d=\pm 6$. 因此所求的等差数列是 3，9，15 或者 15，9，3.

思维误区 3，9，15 与 15，9，3 作为数组虽然相同，但是数列中

的数是有前后顺序的，从而这是两个不同的等差数列，前者的公差是6，后者的公差是-6，因此这个题目有两组解.

举一反三 **例 2.1** 设四个数成等差数列，且四项的平方和等于164，第一项与第三项之积加上第二项与第四项之积等于66，求这个等差数列.

解 因为四个数成等差数列，可以分别设为 $a-3c$，$a-c$，$a+c$，$a+3c$，由假设

$$\begin{cases}(a-3c)^2+(a-c)^2+(a+c)^2+(a+3c)^2=164\\(a-3c)(a+c)+(a-c)(a+3c)=66\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}a^2+5c^2=41\\a^2-3c^2=33\end{cases}$$

解此方程组得 $a^2=36$，$c^2=1$

所以 $a=\pm 6$，$c=\pm 1$. 因此本题有四组解：

(1)当 $a=6$，$c=1$ 时，这个等差数列是：3，5，7，9；

(2)当 $a=6$，$c=-1$ 时，这个等差数列是：9，7，5，3；

(3)当 $a=-6$，$c=1$ 时，这个等差数列是：-9，-7，-5，-3；

(4)当 $a=-6$，$c=-1$ 时，这个等差数列是：-3，-5，-7，-9.

例 2.2 设$\{a_n\}$是递增数列，a_n-a_{n-1} 是常数，前3项的和是12，前3项的积是48，求这个数列的首项.

解 因为 a_n-a_{n-1} 是常数，所以$\{a_n\}$是等差数列，设其公差是d，则前3项分别是 a_2-d，a_2，a_2+d，于是由假设